W.I. Smirnow

Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil III/2

Verlag Harri Deutsch

W. I. SMIRNOW

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL III/2

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I
unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 2004, 449 Seiten, 190 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1297-5 (ISBN-10 3-8171-1297-1)
Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II
unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 2005, 618 Seiten, 136 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1298-2 (ISBN-10 3-8171-1298-X)
Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache und Kurvenintegrale. Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1
unveränderter Nachdruck der 12. Aufl. 1991, 2006, 283 Seiten, 3 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1299-9 (ISBN-10 3-8171-1299-8)
Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2
unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 2006, 599 Seiten, 85 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1300-2 (ISBN-10 3-8171-1300-5)
Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1
unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 2004, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1301-9 (ISBN-10 3-8171-1301-3)
Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume. Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 2006, 469 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1302-6 (ISBN-10 3-8171-1302-1)
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V
unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 2005, 545 Seiten, 3 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1303-3 (ISBN-10 3-8171-1303-X)
Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik
ISBN-13 978-3-8171-1419-1 (ISBN-10 3-8171-1419-2)

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

VON

W. I. SMIRNOW
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

TEIL III/2

Verlag
Harri
Deutsch

Titel der Originalausgabe

В.И. Смирнов
Курс высшей математики, Том 3, Часть 2
Москва-Ленинград 1949

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind
im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN-10 3-8171-1300-5
ISBN-13 978-3-8171-1300-2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus –, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.
Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Bearbeiter und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 2006
© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 1987, 2006
Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt

Printed in Germany

Geleitwort des Verlages

Der Verlag Harri Deutsch hat zu erheblichen Teilen die Tradition übernommen, wichtige Titel des mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereichs russischer Autoren in deutscher Sprache weiterzuführen oder neu zu erschließen. So werden wir auch dieses schon klassisch gewordene Lehrbuch der höheren Mathematik weiter komplett lieferbar halten. Für Hinweise auf Druckfehler und Verbesserungs- oder Ergänzungsvorschläge der Benutzer sind wir stets dankbar und erbitten diese an:

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
E-Mail: verlag@harri-deutsch.de
http://www.harri-deutsch.de/verlag/

INHALTSVERZEICHNIS

Kap. I. Anfangsgründe der Funktionentheorie

1. Funktionen einer komplexen Veränderlichen 1
2. Ableitungen 6
3. Konforme Abbildung 10
4. Das Integral 13
5. Der CAUCHYsche Integralsatz 15
6. Die fundamentalen Formeln der Integralrechnung 18
7. Die CAUCHYsche Integralformel 20
8. Integrale vom CAUCHYschen Typ 25
9. Folgerungen aus der CAUCHYschen Formel 27
10. Isolierte singuläre Punkte 29
11. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern 31
12. Satz von WEIERSTRASS 33
13. Potenzreihen 36
14. Die TAYLORsche Reihe 37
15. LAURENTsche Reihen 40
16. Einige Beispiele 43
17. Isolierte singuläre Punkte. Der unendlich ferne Punkt 47
18. Analytische Fortsetzung 50
19. Beispiele mehrdeutiger Funktionen 56
20. Singuläre Punkte analytischer Funktionen und RIEMANNsche Flächen 63
21. Der Residuensatz 66
22. Sätze über die Anzahl der Nullstellen 69
23. Umkehrung von Potenzreihen 72
24. Das Spiegelungsprinzip 75
25. TAYLORsche Reihen auf dem Rande des Konvergenzkreises 78
26. Der Hauptwert eines Integrals 80
27. Der Hauptwert eines Integrals (Fortsetzung) 84
28. CAUCHYsche Integrale 88

Kap. II. Konforme Abbildung und ebene Felder

29. Konforme Abbildung 95
30. Die lineare Abbildung 98
31. Die allgemeine lineare Abbildung 99
32. Die Funktion $w = z^2$ 107
33. Die Funktion $w = \frac{k}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 108
34. Zweieck und Streifen 111
35. Hauptsatz der Theorie der konformen Abbildung 113
36. Die CHRISTOFFELsche Formel 115
37. Einige Spezialfälle 122
38. Das Äußere eines Vielecks 125

39. Minimaleigenschaft der Abbildung auf den Kreis ... 127
40. Das Verfahren der konjugierten trigonometrischen Reihen ... 130
41. Die stationäre ebene Flüssigkeitsströmung ... 137
42. Beispiele ... 139
43. Das Problem der Umströmung ... 142
44. Die Formel von JOUKOWSKI ... 143
45. Das ebene elektrostatische Problem ... 145
46. Beispiele ... 147
47. Das ebene Magnetfeld ... 151
48. Die SCHWARZsche Formel ... 151
49. Der Kern $\operatorname{ctg}\frac{t-t}{2}$ ... 154
50. Randwertprobleme ... 157
51. Die biharmonische Gleichung ... 161
52. Die Wellengleichung und analytische Funktionen ... 164
53. Hauptsatz ... 166
54. Beugung ebener Wellen ... 171
55. Reflexion von elastischen Wellen an geradlinigen Begrenzungen ... 175

