



EUROPA-FACHBUCHREIHE  
für elektrotechnische Berufe

# Rechenbuch Elektrotechnik

Ein Lehr- und Übungsbuch zur Grund- und Fachstufe

**20. neu überarbeitete Auflage  
als Ausgabe für Österreich**

**Buch-Nr.: 0361**

Bearbeitet von Lehrern an beruflichen Schulen und von Ingenieuren (siehe Rückseite)

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat: Klaus Tkotz

Das Unterrichtsmittel „Rechenbuch Elektrotechnik“ ist gemäß § 9 Abs. 1 und 2 der Verordnung zur Eignungserklärung von Unterrichtsmitteln, BGBl. Nr. 248/98, § 14 Abs. 2 und 5 sowie § 15 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 52/2010, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch an Berufsschulen für die Lehrberufe Elektroinstallationstechnik, Elektrobetriebstechnik, Elektroenergietechnik, Elektromaschinentechnik, Prozessleittechniker, Elektroanlagentechnik, Anlagentechniker und an gewerblichen, technischen und kunstgewerblichen Fachschulen, Fachrichtung Elektrotechnik und Elektronik für die 1.–4. Klasse approbiert. Appr.Z.: 41.720-I/9/92, 41.720/1-III/D/13/01, 5.012/0063-Präs. 8/2010, BMBF-5.012/0014-B/8/2015, 5.012/0010-IT/3/2016

FS FACHBUCH  
Verlag und Vertriebs Gesellschaft m.b.H., Wien

**Autoren des Rechenbuchs Elektrotechnik:**

Eichler, Walter	Otterberg
Feustel, Bernd	Kirchheim
Isele, Dieter	Lauterach
Käppel, Thomas	Münchberg
König, Werner	Boxberg
Tkocz, Klaus	Kronach
Winter, Ulrich	Kaiserslautern

**Bearbeiter der Österreichausgabe:**

Krall, Rudolf	Grödig/Salzburg
---------------	-----------------

**Lektorat und Leitung des Arbeitskreises:**

Klaus Tkocz

**Bildentwürfe und Layoutentwurf:**

Die Autoren

**Firmenverzeichnis:**

Die Autoren und der Verlag bedanken sich bei den nachfolgenden Firmen für die Unterstützung

AEG Zähler GmbH, 31785 Hameln  
Casio.Europe GmbH, 22848 Norderstedt  
Hameg Instruments, 60528 Frankfurt  
Richard Hirschmann GmbH Co, 72606 Nürtingen  
Kopp GmbH Co. KG, 63796 Kahl  
LEDON Lamp GmbH, A-6850 Dornbirn  
Varta GmbH, 30419 Hannover

**Bildbearbeitung:**

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel GmbH & Co. KG, 73760 Ostfildern

20. Auflage 2017

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert.

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2017 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Umschlagidee: Klaus Tkocz

Satz und Druck: Tutte Druckerei & Verlagsservice GmbH, 94121 Salzweg

## ● Allgemeines

● Vorwort .....	4
● Lernfeldhinweise .....	5
● Inhaltsverzeichnis (ausführlich) .....	6
● Sachwortverzeichnis .....	282

## ● Inhaltsverzeichnis (Kurzform)

1 Technische Mathematik .....	9
2 Physikalische Grundlagen .....	28
3 Elektrotechnische Grundlagen .....	40
4 Arbeiten mit Kennlinien .....	72
5 Elektrisches Feld .....	78
6 Magnetisches Feld .....	84
7 Wechselstrom- und Drehstromtechnik ...	92
8 Messtechnik .....	135
9 Elektronik .....	146
10 Schutzmaßnahmen .....	192
11 Anlagen- und Gebäudetechnik .....	199
12 Elektrische Maschinen .....	228
13 Regelungstechnik .....	255
14 Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung .....	262
15 Datenblätter .....	272

## ● Datenblätter

● Verlegearten von Kabeln und Leitungen ..	271
● Strombelastbarkeit von Kabeln und Leitungen, Umrechnungsfaktoren .....	272
● Betriebsdaten von Drehstrommotoren .....	274
● Betriebsdaten von Kleintransformatoren ..	274
● Auslöse-Kennlinien von Überstrom-Schutzeinrichtungen .....	275
● Elektro-Kalkulationshilfen, E-Reihen .....	276
● Licht- und Beleuchtungstechnik .....	277
● Antennentechnik .....	278
● Z-Dioden, Leuchtdioden .....	280
● Gleichrichterdiode BYT 79/..., Transistor BC 107 .....	281

## ● Nützliches

- Formelzeichen (vordere und hintere Innenumschlagseite)
- Wichtige Winkelfunktionswerte (hintere Innenumschlagseite)
- Griechisches Alphabet (hintere Innenumschlagseite)

Kapitelnummer  
und Symbole

1



2



3



4



5



6



7



8



9



10



11



12



13



14



15



## Liebe Leserin, lieber Leser,

das Rechenbuch Elektrotechnik dient der Aus- und Weiterbildung im Berufsfeld Elektrotechnik.

### Aufbau des Buches

- Jedes Aufgabengebiet beginnt mit einer kurzen Einführung, gefolgt von einem Rechenbeispiel.
- Die Reihenfolge der Aufgaben ist von leicht nach schwer.
- Schwierige Aufgaben haben einen grünen Punkt ● vor der Aufgabennummer.
- Formeln und Legenden sowie Bilder sind in Blöcken zusammengefasst.
- Ab Seite 262 findet man eine Auswahl von Prüfungsaufgaben.
- Am Buchende im Infoteil eine Zusammenfassung wichtiger Datenblätter.

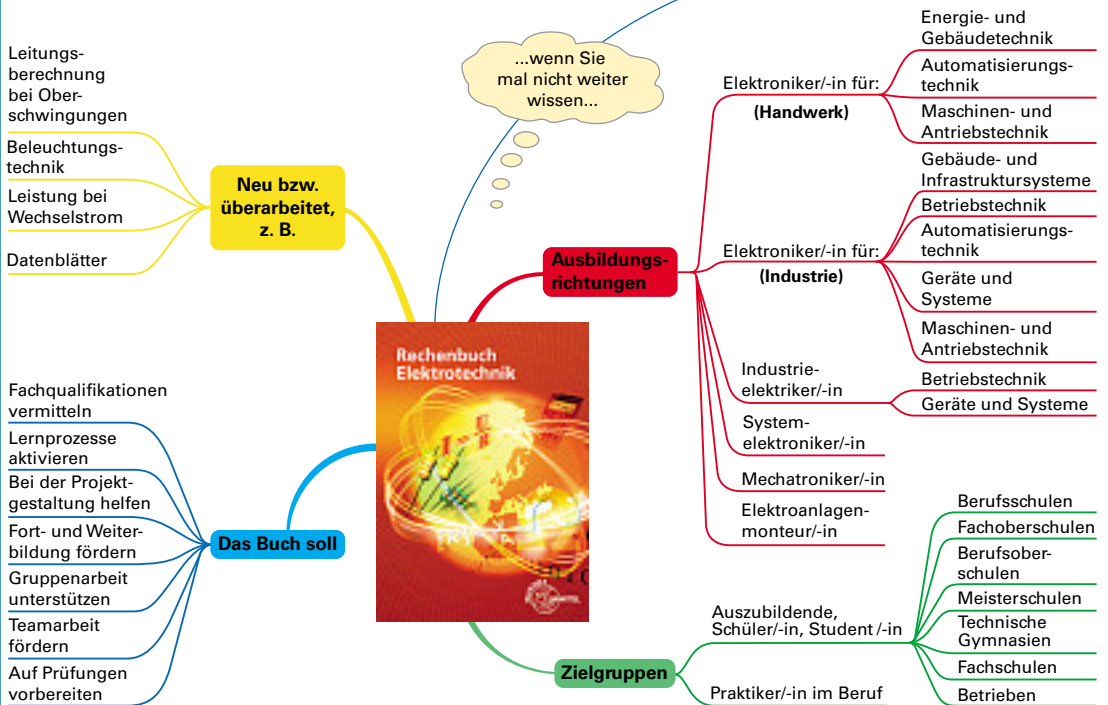
### Hilfen zum Rechenbuch Elektrotechnik

Zusätzlich gibt es:

- Ein ausführliches Lösungsbuch (rechtes Bild),
- ein weiteres Buch „Prüfungsvorbereitung Fachrechnen Elektrotechnik“ und
- eine Formelsammlung „Formeln für Elektrotechniker“.

### Auf einen Blick

Weiter führende Informationen findet man im folgenden Mind-Map-Bild.



Was können wir für Sie noch besser machen?  
Schreiben Sie uns unter: [lektorat@europa-lehrmittel.de](mailto:lektorat@europa-lehrmittel.de)

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel wünschen Ihnen für Ihre Ausbildung und berufliche Tätigkeit viel Erfolg.

**1 Technische Mathematik . . . . . 9**

**1.1 Elektronischer Taschenrechner (ETR) 9**  
**1.2 Grundrechnungsarten . . . . . 10**  
 1.2.1 Zahlen, Addition und Subtraktion . . . . . 10  
 1.2.2 Multiplikation und Division . . . . . 11  
**1.3 Rechnen mit Brüchen . . . . . 12**  
**1.4 Potenzen und Wurzeln . . . . . 13**  
 1.4.1 Potenzen . . . . . 13  
 1.4.2 Wurzeln . . . . . 14  
**1.5 Logarithmen . . . . . 15**  
 1.5.1 Rechnen mit Logarithmen . . . . . 15  
 1.5.2 Logarithmische Massstäbe . . . . . 16  
**1.6 Gleichungen und Formeln . . . . . 17**  
 1.6.1 Arbeiten mit Gleichungen . . . . . 17  
 1.6.2 Arbeiten mit Formeln . . . . . 18  
 1.6.3 Verhältnisgleichungen, Dreisatzrechnen . . . . . 20  
 1.6.4 Verhältnisgleichungen, Prozentrechnen . . . . . 20  
**1.7 Funktionen . . . . . 21**  
**1.8 Rechnen am Dreieck . . . . . 23**  
 1.8.1 Satz des Pythagoras . . . . . 23  
 1.8.2 Winkelfunktionen . . . . . 24  
 1.8.3 Winkel im Grad- und Bogenmaß . . . . . 25  
 1.8.4 Rechnen am beliebigen Dreieck . . . . . 26  
**1.9 Runden . . . . . 27**

**2 Physikalische Grundlagen . . 28**

**2.1 Vorsätze . . . . . 28**  
**2.2 Kreisumfang, gestreckte Länge . . . . . 29**  
**2.3 Flächen . . . . . 30**  
**2.4 Rauminhalt und Masse . . . . . 31**  
**2.5 Berechnung von Spulen . . . . . 32**  
**2.6 Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit . . . . . 34**  
 2.6.1 Gleichförmige Bewegung . . . . . 34  
 2.6.2 Kreisförmige Bewegung . . . . . 35  
**2.7 Kräfte . . . . . 36**  
**2.8 Moment und Hebel . . . . . 37**  
**2.9 Mechanische Arbeit . . . . . 38**  
**2.10 Mechanische Leistung . . . . . 39**

**3 Elektrotechnische Grundlagen 40**

**3.1 Umrechnen von Einheiten . . . . . 40**  
**3.2 Stromstärke und Ladung . . . . . 40**  
**3.3 Elektrische Spannung . . . . . 41**  
**3.4 Widerstand und Leitwert . . . . . 41**  
**3.5 Ohmsches Gesetz . . . . . 41**  
**3.6 Stromdichte . . . . . 43**  
**3.7 Elektrischer Widerstand . . . . . 44**  
 3.7.1 Leiterwiderstand . . . . . 44  
 3.7.2 Widerstand und Temperatur . . . . . 45  
 3.7.3 Übertemperatur . . . . . 46  
**3.8 Schaltung von Widerständen . . . . . 47**  
 3.8.1 Reihenschaltung von Widerständen . . . . . 47  
 3.8.2 Parallelschaltung von Widerständen . . . . . 49  
 3.8.3 Gemischte Schaltungen (Gruppenschaltungen) . . . . . 51  
 3.8.4 Spannungsteiler . . . . . 54  
 3.8.5 Abgeglichene Brückenschaltung . . . . . 56  
 3.8.6 Unabgeglichene Brückenschaltung . . . . . 57

**3.9 Elektrische Leistung und Arbeit . . . . . 58**  
 3.9.1 Elektrische Leistung . . . . . 58  
 3.9.2 Elektrische Arbeit . . . . . 59  
 3.9.3 Leistungsbestimmung mit dem Zähler . . . . . 60  
 3.9.4 Wirkungsgrad . . . . . 61  
**3.10 Wärmeenergie . . . . . 62**  
 3.10.1 Wärmemenge und Wassermischung . . . . . 62  
 3.10.2 Elektrowärme und Wärmenutzungsgrad . . . . . 63  
**3.11 Spannungserzeuger . . . . . 64**  
 3.11.1 Galvanische Elemente . . . . . 64  
 3.11.2 Schaltung von Spannungserzeugern . . . . . 65  
 3.11.3 Anpassung . . . . . 67  
 3.11.4 Ersatzquellen . . . . . 68  
 3.11.5 Laden und Entladen von Akkumulatoren . . . . . 69  
 3.11.6 Fotovoltaik und Solarmodul . . . . . 70

**4 Arbeiten mit Kennlinien . . . . 72**

**4.1 Lineare Widerstände . . . . . 72**  
**4.2 Logarithmische Darstellung . . . . . 73**  
**4.3 Nichtlineare Widerstände . . . . . 73**  
**4.4 Ermittlung des Arbeitspunktes . . . . . 75**  
 4.4.1 Reihenschaltung linearer Widerstände . . . . . 75  
 4.4.2 Reihenschaltung linearer und nichtlinearer Widerstände . . . . . 76  
**4.5 Statischer und differentieller Widerstand 77**

**5 Elektrisches Feld . . . . . 78**

**5.1 Elektrische Feldstärke . . . . . 78**  
**5.2 Kapazität von Plattenkondensatoren . 79**  
**5.3 Ladung und Energie bei Kondensatoren 80**  
**5.4 Schaltungen von Kondensatoren . . . . 81**  
**5.5 Laden und Entladen von Kondensatoren 82**  
 5.5.1 Kondensatorspannung und Zeit . . . . . 82  
 5.5.2 Kondensatorstrom und Zeit . . . . . 83

**6 Magnetisches Feld . . . . . 84**

**6.1 Größen des magnetischen Feldes . . . . 84**  
 6.1.1 Durchflutung und Feldstärke . . . . . 84  
 6.1.2 Magnetischer Fluss, magnetische Flussdichte, Permeabilität . . . . . 85  
 6.1.3 Arbeiten mit Magnetisierungskennlinien . . . . . 86  
**6.2 Magnetische Kreise . . . . . 87**  
**6.3 Magnetische Feldkräfte . . . . . 89**  
**6.4 Elektromagnetische Induktion . . . . . 90**  
**6.5 Spule an Gleichspannung . . . . . 91**

**7 Wechselstrom- und Drehstrom-technik . . . . . 92**

**7.1 Kenngrößen der Wechselstromtechnik 92**  
**7.2 Winkel und Winkelfunktionen . . . . . 93**  
**7.3 Augenblickswert sinusförmiger Wechselspannungen und -ströme . . . . . 94**  
**7.4 Addition sinusförmiger Wechselgrößen gleicher Frequenz . . . . . 96**  
 7.4.1 Addition von Wechselgrößen im Zeigerbild 96

7.4.2 Addition sinusförmiger Wechselgrößen im Liniendiagramm ..... 97

**7.5 Wechselstromkreis mit idealen Widerständen ..... 98**

7.5.1 Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis (Wirkwiderstand) ..... 98

7.5.2 Induktivität im Wechselstromkreis (ideale Spule) ..... 99

7.5.3 Kapazität im Wechselstromkreis (idealer Kondensator) ..... 100

7.5.4 Schaltungen von idealen Induktivitäten und idealen Kapazitäten ..... 101

**7.6 Reihenschaltungen bei gemischter Belastung ..... 102**

7.6.1 Wirkwiderstand und induktiver Blindwiderstand in Reihe ..... 102

7.6.2 Verlustwinkel und Gütefaktor einer Spule . 104

7.6.3 Reihenschaltung realer Spulen ..... 105

7.6.4 Wirkwiderstand und kapazitiver Blindwiderstand in Reihe ..... 106

7.6.5 Wirkwiderstand, induktiver Blindwiderstand und kapazitiver Blindwiderstand in Reihe . 108

**7.7 Parallelschaltungen bei gemischter Belastung ..... 110**

7.7.1 Wirkwiderstand und induktiver Blindwiderstand parallel ..... 110

7.7.2 Parallelschaltung mehrerer Spulen ..... 112

7.7.3 Wirkwiderstand und kapazitiver Blindwiderstand parallel ..... 114

7.7.4 Verlustwinkel und Gütefaktor eines Kondensators ..... 116

7.7.5 Wirkwiderstand, induktiver Blindwiderstand und kapazitiver Blindwiderstand parallel .. 117

**7.8 Schwingkreise ..... 119**

7.8.1 Reihenschwingkreis ..... 119

7.8.2 Parallelschwingkreis ..... 120

**7.9 Leistung bei Wechselstrom ..... 121**

**7.10 Siebschaltungen ..... 122**

7.10.1 RL-Hochpass und RL-Tiefpass ..... 122

7.10.2 RC-Hochpass und RC-Tiefpass ..... 123

**7.11 Dreiphasenwechselstrom (Drehstrom) ..... 124**

7.11.1 Sternschaltung ..... 124

- Sternschaltung, symmetrische Last ..... 124
- Sternschaltung, unsymmetrische, gleichartige Last ..... 125
- Sternschaltung, unsymmetrische, ungleichartige Last ..... 126

7.11.2 Dreieckschaltung ..... 127

- Dreieckschaltung, symmetrische Last ... 127
- Dreieckschaltung, unsymmetrische und gleichartige Last ..... 128
- Dreieckschaltung, unsymmetrische und ungleichartige Last ..... 129

7.11.3 Leistung bei Dreiphasenwechselstrom .... 130

**7.12 Kompensation ..... 132**

7.12.1 Kompensation bei Wechselstromverbrauchern 132

7.12.2 Kompensation bei Drehstromverbrauchern 134

**8 Messtechnik ..... 135**

**8.1 Analoge Messgeräte ..... 135**

8.1.1 Anzeigefehler bei analogen Messgeräten .. 135

8.1.2 Eigenverbrauch von analogen Messgeräten 136

**8.2 Digitale Messgeräte ..... 137**

Anzeige und Messfehler ..... 137

**8.3 Echteffektivwertmessung und Messkategorie ..... 138**

**8.4 Indirekte Widerstandsermittlung .... 140**

**8.5 Messen über Messwandler ..... 141**

**8.6 Messen mit dem Oszilloskop ..... 143**

**9 Elektronik ..... 146**

**9.1 Kühlung elektronischer Bauelemente 146**

**9.2 Leuchtdioden ..... 147**

**9.3 Gleichrichter ..... 148**

9.3.1 Gleichrichterschaltungen ..... 148

9.3.2 Glättung und Siebung ..... 150

**9.4 Bipolarer Transistor ..... 152**

9.4.1 Kennwerte ..... 152

9.4.2 Arbeiten mit Transistorkennlinien ..... 153

9.4.3 Arbeitspunkteinstellung ..... 154

9.4.4 Arbeitspunktstabilisierung ..... 155

9.4.5 Wechselstromverstärker in Emitterschaltung 156

**9.5 Spannungsstabilisierung ..... 158**

9.5.1 Z-Diode ..... 158

9.5.2 Parallelstabilisierung mit Z-Diode ..... 159

9.5.3 Reihenstabilisierung ..... 160

9.5.4 Spannungsstabilisierung mit Spannungsreglern ..... 161

**9.6 Transistor als Schalter ..... 162**

**9.7 Kippschaltungen ..... 163**

9.7.1 Astabile Kippschaltung ..... 163

9.7.2 Monostabile Kippschaltung ..... 164

9.7.3 Schmitt-Trigger ..... 165

**9.8 Feldeffekttransistor (FET) ..... 166**

9.8.1 Kenngrößen des Feldeffekttransistors ..... 166

9.8.2 Einstellung des Arbeitspunktes ..... 167

9.8.3 Arbeiten mit Kennlinien beim FET ..... 169

**9.9 Operationsverstärker ..... 169**

9.9.1 Invertierender Operationsverstärker ..... 169

9.9.2 Nichtinvertierender Operationsverstärker .. 169

9.9.3 Summierverstärker (Addierer) ..... 170

9.9.4 Differenzverstärker (Subtrahierer) ..... 171

9.9.5 Integrierer ..... 172

9.9.6 Differenzierer ..... 173

**9.10 Thyristoren und Triacs ..... 174**

9.10.1 Zünden von Thyristoren und Triacs ..... 174

9.10.2 Gesteuerte Gleichrichter ..... 174

9.10.3 Wechselstromsteller, Vielperiodensteuerung 176

**9.11 Digitaltechnik ..... 177**

9.11.1 Zahlensysteme ..... 178

- Umwandlung von Dual- und Sedezimalzahlen in Dezimalzahlen ..... 178
- Umwandlung von Dezimal- in Dual- oder in Sedezimalzahlen ..... 178
- Umwandlung von Sedezimalzahlen und Dualzahlen ..... 179

9.11.2 Rechnen mit Dualzahlen ..... 180

9.11.3 BCD-Code ..... 180

9.11.4 Schaltalgebra ..... 181

- Rechenregeln für eine Variable und Umkehrterme ..... 181
- Kommutativgesetze ..... 182
- Assoziativgesetze ..... 182
- Distributivgesetze ..... 182
- Umkehrgesetze für mehrere Variablen ... 183
- Schaltungen in NAND- oder in NOR-Technik ..... 184

9.11.5	Analyse und Synthese von Binärschaltungen	185
	• Analyse von Binärschaltungen	185
	• Synthese von Binärschaltungen	186
9.11.6	Minimieren von Schaltnetzwerken	187
	• Algebraisches Minimieren	187
	• KV-Diagramm	188
<b>9.12</b>	<b>Datenmengen und Datenübertragungsrate</b>	<b>190</b>
9.12.1	Datenmengen	190
9.12.2	Datenübertragungsrate	191

## 10 Schutzmaßnahmen in elektrischen Anlagen 192

<b>10.1</b>	<b>Schutzmaßnahmen</b>	<b>192</b>
10.1.1	Fehlerstromkreis	192
10.1.2	Isolationswiderstand von Fußböden oder Wänden	193
10.1.3	Schutzmaßnahmen im TN-System	193
10.1.4	Schutzmaßnahmen im TT-System	193
10.1.5	Kurzschlusschutz von isolierten Leitungen und Kabeln	197
10.1.6	Fehlerstrom-Schutzeinrichtung (RCD)	198