Kap. III. Anwendung der Residuentheorie; ganze und gebrochene Funktionen

56. Das FRESNELsche Integral ... 181
57. Integration von Ausdrücken mit trigonometrischen Funktionen ... 183
58. Die Integration einer rationalen Funktion ... 184
59. Einige neue Integraltypen mit trigonometrischen Funktionen ... 186
60. Lemma von JORDAN ... 189
61. Darstellung einiger Funktionen durch Kurvenintegrale ... 190
62. Beispiele von Integralen mehrdeutiger Funktionen ... 194
63. Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ... 198
64. Partialbruchzerlegung einer meromorphen Funktion ... 202
65. Die Funktion ctg z ... 205
66. Die Konstruktion meromorpher Funktionen ... 208
67. Ganze Funktionen ... 209
68. Unendliche Produkte ... 211
69. Konstruktion einer ganzen Funktion aus ihren Nullstellen ... 214
70. Integrale, die von einem Parameter abhängen ... 217
71. Die Integraldarstellung der Gammafunktion ... 219
72. Die EULERsche Betafunktion ... 223
73. Das unendliche Produkt für die Funktion $[\Gamma(z)]^{-1}$ ... 225
74. Darstellung von $\Gamma(z)$ durch ein Kurvenintegral ... 230
75. Die STIRLINGsche Formel ... 232
76. Die EULERsche Summenformel ... 237
77. Die BERNOULLIschen Zahlen ... 240
78. Die Methode des größten Gefälles ... 242
79. Abtrennung des Hauptbestandteiles eines Integrals ... 244
80. Beispiele ... 250

Kap. IV. Funktionen mehrerer Veränderlicher und Funktionen von Matrizen

81. Reguläre Funktionen mehrerer Veränderlicher ... 259
82. Das Doppelintegral und die CAUCHYsche Formel ... 259
83. Potenzreihen ... 261
84. Analytische Fortsetzung ... 266

85. Funktionen von Matrizen. Einführende Begriffe ... 268
86. Potenzreihen einer Matrix ... 269
87. Multiplikation von Potenzreihen. Umkehrung von Potenzreihen ... 272
88. Weitere Konvergenzuntersuchungen ... 275
89. Interpolation von Polynomen ... 278
90. Die CAYLEYsche Identität und die SYLVESTERsche Formel ... 280
91. Analytische Fortsetzung ... 282
92. Beispiele mehrdeutiger Funktionen ... 284
93. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ... 287
94. Funktionen mehrerer Matrizen ... 292

Kap. V. Lineare Differentialgleichungen

95. Entwicklung von Lösungen in Potenzreihen ... 295
96. Analytische Fortsetzung einer Lösung ... 299
97. Die Umgebung eines singulären Punktes ... 300
98. Außerwesentlich singuläre Punkte ... 304
99. Differentialgleichungen der FUCHSschen Klasse ... 311
100. Die GAUSSsche Differentialgleichung ... 314
101. Die hypergeometrische Reihe ... 316
102. Die LEGENDREschen Polynome ... 320
103. Die JACOBIschen Polynome ... 326
104. Konforme Abbildung und GAUSSsche Differentialgleichung ... 330
105. Wesentlich singuläre Punkte ... 334
106. Asymptotische Entwicklungen ... 337
107. Die LAPLACE-Transformation ... 340
108. Verschiedene Wahl der Lösung ... 342
109. Asymptotische Darstellung einer Lösung ... 346
110. Vergleich der erhaltenen Resultate ... 350
111. Die BESSELsche Differentialgleichung ... 351
112. Die HANKELschen Funktionen ... 355
113. Die BESSELschen Funktionen ... 359
114. Die LAPLACE-Transformation in allgemeineren Fällen ... 360
115. Die verallgemeinerten LAGUERREschen Polynome ... 362
116. Positive Parameterwerte ... 365
117. Eine Entartung der GAUSSschen Differentialgleichung ... 367
118. Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten ... 369
119. Analytische Koeffizienten ... 375
120. Systeme linearer Differentialgleichungen ... 376
121. Außerwesentlich singuläre Punkte ... 378
122. Reguläre Differentialgleichungssysteme ... 381
123. Darstellung einer Lösung in der Umgebung eines singulären Punktes ... 387
124. Kanonische Lösungen ... 390
125. Der Zusammenhang mit den regulären Lösungen vom FUCHSschen Typ ... 393
126. Der Fall beliebiger U_s ... 394
127. Die Entwicklung in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes ... 397
128. Entwicklungen in gleichmäßig konvergente Reihen ... 404