## 11 Anlagen- u. Gebäudetechnik 199

<b>11.1</b>	<b>Projektierung elektrischer Leitungen</b>	<b>199</b>
11.1.1	Unverzweigte Leitungen für Gleichstrom	199
11.1.2	Unverzweigte Leitungen für Wechselstrom	201
11.1.3	Unverzweigte Leitungen für Drehstrom	203
11.1.4	Verzweigte Leitungen für Wechselstrom	204
11.1.5	Verzweigte Leitungen für Drehstrom	206
11.1.6	Ringleitungen	208
11.1.7	Leitungen mit Oberschwingungen	210
<b>11.2</b>	<b>Beleuchtungstechnik</b>	<b>212</b>
11.2.1	Lichtstrom und Lichtausbeute	212
11.2.2	Energieeffizienzklasse	212
11.2.3	Beleuchtungswirkungsstärke und Beleuchtungswirkungsgrad	213
11.2.4	Lichtstärke und Lichtstärkeverteilung	214
11.2.5	Entfernungsgesetz	215
11.2.6	Leuchtdichte	215
11.2.7	Raumindex	216
11.2.6	Beleuchtungswirkungsgrad bei Innenraumbeleuchtung	216
11.2.7	Ermittlung der Lampenzahl nach dem Wirkungsgradverfahren	217
<b>11.3</b>	<b>Antennentechnik</b>	<b>218</b>
11.3.1	Verstärkungsfaktor, Dämpfungsfaktor	218
11.3.2	Verstärkungsmaß, Dämpfungsmaß	219
11.3.3	Pegel	220
11.3.4	Mechanische Sicherheit von Antennenanlagen	222
<b>11.4</b>	<b>Kostenrechnen</b>	<b>224</b>
11.4.1	Rechnungspreis und Gewinn	224
11.4.2	Kostenarten	224
<b>11.5</b>	<b>Handelskalkulation</b>	<b>225</b>
<b>11.6</b>	<b>Angebotserstellung</b>	<b>226</b>

## 12 Elektrische Maschinen 228

<b>12.1</b>	<b>Transformatoren</b>	<b>228</b>
12.1.1	Einphasentransformatoren	228
12.1.2	Transformatoren für Dreiphasenwechselstrom	237
<b>12.2</b>	<b>Antriebstechnik</b>	<b>239</b>
12.2.1	Leistung, Drehzahl und Drehmoment	239
12.2.2	Übersetzungen, Riemetrieb	240
12.2.3	Zahnradtrieb	241
12.2.4	Schneckenrieb	241
12.2.5	Mehrfache Übersetzung	243
<b>12.3</b>	<b>Umlaufende elektrische Maschinen</b>	<b>244</b>
12.3.1	Drehfelddrehzahl	244
12.3.2	Synchronmaschine	244
12.3.3	Zahnläufer und Schrittmotoren	247
12.3.4	Drehstromasynchronmotor	247
12.3.5	Wechselstromasynchronmotor	249
12.3.6	Asynchrone Frequenzumformer	250
12.3.7	Gleichstrommotoren	251
	• Fremderregter Gleichstrommotor	251
	• Gleichstrom-Nebenschlussmotor	252
	• Gleichstrom-Reihenschlussmotor	253
12.3.8	Gleichstromgeneratoren	254

## 13 Regelungstechnik 255

<b>13.1</b>	<b>Unstetiges Regeln</b>	<b>255</b>
<b>13.2</b>	<b>Stetiges Regeln</b>	<b>257</b>
13.2.1	Regeln mit Proportionalverhalten	257
13.2.2	Operationsverstärker als Regler	259
13.2.3	Einstellen eines stetigen Reglers	261

## 14 Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung 262

Aufgaben	262
Rechenergebnisse	270

## 15 Datenblätter 268

• Verlegearten von Kabeln und Leitungen	271
• Strombelastbarkeit von Kabeln und Leitungen, Umrechnungsfaktoren	272
• Oberschwingungen	273
• Betriebsdaten von Drehstrommotoren	274
• Betriebsdaten von Kleintransformatoren	274
• Auslösekennlinien von Überstrom-Schutzeinrichtungen	275
• Elektro-Kalkulationshilfen, E-Reihen	276
• Licht- und Beleuchtungstechnik (1)	277
• Licht- und Beleuchtungstechnik (2)	278
• Antennentechnik	279
• Z-Dioden, Leuchtdioden	280
• Gleichrichterdiode BYT79/..., Transistor BC107	281
Sachwortverzeichnis	282

# Inhaltsübersicht zu Lernfeldern (Beispiele)

LF	Elektroniker/in für				Lernfeldinhalt (Grundstufe LF 1...4, Fachstufe LF 5...13)	Buchseiten (Beispiele)
	MA	BT	EG	AT*		
1	x	x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Elektrotechnische Systeme analysieren und Funktionen prüfen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Elektrotechnische Grundlagen ..... 40</li> <li>● Schaltung von Widerständen ..... 47</li> <li>● Elektrische Leistung und Arbeit ..... 58</li> <li>● Arbeiten mit Kennlinien ..... 72</li> <li>● Elektrisches Feld ..... 78</li> <li>● Wechselstrom ..... 92</li> <li>● Gefahren des elektrischen Stromes ..... 192</li> <li>● Messverfahren, Oszilloskop ..... 135, 143</li> <li>● Elektronische Bauelemente ..... 146</li> <li>● E-Reihen ..... 276</li> </ul>
2	x	x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Elektrische Installationen planen und ausführen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Spannungserzeuger ..... 64, 92, 124</li> <li>● Auftragsplanung ..... 226</li> <li>● Auswahl v. Kabel u. Leitungen ..... 199</li> <li>● Leitungsdimensionierung ..... 199</li> <li>● Überstrom-Schutzeinrichtungen ..... 275</li> <li>● Angebotserstellung, Kostenberechnung, Rechnungserstellung ..... 224</li> </ul>
3	x	x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Steuerungen analysieren und anpassen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Digitaltechnik ..... 177</li> <li>● Analyse u. Synthese v. Binärschaltungen ..... 185</li> <li>● Schaltnetzwerke ..... 187</li> <li>● Kippschaltungen ..... 163</li> <li>● Magnetisches Feld ..... 84</li> </ul>
4	x	x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Informationstechnische Systeme bereitstellen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Vorsätze ..... 28</li> <li>● Zahlensysteme ..... 177</li> <li>● Rechnen mit Dualzahlen ..... 180</li> </ul>
5	x	x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Elektroenergieversorgung und Sicherheit von Betriebsmitteln gewährleisten</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Wechselstromtechnik ..... 92</li> <li>● Dreiphasenwechselstrom ..... 124</li> <li>● Schutzmaßnahmen ..... 192</li> <li>● Fehlerstrom-Schutzeinrichtung ..... 198</li> <li>● Netzsysteme ..... 193</li> <li>● Gleichrichter, Netzteile ..... 148, 158</li> </ul>
6		x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Anlagen und Geräte analysieren und prüfen</li> <li>● Geräte und Baugruppen in Anlagen analysieren und prüfen</li> <li>● Elektrische Maschinen herstellen und prüfen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Schutzmaßnahmen ..... 192</li> <li>● Elektrische Maschinen ..... 228</li> <li>● Messtechnik ..... 135</li> <li>● Elektronik ..... 146</li> </ul>
7		x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Steuerungen für Anlagen programmieren und realisieren</li> <li>● Betriebsverhalten elektrischer Maschinen analysieren</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Schaltnetzwerke ..... 187</li> <li>● Elektrische Maschinen ..... 228</li> </ul>
8		x	x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Antriebssysteme auswählen und integrieren</li> <li>● Elektrische Maschinen und mechanische Komponenten integrieren</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Antriebstechnik ..... 239</li> <li>● Drehstrommaschinen ..... 247</li> <li>● Gleichstrommaschinen ..... 251</li> <li>● Schrittmotoren ..... 246</li> <li>● Leistungselektronik ..... 174</li> </ul>
9			x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Steuerungs- und Kommunikationssysteme integrieren</li> <li>● Kommunikationssysteme in Wohn- und Zweckbauten planen und realisieren</li> <li>● Gebäudetechnische Anlagen ausführen und in Betrieb nehmen</li> <li>● Elektrische Maschinen in Stand setzen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Leitungen ..... 199</li> <li>● Leitungsbemessung ..... 199, 271</li> <li>● Antennenanlagen ..... 218</li> <li>● Licht- und Beleuchtungstechnik ..... 212</li> <li>● Daten von Drehstrommotoren ..... 274</li> </ul>
10			x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Automatisierungssysteme in Betrieb nehmen und übergeben</li> <li>● Elektrische Anlagen der Haustechnik in Betrieb nehmen und in Stand halten</li> <li>● Energietechnische Anlagen errichten und in Stand halten</li> <li>● Steuerungen und Regelungen für elektrische Maschinen auswählen und anpassen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Elektrische Anlagentechnik ..... 199</li> <li>● Leistungselektronik ..... 174</li> <li>● Transformatoren ..... 228</li> <li>● Licht- und Beleuchtungstechnik ..... 212</li> <li>● Regelungstechnik ..... 255</li> </ul>
11			x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Automatisierungssysteme in Stand halten und optimieren</li> <li>● Energietechnische Anlagen errichten, in Betrieb nehmen und in Stand setzen</li> <li>● Automatisierte Anlagen in Betrieb nehmen und in Stand halten</li> <li>● Elektrische Maschinen in technische Systeme integrieren</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Elektrische Anlagentechnik ..... 199</li> <li>● Transformatoren ..... 228</li> <li>● Kostenrechnen ..... 224</li> <li>● Anlagentechnik ..... 199</li> <li>● Leistungselektronik ..... 174</li> <li>● Elektromotoren ..... 244</li> </ul>
12			x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Automatisierungssysteme planen</li> <li>● Energie- und gebäudetechnische Anlagen planen und realisieren</li> <li>● Elektrotechnische Anlagen planen und realisieren</li> <li>● Antriebssysteme in Stand halten</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Elektrische Anlagentechnik ..... 199</li> <li>● Leitungsberechnung ..... 201</li> <li>● Verlegearten v. Kabeln u. Leitungen ..... 271</li> <li>● Kennlinien Überstrom-Schutzeinrichtungen ..... 275</li> <li>● Antennenanlagen ..... 218</li> </ul>
13			x	x	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Automatisierungssysteme realisieren</li> <li>● Energie- und gebäudetechnische Anlagen in Stand halten und ändern</li> <li>● Elektrotechnische Anlagen in Stand halten und ändern</li> <li>● Antriebssysteme anpassen und optimieren</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Schutzmaßnahmen ..... 192</li> <li>● Elektromotoren ..... 244</li> <li>● Daten von Drehstrommotoren ..... 243</li> <li>● Analyse u. Synthese v. Binärschaltungen ..... 185</li> </ul>

\*AT: Automatisierungstechnik, EG: Energie- und Gebäudetechnik, BT: Betriebstechnik, MA: Maschinen- und Antriebstechnik



# 1 Technische Mathematik

## 1.1 Elektronischer Taschenrechner (ETR)

In der Elektrotechnik verwendet man technisch-mathematische Taschenrechner (**Bild**). Sie bieten eine Fülle mathematischer Funktionen. Dazu haben die Tasten auf verschiedenen Ebenen unterschiedliche Funktionen.

**Wichtig:** Die Bedienungsanleitungen der verschiedenen Hersteller und Typen sind zu beachten.

Die Eingaben bei neuen Taschenrechnern entsprechen der Schreibweise von links nach rechts, z. B.  $\sin 30$ . Diese Form der Eingabe wird als „natürliches Display“ bezeichnet.

### Wichtige Funktionstasten (Beispiele) und deren Verwendung:

- $\sin$  Sinustaste: Wechsellspannung, **Seite 93**
- $\sqrt{\square}$  Quadratwurzel: Verkettungsfaktor, **Seite 123**
- $(e^x)$  e-Funktionstaste: Kondensatorspannung, **Seite 82**
- $\log$  Zehnerlogarithmus: Verstärkungsmaß, **Seite 219**
- $\times 10^x$  Zehnerpotenz, **Seite 219**

### Flüssigkristallanzeige (LC-Display): Eingabezeile, Ergebniszeile

$\text{SHIFT}$  : Eingabe der zweiten Tastenbelegung

$\text{ALPHA}$  : Eingabe der dritten Tastenbelegung

$\frac{\square}{\square}$  : Bruchrechnung

$\square \frac{\square}{\square}$  : Gemischter Bruch

$\sqrt{\square}$  : Quadratwurzel

$\square^2$  : Quadratzahl

$(-)$  : Negatives Vorzeichen

$(\text{STO})$  : Wert speichern

$\text{RCL}$  : Speicher aufrufen

$\text{ENG}$  : Darstellung in Potenzschreibweise

$0 - 9$  : Zahlenblock

$\square$  : Komma

$(\pi)$  : Kreiszahl\*

$(e^x)$  : e-Funktion\*\*

$\leftarrow$   $\rightarrow$   $\uparrow$   $\downarrow$  : Cursortasten

$\text{MODE}$  : Verschiedene Betriebsmodi einstellen

$\text{ON}$  : Einschalten

$\square^{\square}$  : Potenz

$\log$  : 10er Logarithmus

$\ln$  : Natürlicher Logarithmus

$\sin$   $\cos$   $\tan$  : Trigonometrische Funktionen

$( )$  : Klammer

$\text{DEL}$  : Löschen

$+$   $-$   $\times$   $\div$  : Grundrechenarten

$=$  : Eingabe beenden, Ergebnis im Antwortspeicher ablegen

$\text{Ans}$  : Antwortspeicher aufrufen

$\times 10^x$  : Zehnerpotenz



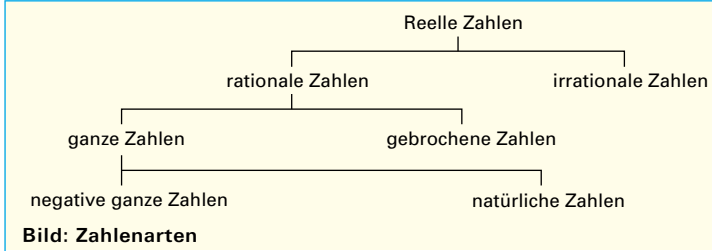
**Bild:** Elektronischer Taschenrechner (ETR)

\* Kreiszahl:  $\pi = 3,14159 \dots$     \*\* Eulersche Zahl:  $e = 2,71828 \dots$

# 1.2 Grundrechnungsarten

## 1.2.1 Zahlen, Addition und Subtraktion

Die reellen Zahlen werden nach **Bild** eingeteilt. Addition und Subtraktion gehören zu den Grundrechnungsarten. Die Gesetze und Regeln (**Tabelle**) sind zu beachten.



**Zahlenarten (Beispiele)**

Rationale Zahlen:  
 $-5; -2,3; 0; \frac{1}{4}; 7,6; \dots$

Irrationale Zahlen:  $\sqrt{2}; \pi; \dots$

Ganze Zahlen:  $3, -6, 0, 19, \dots$

Gebrochene Zahlen:  
 $\frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{4}{5}; \dots$

Negative ganze Zahlen:  
 $-3, -7, -14, \dots$

Natürliche Zahlen:  $2, 7, 19, \dots$

**Tabelle: Gesetze, Regeln, Anwendungsbeispiele mit Variablen, Zahlen und Summen**

<b>Kommutativgesetz*</b>	Vertauschen von Summanden
$a + b + c = a + c + b$	$5 + 2 + 9 = 5 + 9 + 2 = 16$
<b>Assoziativgesetz**</b>	Zusammenfassen von Summanden
$a + b + c = a + (c + b)$	$5 + 2 + 9 = 5 + (9 + 2) = 5 + 11 = 16$
<b>Vorzeichenregeln</b>	Summieren von Zahlen
$(+a) + (+b) = (+a) - (-b) = a + b$	$(+5) + (+2) = (+5) - (-2) = +7$
$(+a) + (-b) = (+a) - (+b) = a - b$	$(+5) + (-2) = (+5) - (+2) = +3$

**Addition**

Summanden  
 $4 + 1 + 3 = 8$   
 Summe | Summenwert

**Subtraktion**

Minuend | Subtrahend  
 $5 - 2 = 3$   
 Differenz | Differenzwert

- Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen, so muss bei der Auflösung der Klammer bei allen Gliedern innerhalb der Klammer das Vorzeichen geändert werden, z. B.  $10 - (3 + 2 - 4) = 10 - 3 - 2 + 4 = 9$
- **Variable:** Platzhalter für Zahlen und für Werte von Größen, z. B.  $U$  für  $25 \text{ V} \Rightarrow U = 25 \text{ V}$ .

**Beispiel:**

Berechnen Sie  $a - b + c - d$  für  $a = 69, b = 14, c = 91$  und  $d = 76$ . Geben Sie 2 Lösungswege an.

<b>Lösung a):</b>	<b>Lösung b):</b>
$a - b + c - d = 69 - 14 + 91 - 76 = 70$	$a + c - (b + d) = 69 + 91 - (14 + 76) = 70$
69 [-] 14 [+] 91 [-] 76 [=]	69 [+] 91 [-] ([ 14 [+] 76 ]) [=]

**Aufgaben zu 1.2.1**

- Fassen Sie die Summanden in allen möglichen Zweiergruppen zusammen (Assoziativgesetz).  
**a)**  $(3 + 7) + 1$ ; **b)**  $(11 + 9) - 5$ ; **c)**  $2 + 3 + 4$ ; **d)**  $8 + 2 + 4$ ; **e)**  $(11 + 14) + (16 + 19)$
- Berechnen Sie folgende Terme\*\*\* zunächst in der gegebenen Form. Lösen Sie dann die Klammern auf und fassen Sie die Minusglieder in einer neuen Klammer zusammen.  
**a)**  $400 - (46 + 18 - 120 + 14 + 52 - 16)$ ; **b)**  $647 - 123 - (79 - 68 + 37 + 21 - 67 + 20)$   
**c)**  $288 - (50 - 12 + 88) - 12 - 90 - 180$ ; **d)**  $368 - (152 - 32 - 77) - (28 + 103 - 120)$
- Addieren Sie die gleichartigen Summanden.  
**a)**  $5a + 6x + 4a + 3b + 4x$ ; **b)**  $9x + 3y + 2 + 5x + 7y + 4$ ; **c)**  $8,7a + 21,2n + 5,3a + 12,4n$

\* commutare (lat.) = vertauschen      \*\* sociare (lat.) = vereinigen      \*\*\* le terme (franz.) = der Ausdruck



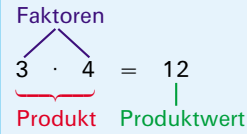
## 1.2.2 Multiplikation und Division

Die Multiplikation und Division gehören, wie die Addition und Subtraktion, zu den Grundrechnungsarten. Es gelten folgende Gesetze (Tabelle).

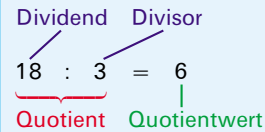
**Tabelle: Gesetze, Regeln, Anwendungsbeispiele mit Variablen, Zahlen und Summen**

Kommutativgesetz		Vertauschen von Faktoren	
$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$		$5 \cdot 2 \cdot 9 = 5 \cdot 9 \cdot 2$	<b>= 90</b>
Assoziativgesetz		Zusammenfassen von Faktoren	
$a \cdot b \cdot c = a \cdot (c \cdot b)$		$5 \cdot 2 \cdot 9 = 5 \cdot (9 \cdot 2) = 5 \cdot 18$	<b>= 90</b>
Vorzeichenregeln		Multiplizieren von Zahlen	
$(+a) \cdot (+b) = (-a) \cdot (-b) = +ab$		$(+5) \cdot (+2) = (-5) \cdot (-2) = +10$	
$(+a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (+b) = -ab$		$(+5) \cdot (-2) = (-5) \cdot (+2) = -10$	
Distributivgesetz*			
Multiplizieren mit Summen	$a \cdot (b - c) = ab - ac$	$5 \cdot (9 - 2) = 5 \cdot 9 - 5 \cdot 2 = 5 \cdot 7$	<b>= 35</b>
Ausklammern gleicher Faktoren	$ab - ac = a \cdot (b - c)$	$45 - 10 = 5 \cdot 9 - 5 \cdot 2 = 5 \cdot 7$	<b>= 35</b>
Multiplizieren von Summen	$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$	$(5 + 2) \cdot (9 - 3) = 5 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 3 = 7 \cdot 6$	<b>= 42</b>

### Multiplikation



### Division



Eine Multiplikation ist eine wiederholte Addition von gleichen Summanden

Malpunkte bei Produkttermen darf man weglassen, wenn dadurch kein Missverständnis entsteht, z. B. bei  $3 \cdot a \cdot b = 3ab$ , bei  $u \cdot (w + x) = u(w + x)$  oder bei  $5 \cdot (m - n) = 5(m - n)$ , aber nicht bei  $3 \cdot 5$ , da  $3 \cdot 5 \neq 35$ .

#### Beispiel:

Berechnen Sie  $u(w + x) = uw + ux$  für  $u = +15$ ,  $w = +12$  und  $x = -9$ . Geben Sie 2 Lösungswege an.

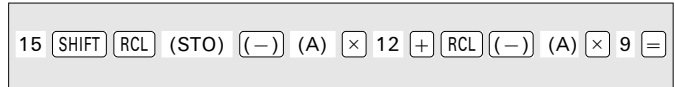
#### Lösung a:

$$u(w + x) = 15 \cdot (12 - 9) = 45$$



#### Lösung b:

$$\text{Speichern von } u = 15, uw + ux = 45$$



### Aufgaben zu 1.2.2

- Berechnen Sie folgende Aufgaben:
  - a)  $3a \cdot 5b$ ;    b)  $8c \cdot 3ab$ ;    c)  $3 \cdot 4,5a \cdot 3bc + 4ac \cdot 3b$ ;    d)  $4,5ab \cdot 8x - 2,5ax \cdot 9b + 5bx \cdot 3a$
2. a)  $8 \cdot (-5b)$ ;    b)  $4b \cdot (-e)$ ;    c)  $(-10a) \cdot (-12x)$ ;    d)  $(-n) \cdot (-m) \cdot (-x)$ ;  
 e)  $(-2x) \cdot 3y \cdot (-4z)$ ;    f)  $0,5x \cdot (-0,3y) \cdot 4$ ;    g)  $40 : (-8)$ ;    h)  $(-63c) : (-9)$ ;  
 i)  $(24 : 4) : 2$ ;    j)  $[24 : (-4)] : 2$ ;    k)  $[(-24) : (-4)] : 2$ ;    l)  $[(-24) : (-4)] : (-2)$
3. Multiplizieren Sie folgende Summen:
  - a)  $(a + 3) \cdot 6$ ;    b)  $(a - b) \cdot 7$ ;    c)  $8 \cdot (2a - 5b + 6)$ ;    d)  $(8 + 4x - a) \cdot (-4)$ ;  
 e)  $(a + b) \cdot 5 + 4 \cdot (a - b)$ ;    f)  $(2a + 3b) \cdot 2c + 4bc$ ;    g)  $(y - 9) \cdot (x - 3)$ ;    h)  $(n - 3) \cdot (a + 6)$
4. Klammern Sie die gemeinsamen Faktoren aus:
  - a)  $25 \cdot 12 + 15 \cdot 25 - 2 \cdot 25$ ;    b)  $ax - 4az + 7ay$ ;    c)  $24ab - 12by + 48ab$ ;  
 d)  $25ab + 125ac + 100ax$ ;    e)  $5bx - 2bx - 15bx$ ;    f)  $am + bm - cm + zm$ ;  
 g)  $(a + b) \cdot x + (a + b) \cdot y$ ;    h)  $(b - c) \cdot y + b - c$ ;    i)  $(a - b) \cdot x + (a - b) \cdot y$

\* distribuere (lat.) = verteilen

# 1.3 Rechnen mit Brüchen

Durch Division von ganzen Zahlen entstehen Brüche (**Tabelle 1**). Sie können durch Kürzen und Erweitern verändert werden. Für das Bruchrechnen gelten besondere Rechenregeln (**Tabelle 2**).

**Bruch**

$\frac{3}{4}$ 

Zähler

Bruchstrich

Nenner

Eine Division durch Null ist nicht erlaubt.

Tabelle 1: Arten von Brüchen			
$\frac{1}{5}$ Echter Bruch	$\frac{7}{4}$ Unechter Bruch	$\frac{4}{1}$ Scheinbruch	$1\frac{3}{4}$ Gemischte Zahl
$\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{5}{7}; \dots$ Gleichnamige Brüche, z. B. mit Hauptnenner 7		$\frac{1}{7}; \frac{2}{5}; \frac{4}{9}; \dots$ Ungleichnamige Brüche	

Tabelle 2: Rechenregeln an Beispielen	
Rechenoperation	Beispiele
Erweitern, kürzen	$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}; \quad \frac{27}{45} = \frac{27 : 9}{45 : 9} = \frac{3}{5}; \quad \frac{24xy}{30yz} = \frac{4x}{5z}$
Hauptnenner suchen, summieren	$3 + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{1 \cdot 12} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{36}{12} + \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}$
Multiplizieren	$\frac{2}{13} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{13 \cdot 1} = \frac{10}{13}; \quad \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
Dividieren	$\frac{12}{17} : 3 = \frac{12 \cdot 1}{17 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 3}{17 \cdot 3} = \frac{4}{17}; \quad \frac{24}{35} : \frac{6}{7} = \frac{24 \cdot 7}{35 \cdot 6} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5}$
Rechnen mit Vorzeichen	$\frac{+4}{+5} = +\frac{4}{5}; \quad \frac{-4}{-5} = +\frac{4}{5}; \quad \frac{-4}{+5} = -\frac{4}{5}; \quad \frac{+4}{-5} = -\frac{4}{5}$
Zähler und Nenner als Summenterme	$\frac{3}{5} - \frac{u+4}{v-1} = \frac{3(v-1)}{5(v-1)} - \frac{5(u+4)}{5(v-1)} = \frac{3v-3-(5u+20)}{5(v-1)} = \frac{3v-5u-23}{5(v-1)}$

**Beispiel:** Überprüfen Sie mit dem ETR die Gleichung:

$$3/4 + 4/5 - 1/2 = 0,75 + 0,80 - 0,50 = 1,05 = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$$

$3 \div 4 + 4 \div 5 - 1 \div 2 = 1.05$

## Aufgaben zu 1.3

Berechnen Sie folgende Bruchterme:

1. a)  $\frac{1}{4} - \frac{3}{14} - \frac{3}{35};$     b)  $\frac{9}{14} - \frac{1}{42} - \frac{17}{28} + \frac{2}{7};$     c)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{35};$     d)  $18 : \frac{24}{35};$     e)  $\frac{121}{27} : \frac{66}{45}$
2. a)  $\frac{7}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}};$     b)  $\frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}};$     c)  $\frac{-22}{\frac{1}{8} - \frac{1}{18}};$     d)  $\frac{104\text{gIm}}{130\text{gm}};$     e)  $\frac{28\text{ef}}{-84\text{ef}};$     f)  $\frac{-68\text{kmr}}{-102\text{kr}}$
3. a)  $\frac{1}{d} + \frac{1}{e};$     b)  $\frac{6}{t} - \frac{1}{s};$     c)  $\frac{3}{ab} + \frac{2}{bc};$     d)  $\frac{15}{k} - 3 + \frac{7}{l};$     e)  $\frac{3}{uv} + \frac{12}{uw} - 15$
4. a)  $\frac{2f}{3r} + \frac{g}{2s} - \frac{5h}{rs};$     b)  $\frac{5l}{6a} - k + \frac{h}{12ab} + \frac{5l}{18a};$     c)  $\frac{6ab}{38cd} \cdot \frac{57}{48a};$     d)  $\frac{32b}{21cd} : \frac{20ab}{49d}$
5. a)  $\frac{6x-30}{8} : \frac{5x-25}{20y-4};$     b)  $\frac{1-6v}{14s-2} : \frac{36v-6}{8-56s};$     c)  $\frac{1}{\frac{2}{m} + \frac{3}{n}};$     d)  $\frac{15a+10}{\frac{3}{2} + \frac{1}{a}}$


## 1.4 Potenzen und Wurzeln

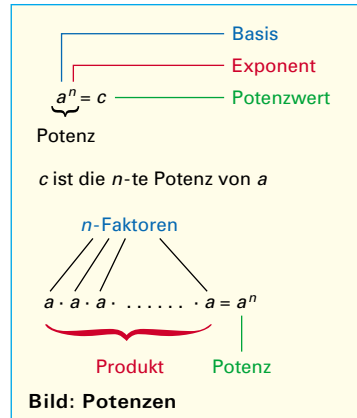
### 1.4.1 Potenzen

Wenn ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren besteht, so drückt man es verkürzt als Potenz aus (**Bild**). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird. Beim Rechnen mit Potenzen gelten Gesetze und Regeln (**Tabelle**).

**Tabelle: Rechenregeln, Beispiele**

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^3 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5^5 = 5^{3+2}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^3 : 5^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = 5^1 = 5 = 5^{3-2}$
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = (5 \cdot 2)^3$
$a^m : b^m = (a : b)^m$	$5^3 : 2^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5) : (2 \cdot 2 \cdot 2) = (5 : 2)^3$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(5^3)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^6 = 5^{3 \cdot 2}$
$1 : a^m = a^{-m}$	$1 : 5^2 = 5^{-2}$

 Vorsätze: **Seite 28**



Es gilt:  $a^1 = a$ ;  $a^0 = 1$

**Zehnerpotenzen** haben die Basis 10 und erlauben große und kleine Dezimalwerte übersichtlich darzustellen. Exponenten sollten wegen der Einheitsvorsätze, z. B. Mega =  $10^6$ , durch 3 teilbar sein, z. B. bei  $8\,500\,000 = 85 \cdot 10^5 = 8,5 \cdot 10^6$ .

#### Beispiel:

Überprüfen Sie  $2500000 \cdot 0,042 =$   
 $25 \cdot 10^5 \cdot 42 \cdot 10^{-3} = 1050 \cdot 10^2 =$   
 $105 \cdot 10^3 = 0,105 \cdot 10^6$



25  $\times 10^5$  5  $\times$  42  $\times 10^2$   $(-)$  3  $=$

#### Aufgaben zu 1.4

Berechnen Sie die folgenden Terme:

- a)  $x^3 \cdot x^3$       b)  $b^{2x} \cdot b^2$ ;      c)  $10^x \cdot 10^{2x}$ ;      d)  $7d^4 \cdot d^{-6}$ ;      e)  $3yx^{-3} \cdot y^5$ ;      f)  $2^{3x} \cdot 2^{-5x}$
- a)  $(a+1)^2$ ;      b)  $(4y-5)^2$ ;      c)  $(3+2b)^2$ ;      d)  $(x+y)^2$ ;      e)  $(x-y)^2$ ;      f)  $(2r+3s)^2$
- a)  $(a+b)^2$ ;      b)  $(a-b)^2$ ;      c)  $(a+b)^3$ ;      d)  $(a-b)^3$ ;      e)  $(a+b)^4$ ;      f)  $(a-b)^4$
- a)  $(2t:3)^2$ ;      b)  $(5:2b)^3$ ;      c)  $(7x:4y)^{-2}$ ;      d)  $(2:(x+1))^2$ ;      e)  $((5-x):(5+x))^2$
- a)  $(x^2)^5$ ;      b)  $(y^2)^3$ ;      c)  $(10^x)^2$ ;      d)  $(2^y)^5$ ;      e)  $(10^2)^{x+1}$ ;      f)  $(2^3)^{y-2}$
- a)  $3^2, 30^2, 300^2$ ;       $8^2, 80^2, 800^2, 8000^2$ ;       $7^2, 0,7^2, 0,07^2$ ;       $9^2, 0,9^2, 0,09^2, 0,009^2$   
 b)  $2^3, 20^3, 200^3$ ;       $0,5^3, 5^3, 50^3, 500^3$ ;       $(-10)^3, (-0,1)^3$ ;       $(-4)^3, (-0,4)^3, (-0,04)^3$
- Berechnen Sie die folgenden Terme als Dezimalbrüche und geben Sie die Ergebnisse in Zehnerpotenzschreibweise an.

a)  $0,004 \cdot 500$ ;  $0,035 \cdot 60\,000$ ;  $0,00048 \cdot 750\,000$ ;  $0,000024 \cdot 1500$ ;  $0,00016 \cdot 45\,000$   
 b)  $600 : 12\,000$ ;  $480 : 160\,000$ ;  $0,020 : 5\,500$ ;  $0,0072 : 3\,600$ ;  $0,00042 : 35\,000$
- Vereinfachen Sie mithilfe der Rechenregeln (**Tabelle**):

a)  $\frac{10^2 \cdot 10^7}{10^{-3} \cdot 10^5}$ ;      b)  $\frac{10^3}{10^9 \cdot 10^{-3}}$ ;      c)  $\frac{10^2 \cdot (10^{-6})^2}{10^{-7} \cdot 10^{-2}}$ ;      d)  $\frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{10^{-12} \cdot 10^9}$
- Zerlegen Sie in Faktoren mit Zehnerpotenzen und berechnen Sie:

a)  $\frac{48\,000 \cdot 500}{0,06}$ ;      b)  $\frac{34\,000 \cdot 0,5}{50\,000}$ ;      c)  $\frac{0,0078 \cdot 0,025}{13\,000 \cdot 0,0005}$ ;      d)  $\frac{56\,000 \cdot 0,005}{35\,000}$

## 1.4.2 Wurzeln



Das Wurzelziehen (Radizieren\*) ist die Umkehrfunktion des Potenzierens. Dabei wird eine Zahl  $c$  in eine vorgeschriebene Anzahl  $n$  gleicher Faktoren zerlegt (**Bild**). Dieser Faktor ist der Wurzelwert  $a$ . Die Rechenregeln (**Tabelle**) sind zu beachten. Ist der Wurzelexponent 2, spricht man von einer Quadratwurzel, ist er 3, von einer Kubikwurzel. Bei der Quadratwurzel kann der Wurzelexponent weggelassen werden.

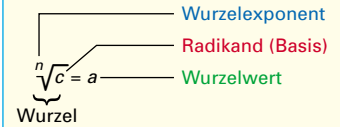
## Tabelle: Rechenregeln, Beispiele

$\sqrt[n]{c \cdot d} = \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d}$	$\sqrt[2]{9 \cdot 4} = \sqrt[2]{9} \cdot \sqrt[2]{4} = 3 \cdot 2 = 6 = \sqrt[2]{36}$
$\sqrt[n]{c : d} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$	$\sqrt[2]{36 : 4} = \sqrt[2]{36} : \sqrt[2]{4} = 6 : 2 = 3 = \sqrt[2]{9}$
$\sqrt[n]{c} = c^{1/n}$	$\sqrt[3]{8} = 2 = 8^{1/3}$
$\sqrt[n]{c^m} = c^{m/n}$	$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 8^{2/3}$

## Beispiel:

Bestimmen Sie mit dem ETR **a**) die Quadratwurzel aus 25, **b**) die Kubikwurzel aus 64 und **c**) die 4-te Wurzel aus 625.

	a) $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{\square} 25 \square = 5$	b) $\sqrt[3]{64} = 4$ SHIFT $\sqrt[\square]{} 64 \square = 4$
	c) $\sqrt[4]{625} = 5$ 4 SHIFT $x^{\square}$ ( $\sqrt[\square]{} \square$ ) 625 $\square = 5$	



$a$  ist die  $n$ -te Wurzel aus  $c$

Bild: Wurzeln

## Wurzel als Potenz:

$$\sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}}$$

Es gelten die Potenzrechenregeln.

- Eine Wurzel mit geradzahligem Wurzelexponent und negativem Radikand hat im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung, z. B.:

$$\sqrt{-25}$$

- Wurzeln und Potenzen mit dem gleichen Exponenten heben sich auf, z. B.:

$$\left(\sqrt[5]{4}\right)^5 = \left(4^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 4^{\frac{1}{5} \cdot 5} = 4$$

## Aufgaben zu 1.4.2

Schreiben Sie als Potenzen bzw. als Produkte von Potenzen und berechnen Sie.

1. a)  $\sqrt[k]{a^{3k}}$ ; b)  $\sqrt[3]{b^{6n}}$ ; c)  $\sqrt[2]{x^{4s}}$ ; d)  $\sqrt[k]{k^{2xy}}$ ; e)  $\sqrt[4]{(81z)^2}$ ; f)  $\sqrt[2]{(4b)^3}$ ; g)  $\sqrt[3]{(8a)^2}$

2. a)  $\sqrt{\frac{16a^2}{49c^4}}$ ; b)  $\sqrt{\frac{36a^2 \cdot c^4}{225b^2}}$ ; c)  $\sqrt{\frac{256q^2}{625s^4 \cdot t^2}}$ ; d)  $\sqrt[3]{\frac{343m^6}{216n^3}}$ ; e)  $\sqrt[3]{\frac{27d^6}{125f^3}}$ ; f)  $\sqrt[3]{\frac{64x^3}{343z^6}}$

3. Berechnen Sie die folgenden Terme und vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander.

a)  $\sqrt{4}$ ;  $\sqrt{40}$ ;  $\sqrt{400}$ ;  $\sqrt{4000}$ ;  $\sqrt{40000}$       b)  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{70}$ ;  $\sqrt{700}$ ;  $\sqrt{7000}$ ;  $\sqrt{70000}$

c)  $\sqrt{900}$ ;  $\sqrt{90}$ ;  $\sqrt{9}$ ;  $\sqrt{0,9}$ ;  $\sqrt{0,09}$ ;  $\sqrt{0,009}$       d)  $\sqrt{500}$ ;  $\sqrt{50}$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{0,5}$ ;  $\sqrt{0,05}$ ;  $\sqrt{0,005}$

4. Lösen Sie folgende Aufgaben durch Kopfrechnen und mit dem Taschenrechner.

a)  $\sqrt[2]{2^6}$ ;  $\sqrt[3]{5^6}$ ;  $\sqrt[2]{4^5}$ ;  $\sqrt[3]{8^2}$ ;  $\sqrt[3]{27^2}$       b)  $\sqrt[2]{9 \cdot 10^4}$ ;  $\sqrt[3]{640 \cdot 10^5}$ ;  $\sqrt[4]{(16,9 \cdot 10^{-5})^2}$

5. Berechnen Sie  $\sqrt{u^2 + v^2}$  für a)  $u = 8$ ;  $v = 6$ ;      b)  $u = 10$ ;  $v = 7,5$ ;      c)  $u = 0,48$ ;  $v = 0,36$

6. Berechnen Sie: a)  $3\sqrt{36ab}$ ; b)  $2\sqrt{50x}$ ;      c)  $6\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 5\sqrt{\frac{8}{9}} \cdot 3\sqrt{\frac{3}{2}}$ ;      d)  $\sqrt{121x + 121y}$

7. Berechnen Sie: a)  $\sqrt[3]{\frac{64c}{343d}}$ ; b)  $3\sqrt[3]{\frac{8nx}{27x^2} \cdot 64ab}$ ; c)  $\sqrt{\frac{5xy}{60}} : \sqrt{\frac{10x}{30}}$ ;      d)  $\sqrt{\frac{5x}{6}} : \sqrt{\frac{20}{12x}}$

8. Berechnen Sie: a)  $\sqrt[3]{\sqrt{b^2}}$ ; b)  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{y^2}}$ ; c)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{a^{10}}} + \sqrt[9]{b^6} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{b^{12}}}$ ; d)  $\sqrt[5]{\sqrt{m^5}} + 3\sqrt[4]{\sqrt[3]{m^6}}$

9. Berechnen Sie: a)  $\left(5a \cdot \sqrt{\frac{2b}{50c^3}}\right)^2$ ; b)  $\left(\frac{3m}{2n} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^2}{m^2}}\right)^3$ ; c)  $\sqrt{\frac{16x + 32y}{25a - 50b}}$ ; d)  $\sqrt{\frac{50m}{27n}} : \sqrt{\frac{2m^3}{3n^3}}$

\* Radix (lat.) = Wurzel



# 1.5 Logarithmen

## 1.5.1 Rechnen mit Logarithmen

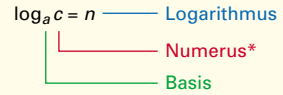
Zur Ermittlung des Exponenten einer Potenz verwendet man das Rechnen mit Logarithmen (**Bild**).

In der **Tabelle 1** sind die Rechenregeln mit Beispielen dargestellt. Die verschiedenen Arten von Logarithmen sind in **Tabelle 2** erklärt.



### Anwendungen von Logarithmen (Beispiele):

- Ladevorgänge bei Kondensatoren: **Seite 80**,
- Pegelberechnung: **Seite 220**,
- Kennlinien über große Zahlenbereiche: **Seite 73**.



$n$  ist der Logarithmus von  $c$  zur Basis  $a$

$a^n = c$

⇒ aufgelöst nach  $n$

⇒  $n = \log_a c$

Bsp.:  $1000 = 10^n$

⇒  $n = \log_{10} 1000 = 3$

**Bild: Logarithmen**

**Tabelle 1: Rechenregeln, Beispiele**

$\log_a c + \log_a d = \log_a (c \cdot d)$ $\log_a c - \log_a d = \log_a \left(\frac{c}{d}\right)$ $k \cdot \log_a c = \log_a (c^k)$ $\frac{1}{n} \cdot \log_a c = \log_a (c^{1/n}) = \log_a (\sqrt[n]{c})$	$\lg 1000 + \lg 10 = 3 + 1 = 4 = \lg (1000 \cdot 10) = \lg 10^4$ $\lg 1000 - \lg 10 = 3 - 1 = 2 = \lg (1000 : 10) = \lg 10^2$ $2 \cdot \lg 1000 = 2 \cdot 3 = 6 = \lg (1000^2) = \lg 10^6$ $\frac{1}{3} \cdot \lg 1000 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 = \lg (1000^{\frac{1}{3}}) = \lg (10)$
--	--

**Tabelle 2: Arten von Logarithmen**

Arten	Zehnerlogarithmus, dekadischer Logarithmus	Zweierlogarithmus, binärer Logarithmus	natürlicher Logarithmus
Basis	10	2	$e^* = 2,718 \dots$
Schreibweise	$\log_{10} c = \lg c$	$\log_2 c = \lg c$	$\log_e c = \ln c$

**Beispiel 1:**

Berechnen Sie  $\lg 5 + \lg 4$  mit dem ETR mit den Lösungen **a)** und **b)** und der Probe **c)**:

	<b>a)</b> $\lg 5 + \lg 4 = 0,699 + 0,602 = 1,301$ $\log \ 5 \ ) \ + \ \log \ 4 \ ) \ =$	<b>b)</b> $\lg 5 + \lg 4 = \lg (5 \cdot 4) = \lg 20 = 1,301$ $\log \ 5 \ \times \ 4 \ ) \ =$	<b>c)</b> $10^{1,301} = 20$ $\text{SHIFT} \ \log \ (10^{\bullet}) \ 1,301 \ =$
--	--	---	---

**Beispiel 2:**

Berechnen Sie  $\ln(\sqrt[3]{52^4})$  mit dem ETR mit den Lösungen **a)** und **b)** und der Probe **c)**:

	<b>a)</b> $\ln(\sqrt[3]{52^4}) = 4/3 \cdot \ln 52 = 5,268$ $4 \ \div \ 3 \ \times \ \ln \ 52 \ ) \ =$	<b>b)</b> $\ln(\sqrt[3]{52^4}) = \ln(52^{4/3}) = 5,268$ $\ln \ \text{SHIFT} \ [\sqrt[\square]{\square}] \ (\sqrt[\square]{\square}) \ 52 \ x^{\square} \ 4 \ =$	<b>c)</b> $e^{5,268} = 194 = 52^{4/3}$ $\text{SHIFT} \ \ln \ (e^{\bullet}) \ 5,268 \ =$
--	--	--	--

**Aufgaben zu 1.5**

- Ermitteln Sie die Zehnerlogarithmen der gegebenen Zahlenwerte  $c$  (Numeri).  
**a)** 100000; 10000; 1000; 100; 10; 1; 0,1;      **b)** 50000; 5000; 500; 50; 5; 0,5; 0,05; 0,005;  
**c)** 25000; 2500; 250; 25; 2,5; 0,25; 0,025;      **d)** 12500; 1250; 125; 12,5; 1,25; 0,125; 0,0125
- Berechnen Sie wie in **Beispiel 1** die Terme  $\lg c + \lg d$  und  $\ln c + \ln d$  (2 Lösungen mit Probe).  
**a)**  $c = 250$ ;  $d = 320$ ;      **b)**  $c = 25$ ;  $d = 32$ ;      **c)**  $c = 4,5$ ;  $d = 80$ ;      **d)**  $c = 0,45$ ;  $d = 8,0$
- Berechnen Sie wie in **Beispiel 2** die folgenden Terme (2 Lösungen, mit Probe):  
**a)**  $\lg(\sqrt[3]{7^3})$ ;      **b)**  $\lg(\sqrt[3]{10^2})$ ;      **c)**  $\ln(500^{2/3})$ ;      **d)**  $\ln(68^{3/4})$ ;      **e)**  $\lg(0,6^{3/4})$ ;      **f)**  $\ln(0,047^{3/5})$

\* Numerus (lat.) = Zahl

\*\* Eulersche Zahl:  $e = 2,71828 \dots$

## 1.5.2 Logarithmische Maßstäbe



Arbeiten mit Kennlinien:  
Seite 72

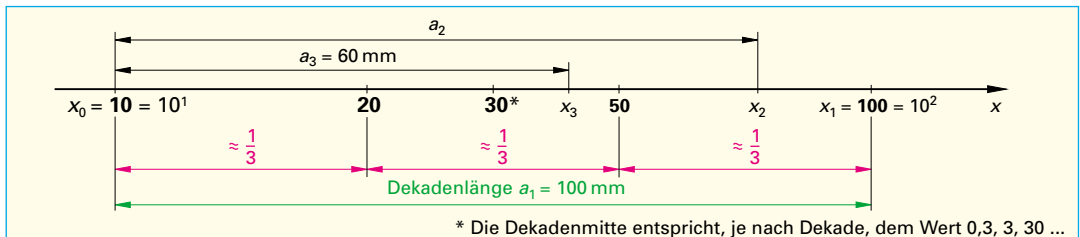
Durch den logarithmischen Maßstab ist es möglich, Kennlinien über große Wertebereiche darzustellen (**Bild 1**). Diese Kennlinien können einfachlogarithmisch (z. B. X-Achse: linear, Y-Achse: logarithmisch) oder doppellogarithmisch (beide Achsen logarithmisch) dargestellt werden. Logarithmisch geteilte Achsen haben folgende Eigenschaften:

- Die Achsen werden in Dekaden eingeteilt.
- Eine Dekade umfasst die Werte von  $10^n$  bis  $10^{n+1}$ , z. B. von 0,1 bis 1 oder 1 bis 10 oder 10 bis 100.
- Der Abstand von Dekade zu Dekade, z. B. von 1 bis 10 und von 10 bis 100, ist immer gleich lang, z. B. 100 mm.
- Die Abstände innerhalb einer Dekade sind logarithmisch geteilt (**Beispiel 1**).
- Wird die Dekade in drei gleiche Strecken eingeteilt, so entsprechen die Teilungsstriche etwa den Werten 2 und 5 (**Beispiel 1**). Die Teilung der Dekade in der Mitte entspricht etwa dem Wert 3.
- Die logarithmische Darstellung hat keinen Nullpunkt.

### Beispiel 1:

In einem Koordinatensystem soll die X-Achse logarithmisch geteilt werden. Der Ursprung hat den Wert  $x_0 = 10$ , eine Dekade hat die Länge  $a_1 = 100$  mm. Bestimmen Sie **a)** für den Wert  $x_2 = 70$  den Abstand  $a_2$  vom Ursprung und **b)** den Zahlenwert  $x_3$  des Punktes, welcher 60 mm vom Ursprung entfernt ist.

### Lösung:



\* Die Dekadenmitte entspricht, je nach Dekade, dem Wert 0,3, 3, 30 ...

**Bild 1: Logarithmische Teilung**

**a)**  $a_2 = a_1 \cdot \lg \frac{x_2}{x_0} = 100 \text{ mm} \cdot \lg \frac{70}{10} = 84,5 \text{ mm};$     **b)**  $x_3 = x_0 \cdot 10^{\frac{a_3}{a_1}} = 10 \cdot 10^{\frac{60 \text{ mm}}{100 \text{ mm}}} = 39,8 \approx 40$

### Beispiel 2:

Die Kennlinie einer Leuchtdiode vom Typ CQX 35 (**Datenblatt Seite 280**) soll im Bereich 1 mA bis 10 mA in einem größeren Maßstab dargestellt werden. Die Länge der Dekade ist 36 mm. Die X-Achse wird von 1,5 V bis 1,66 V gezeichnet (Maßstab: 8 mm  $\hat{=}$  40 mV). Zeichnen Sie die Kennlinie für die Werte 1 mA, 2 mA, 3 mA, 5 mA und 10 mA ein.

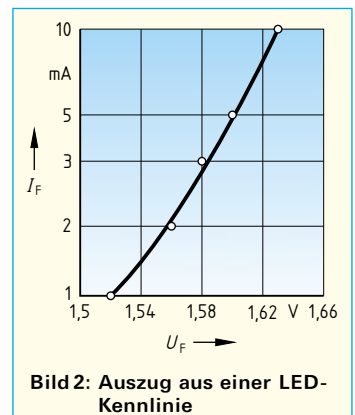
### Lösung:

Zuerst die Werte aus der Kennlinie mit logarithmischer Darstellung (**Datenblatt**) entnehmen und in die Tabelle eintragen. Dann die Kennlinie im Bereich von 1 mA bis 10 mA neu zeichnen (**Bild 2**).

$I$ in mA	1	2	3	5	10
$U$ in V	1,52	1,56	1,58	1,6	1,64

### Aufgaben zu 1.5.2

1. Erstellen Sie eine logarithmische Teilung von  $10^{-2}$  bis  $10^4$  auf einer Achsenlänge von 12 cm.
2. Die Eingangskennlinie eines NPN-Transistors BC 107 (**Datenblatt Seite 281**) soll im Bereich  $10 \mu\text{A}$  bis  $100 \mu\text{A}$  in einem größeren Maßstab dargestellt werden. Die Länge der Dekade ist 60 mm. Die X-Achse wird von 0,5 V bis 0,6 V gezeichnet (Maßstab: 1 cm  $\hat{=}$  20 mV). Zeichnen Sie die Werte für  $10 \mu\text{A}$ ,  $20 \mu\text{A}$ ,  $30 \mu\text{A}$ ,  $50 \mu\text{A}$  und  $100 \mu\text{A}$  ein.
3. Ermitteln Sie aus der Strom-Zeit-Kennlinie (doppellogarithmisches Diagramm) einer 16 A Schmelzsicherung (**Datenblatt Seite 275**) die maximalen Auslöseströme bei **a)** 5 Sekunden, **b)** 400 ms, **c)** 200 ms und **d)** 100 ms.



**Bild 2: Auszug aus einer LED-Kennlinie**



# 1.6 Gleichungen und Formeln

## 1.6.1 Arbeiten mit Gleichungen

Eine Gleichung setzt zwei Terme gleich. Sie enthält Zahlen und Variablen.

$$16 = 3x - 5$$

Linke Seite, Linksterm      Gleichheitszeichen      Rechte Seite, Rechtsterm

Die Variable  $x$  ist ein Platzhalter für einen Zahlenwert. Um den Wert für  $x$  zu finden, müssen beide Terme so lange verändert werden, bis die gesuchte Größe (Variable) allein auf der linken Seite steht.

Eine Waage im Gleichgewicht veranschaulicht diese Regeln (Tabelle 1). Dabei gelten die Regeln der äquivalenten (gleichwertigen) Umformung (Tabelle 2).

Äquivalente Umformung: Man darf beide Seiten einer Gleichung gegeneinander vertauschen oder durch Rechnung gleichwertig verändern (Tabelle 2).

**Tabelle 1: Waage und Gleichung**

**Waage bleibt im Gleichgewicht**

Linke Seite	=	Rechte Seite
$2 \cdot 2 \text{ kg}$		$= 4 \text{ kg}$
$2 \cdot 2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}$		$= 4 \text{ kg} + 1 \text{ kg}$

**Tabelle 2: Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen, Beispiele**

Linke Seite, Linksterm	=	Rechte Seite, Rechtsterm
Seiten gegeneinander vertauschen, z. B.:		$16 = 3x - 5 \Rightarrow 3x - 5 = 16$
gleichen Wert, z. B. 5, addieren:		$7x - 5 = 23 \Rightarrow 7x = 28$
gleichen Wert, z. B. 7, subtrahieren:		$5x + 7 = 25 \Rightarrow 5x = 18$
mit gleichem Wert, z. B. 5, multiplizieren:		$2x = 5 \Rightarrow 10x = 25$
durch gleichen Wert, z. B. 6, dividieren:		$6x = 18 \Rightarrow x = 3$
auf beiden Seiten Kehrwert bilden, z. B.:		$2/x = 5/3 \Rightarrow x/2 = 3/5$
auf beiden Seiten quadrieren, z. B.:		$x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$
auf beiden Seiten Wurzel ziehen, z. B.:		$x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$
beide Seiten logarithmieren, z. B.:		$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$

Tabelle 3: Gleichungen, Beispiele	
Beispiel 1: Auflösen nach $x$	Beispiel 2: Auflösen nach $y$
<p><b>Ausgangsgleichung:</b> <math>16 = 3x - 5</math></p> <p><b>5 addieren:</b> <math>16 + 5 = 3x - 5 + 5</math></p> <p><b>5 addiert</b> <math>21 = 3x</math></p> <p>Seiten vertauscht: <math>3x = 21</math></p> <p>Durch <b>3</b> teilen: <math>\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}</math></p> <p><b>Lösung:</b> <math>x = 7</math></p> <p><b>Probe:</b> <math>16 = 3 \cdot 7 - 5 \Rightarrow 16 = 16</math></p>	<p><b>Ausgangsgleichung:</b> <math>\frac{1}{2y - 3} = 5</math></p> <p>Kehrwert bilden: <math>2y - 3 = \frac{1}{5}</math></p> <p>Mit <b>5</b> multiplizieren: <math>(2y - 3) \cdot 5 = 0,2 \cdot 5</math></p> <p>Mit <b>5</b> multipliziert: <math>10y - 15 = 1</math></p> <p><b>15</b> addieren: <math>10y - 15 + 15 = 1 + 15</math></p> <p><b>15</b> addiert: <math>10y = 16</math></p> <p><b>Lösung:</b> <math>y = 1,6</math></p>
Beispiel 3: Auflösen nach $z$	Beispiel 4: Auflösen nach $t$
<p><b>Ausgangsgleichung:</b> <math>\frac{5z^2}{4} = 80</math></p> <p>Mit <b>4/5</b> multiplizieren: <math>\frac{5z^2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{80 \cdot 4}{5}</math></p> <p>Mit <b>4/5</b> multipliziert: <math>z^2 = 64</math></p> <p>Wurzelziehen: <math>\sqrt{z^2} = \pm\sqrt{64}</math></p> <p><b>Lösung:</b> <math>z = \pm\sqrt{64} = \pm 8</math></p>	<p><b>Ausgangsgleichung:</b> <math>12 \cdot e^{-t/4} = 6</math></p> <p>Durch <b>12</b> geteilt: <math>e^{-t/4} = 0,5</math></p> <p>Logarithmiert: <math>-t/4 = +\ln 0,5</math></p> <p>Vorzeichen umgekehrt: <math>+t/4 = -\ln 0,5</math></p> <p><b>Lösung:</b> <math>t = -4 \cdot \ln 0,5 = 2,77</math></p>

## 1.6.2 Arbeiten mit Formeln

Formeln sind Gleichungen, die vorwiegend Formelzeichen, z.B.  $P$ ,  $U$  und  $R$ , enthalten. Sie erfassen den mathematischen Zusammenhang zwischen physikalischen Größen (**Beispiele**).

Für das Umstellen einer Formel und das Auflösen nach einer Größe (**Tabelle**) gelten dieselben Regeln wie für das Umformen und das Auflösen von Gleichungen (**Seite 17, Tabelle 2**).

Die gesuchte Größe muss bei der Lösung allein auf einer Seite stehen.

Beispiele für Formelzeichen:

Formelzeichen	physikalische Größe
$P$	Leistung
$U$	Spannung
$R$	Widerstand

**Tabelle: Umstellen und Auflösen von Formeln (Beispiele)**

Beispiel 1: Auflösen nach $U$	Beispiel 2: Auflösen nach $C$
<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>P = \frac{U^2}{R}</math></p> <p>Seiten vertauscht: <math>\frac{U^2}{R} = P</math></p> <p>Mit <math>R</math> multipliziert: <math>U^2 = P \cdot R</math></p> <p>Wurzel <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>U = \sqrt{P \cdot R}</math></p>	<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}</math></p> <p>Formel quadriert: <math>T^2 = 4\pi^2 \cdot L \cdot C</math></p> <p>Formel durch <math>4\pi^2 \cdot L</math> geteilt: <math>\frac{T^2}{4\pi^2 \cdot L} = C</math></p> <p>Seiten vertauscht <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>C = \frac{T^2}{4\pi^2 \cdot L}</math></p>
Beispiel 3: Auflösen nach $I$	Beispiel 4: Auflösen nach $b$
<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>U = U_0 - I \cdot R_i</math></p> <p><math>U_0</math> subtrahiert: <math>U - U_0 = -I \cdot R_i</math></p> <p>Seiten vertauschen: <math>-I \cdot R_i = U - U_0</math></p> <p>Vorzeichen umgekehrt: <math>I \cdot R_i = U_0 - U</math></p> <p>Durch <math>R_i</math> dividiert <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>I = \frac{U_0 - U}{R_i}</math></p>	<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>a = \sqrt{c^2 - b^2}</math></p> <p>Formel quadriert: <math>a^2 = c^2 - b^2</math></p> <p><math>b^2</math> addiert: <math>a^2 + b^2 = c^2</math></p> <p><math>a^2</math> subtrahiert: <math>b^2 = c^2 - a^2</math></p> <p>Wurzel <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>b = \sqrt{c^2 - a^2}</math></p>
Beispiel 5: Auflösen nach $R_1$	Beispiel 6: Auflösen nach $R_2$
<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}</math></p> <p><math>\frac{1}{R_2}</math> subtrahiert: <math>\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}</math></p> <p>Hauptnenner <math>R_2 \cdot R</math>: <math>\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{R_2 \cdot R}</math></p> <p>Kehrwert <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>R_1 = \frac{R_2 \cdot R}{R_2 - R}</math></p>	<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}</math></p> <p>Mit Nenner multipliziert: <math>R \cdot (R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_2</math></p> <p>Klammer auflösen: <math>R \cdot R_1 + R \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2</math></p> <p><math>R \cdot R_2</math> subtrahiert: <math>R \cdot R_1 = R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_2</math></p> <p>Seiten vertauschen: <math>R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_2 = R \cdot R_1</math></p> <p><math>R_2</math> ausklammern: <math>R_2 \cdot (R_1 - R) = R \cdot R_1</math></p> <p>Durch <math>(R_1 - R)</math> dividiert <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}</math></p>
Beispiel 7: Auflösen nach $U$	Beispiel 8: Auflösen nach $t$
<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>L_U = 20 \cdot \lg \frac{U}{U_0}</math></p> <p>Durch 20 dividiert: <math>\frac{L_U}{20} = \lg \frac{U}{U_0}</math></p> <p>Mit 10 potenziert: <math>10^{\frac{L_U}{20}} = \frac{U}{U_0}</math></p> <p>Mit <math>U_0</math> multipliziert: <math>U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}} = U</math></p> <p>Seiten vertauschen <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>U = U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}}</math></p>	<p><b>Ausgangsformel:</b> <math>u_c = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}</math></p> <p>Durch <math>U_0</math> dividiert: <math>\frac{u_c}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}</math></p> <p>Logarithmiert: <math>\ln \frac{u_c}{U_0} = -\frac{t}{\tau}</math></p> <p>Vorzeichen umgedreht: <math>-\ln \frac{u_c}{U_0} = \frac{t}{\tau}</math></p> <p>Mit <math>\tau</math> multipliziert: <math>-\tau \cdot \ln \frac{u_c}{U_0} = t</math></p> <p>Seiten vertauschen <math>\Rightarrow</math> <b>Lösung:</b> <math>t = -\tau \cdot \ln \frac{u_c}{U_0}</math></p>

## Aufgaben zu 1.6.1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach  $x$  bzw.  $y$  bzw.  $z$  auf, und machen Sie die Probe.

1. a)  $x + 17 = 44$ ;  $x - 5 = 27$     b)  $3x - 5 = 7$ ;  $7x + 3 = 17$     c)  $3 = 2x + 1$ ;  $2 = 5x + 17$
2. a)  $\frac{3y}{5} = 9$ ;  $\frac{5y}{13} = 15$     b)  $\frac{27y}{8} = \frac{45}{32}$ ;  $\frac{25}{12} = \frac{5y}{3}$     c)  $\frac{3}{5y} = \frac{2}{7}$ ;  $\frac{5}{2} = \frac{3}{4y}$
3. a)  $\frac{x+7}{2} = 5$ ;  $\frac{8-x}{3} = 2$     b)  $\frac{5x+4}{3} = 8$ ;  $\frac{5}{7+2x} = \frac{1}{7}$     c)  $\frac{5}{2} = \frac{6}{2x+3}$ ;  $\frac{3}{5} = \frac{5}{7-2x}$
4. a)  $\frac{3z^2}{2} = 24$ ;  $\frac{4z^2}{9} + 5 = 21$     b)  $\frac{13z^2}{5} = 65$ ;  $15 = \frac{4z^2}{3} - 12$     c)  $\frac{3z}{20} = \frac{9}{25z}$ ;  $\frac{21}{32z} = \frac{7z}{24}$
5. a)  $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{y} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$     b)  $\frac{1}{y} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15}$ ;  $\frac{1}{x} = \frac{5}{12} - \frac{3}{8}$     c)  $\frac{2}{z} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ ;  $\frac{11}{z} = \frac{3}{2} - \frac{2}{5}$
- d)  $\frac{1}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{10} = \frac{1}{x} + \frac{1}{5}$     e)  $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x}$ ;  $\frac{1}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$     f)  $\frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{3}{2x}$ ;  $\frac{5}{4} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5x}$
6. a)  $15 \cdot (12 - 5z) = 125 \cdot (4 - z)$     b)  $2,5 \cdot (z + 21) = 4,5 \cdot (7 - z)$     c)  $6,5 \cdot (z + 24) = 9,1 \cdot (18 - z)$
7. a)  $5 = \sqrt{x^2 + 9}$     b)  $8 = \sqrt{x^2 - 36}$     c)  $9 = \sqrt{17 + 4x^2}$     d)  $\sqrt{16 - 27x^2} = 2$
8. a)  $e^x = 50$ ;  $e^x = 5,0$     b)  $e^x = 2,0$ ;  $e^x = 0,2$     c)  $e^x = 10$ ;  $e^{2x} = 10$     d)  $e^{0,2x} = 8$ ;  $e^{0,4x} = 8$
9. a)  $e^{-x} = 4$ ;  $e^{-x} = 16$     b)  $e^{-x/2} = 3$ ;  $e^{-x/2} = 9$     c)  $2 = 4(1 - e^{-x/8})$     d)  $6,3 = 10(1 - e^{-x/3})$

## Aufgaben zu 1.6.2

Folgende Formeln sind umzuformen und aufzulösen:

1. a)  $P = F \cdot v$  nach  $v$ ;    b)  $M = F \cdot r$  nach  $F$ ;    c)  $W = P \cdot t$  nach  $P$ ;    d)  $U = R \cdot I$  nach  $R$ ;  
e)  $s = v \cdot t$  nach  $v$ ;    f)  $P = M \cdot \omega$  nach  $\omega$ ;    g)  $m = \varrho \cdot V$  nach  $\varrho$ ;    h)  $u = \pi \cdot d$  nach  $d$
2. a)  $V = l \cdot b \cdot h$  nach  $h$ ;    b)  $v = d \cdot \pi \cdot n$  nach  $n$ ;    c)  $U = v \cdot B \cdot l$  nach  $B$ ;    d)  $X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$  nach  $L$
3. a)  $U = U_1 + U_2$  nach  $U_2$ ;    b)  $U = U_0 - U_i$  nach  $U_0$ ;    c)  $\Delta t = t_1 - t_0$  nach  $t_0$ ;    d)  $R_v = R - R_i$  nach  $R_i$
4. a)  $I = \frac{Q}{t}$  nach  $Q$ ;    b)  $I = \frac{U}{R}$  nach  $U$ ;    c)  $\eta = \frac{P_2}{P_1}$  nach  $P_1$ ;    d)  $P = \frac{F \cdot s}{t}$  nach  $F$ ;  
e)  $R = \frac{l}{\gamma \cdot A}$  nach  $A$ ;    f)  $U = \frac{F \cdot s}{Q}$  nach  $Q$ ;    g)  $Q = \frac{\omega \cdot L}{R}$  nach  $R$ ;    h)  $\Delta U = \frac{2I \cdot l}{\gamma \cdot A}$  nach  $A$ ;
5. a)  $W = \frac{C \cdot U^2}{2}$  nach  $U$ ;    b)  $Q_{bL} = \frac{U^2}{\omega \cdot L}$  nach  $L$ ;    c)  $X = \frac{Q}{I^2}$  nach  $I$ ;    d)  $C = \frac{Q_{bc}}{\omega \cdot U^2}$  nach  $U$
6. a)  $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$  nach  $X_L$ ;    b)  $T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$  nach  $L$ ;    c)  $I_w = \sqrt{I^2 - I_{bL}^2}$  nach  $I_{bL}$
7. a)  $U = U_0 - I \cdot R_i$  nach  $R_i$ ;    b)  $R_v = (n - 1) \cdot R_m$  nach  $n$ ;    c)  $P = (F_2 - F_1) \cdot v$  nach  $F_1$
8. a)  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$  nach  $C_1$ ;    b)  $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$  nach  $R_1$ ;    c)  $\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  nach  $R_1$ ;  
d)  $R_p = \frac{R_m}{n - 1}$  nach  $R_m$ ;    e)  $R_i = \frac{U_0 - U}{I}$  nach  $U$ ;    f)  $R_1 = \frac{R_2 \cdot (U - U_{20})}{U_{20}}$  nach  $U$
9. a)  $u_c = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$  nach  $t$ ;    b)  $i_L = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$  nach  $\tau$ ;    c)  $i_L = I_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$  nach  $t$

### 1.6.3 Verhältnisgleichungen, Dreisatzrechnen

#### Beispiel 1:

Eine Leitung der Länge  $l_1 = 50$  m wiegt  $m_1 = 60$  kg.  
Berechnen Sie die Masse  $m_2$  von  $l_2 = 20$  m derselben Leitung.

**Überlegung:** Die doppelte Länge entspricht der doppelten Masse, die halbe Länge bedeutet die halbe Masse.

#### Folgerung:

- a) Die Masse ist der Länge direkt proportional:  $l \sim m$       b) Die Massen verhalten sich zueinander wie die Längen:  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_2}{l_1}$

#### Lösung nach a) mit Dreisatz:

50 m wiegen 60 kg  
1 m wiegt  $60 \text{ kg} / 50 = 1,2$  kg  
20 m wiegen  $1,2 \text{ kg} \cdot 20 = 24$  kg

#### Lösung nach b) mit Verhältnisgleichung:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow m_2 = \frac{l_2 \cdot m_1}{l_1} = 24 \text{ kg}$$

#### Beispiel 2:

Ein Kupferleiter mit dem Querschnitt  $A_1 = 6 \text{ mm}^2$  ist  $l_1 = 50$  m lang.  
Berechnen Sie die Länge  $l_2$  eines Leiters gleicher Masse mit Querschnitt  $A_2 = 4 \text{ mm}^2$ .

**Überlegung:** Doppelter Querschnitt bedeutet die halbe Länge, halber Querschnitt bedeutet die doppelte Länge.

#### Folgerung:

- a) Die Länge ist dem Querschnitt indirekt (umgekehrt) proportional:  $l \sim \frac{1}{A}$       b) Die Längen verhalten sich zueinander umgekehrt wie die Querschnitte:  $\frac{l_2}{l_1} = \frac{A_1}{A_2}$

#### Lösung nach a) mit Dreisatz:

$6 \text{ mm}^2 \Rightarrow 50$  m  
 $1 \text{ mm}^2 \Rightarrow 50 \text{ m} \cdot 60 = 300$  m  
 $4 \text{ mm}^2 \Rightarrow 300 \text{ m} / 4 = 75$  m

#### Lösung nach b) mit Verhältnisgleichung:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow l_2 = \frac{A_1 \cdot l_1}{A_2} = 75 \text{ m}$$

#### Aufgaben zu 1.6.3

- Der Preis für 25 Gerätesicherungen beträgt 12 €. Wieviel kosten 6 gleiche Gerätesicherungen?
- 50 m PVC-isolierte Kupferleitung wiegen 2,25 kg. Wieviel m sind in einer Rolle von 1,44 kg noch enthalten?
- Ein Akkumulator kann 5 Meldeleuchten 240 Stunden lang betreiben. Welche Betriebsdauer wäre mit diesem Akkumulator bei 3 derartigen Meldeleuchten möglich?

### 1.6.4 Verhältnisgleichungen, Prozentrechnen

#### Beispiel:

Ein Elektromotor nimmt die Leistung  $P_1 = 5,0$  kW aus dem Netz auf und gibt die Leistung  $P_2 = 4,0$  kW an der Welle ab.  
Wie viel der zugeführten Leistung werden an der Welle abgegeben?

**Überlegung:**  $P_1$  ist der Grundwert  $G$ . Er entspricht 100%.  $P_2$  ist der Prozentwert  $W$ . Er entspricht dem Prozentsatz  $p$ .

#### Folgerung:

- a) Der Prozentsatz  $p$  ist dem Prozentwert  $W$  direkt proportional:  $p \sim W$       b)  $p$  verhält sich zu 100% wie  $W$  zu  $G$ :  $\frac{p}{100\%} = \frac{W}{G}$

#### Lösung nach a) mit Dreisatz:

5,0 kW  $\Rightarrow$  100%  
1,0 kW  $\Rightarrow$   $100\% / 5 = 20\%$   
4,0 kW  $\Rightarrow$   $20\% \cdot 4 = 80\%$

#### Lösung nach b) mit Verhältnisgleichung:

$$\frac{p}{100\%} = \frac{W}{G} \Rightarrow p = \frac{W}{G} \cdot 100\% = \frac{4,0 \text{ kW}}{5,0 \text{ kW}} \cdot 100\% = 80\%$$

#### Aufgaben zu 1.6.4

- Für eine Deckenleuchte müssen 54 € bezahlt werden, nachdem die unverbindliche Preisempfehlung um 25% unterschritten wurde. Wie hoch ist der empfohlene Preis?
- Der Messbereichs-Endwert eines Spannungsmessers ist 400 Volt. Der zulässige Anzeigefehler beträgt  $\pm 2,5\%$  dieses Wertes. Berechnen Sie den positiven und negativen Anzeigefehler in Volt.
- Die Entladekapazität eines Bleiakkumulators beträgt 84 Amperestunden. Das sind 80% der Ladekapazität. Wie viele Amperestunden sind zur Aufladung dieses Akkumulators erforderlich?