Kap. VI. Spezielle Funktionen der mathematischen Physik

§ 1. Kugelfunktionen und LEGENDREsche Funktionen ... 411

129. Definition der Kugelfunktionen ... 411
130. Explizite Ausdrücke der Kugelfunktionen ... 413

131. Die Orthogonalität ... 416
132. Die LEGENDREschen Polynome ... 420
133. Die Entwicklung nach Kugelfunktionen ... 424
134. Der Konvergenzbeweis ... 427
135. Der Zusammenhang zwischen Kugelfunktionen und Randwertproblemen ... 429
136. Das DIRICHLETsche und NEUMANNsche Problem ... 431
137. Das Potential räumlich verteilter Massen ... 434
138. Das Potential einer Kugelschicht ... 435
139. Das Elektron im Zentralfeld ... 438
140. Kugelfunktionen und lineare Darstellungen der Drehungsgruppe ... 440
141. Die LEGENDREschen Funktionen ... 442
142. Die LEGENDREschen Funktionen zweiter Art ... 444

§ 2. Die BESSELschen Funktionen ... 448

143. Definition der BESSELschen Funktionen ... 448
144. Relationen zwischen den BESSELschen Funktionen ... 450
145. Die Orthogonalität der BESSELschen Funktionen und ihre Nullstellen ... 453
146. Erzeugende Funktion und Integraldarstellung ... 457
147. Die Formel von FOURIER-BESSEL ... 460
148. Die HANKELschen und die NEUMANNschen Funktionen ... 461
149. Entwicklung der NEUMANNschen Funktionen mit ganzem Index ... 466
150. Der Fall eines rein imaginären Argumentes ... 468
151. Integraldarstellungen ... 470
152. Asymptotische Darstellungen der HANKELschen Funktionen ... 472
153. Die BESSELschen Funktionen und die LAPLACEsche Differentialgleichung ... 480
154. Die Wellengleichung in Zylinderkoordinaten ... 482
155. Die Wellengleichung in Kugelkoordinaten ... 485

§ 3. Die HERMITEschen und LAGUERREschen Polynome ... 488

156. Der lineare Oszillator und die HERMITEschen Polynome ... 488
157. Die Orthogonalitätseigenschaft ... 491
158. Die erzeugende Funktion ... 492
159. Parabolische Koordinaten und die HERMITEschen Funktionen ... 494
160. Die LAGUERREschen Polynome ... 496
161. Der Zusammenhang zwischen LAGUERREschen und HERMITEschen Polynomen ... 499
162. Asymptotische Darstellung der HERMITEschen Polynome ... 500
163. Asymptotische Darstellung der LEGENDREschen Polynome ... 503

§ 4. Elliptische Integrale und elliptische Funktionen ... 506

164. Zurückführung elliptischer Integrale auf Normalform ... 506
165. Reduktion von Integralen auf trigonometrische Form ... 509
166. Beispiele ... 512
167. Umkehrfunktionen elliptischer Integrale ... 515
168. Allgemeine Eigenschaften elliptischer Funktionen ... 518
169. Ein Hilfssatz ... 522
170. Die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion ... 523
171. Die Differentialgleichung für $\wp(u)$ ... 527
172. Die Funktionen $\sigma_k(u)$ ... 530
173. Reihenentwicklung einer ganzen periodischen Funktion ... 532
174. Neue Bezeichnungen ... 534

175. Die Funktion $\vartheta_1(v)$ 535
176. Die Funktionen $\vartheta_k(v)$ 538
177. Eigenschaften der Thetafunktionen 541
178. Darstellung der Zahlen e_k durch die ϑ_s 543
179. Die JACOBIschen elliptischen Funktionen 545
180. Die Haupteigenschaften der JACOBIschen Funktionen 547
181. Die Differentialgleichungen für die JACOBIschen Funktionen 549
182. Die Additionstheoreme 550
183. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen $\wp(u)$ und $\mathrm{sn}(u)$ 551
184. Elliptische Koordinaten 553
185. Einführung elliptischer Funktionen 555
186. Die LAMÉsche Differentialgleichung 556
187. Das einfache Pendel 558
188. Beispiel einer konformen Abbildung 560

Anhang

Reduktion von Matrizen auf kanonische Form 563

189. Hilfssätze 563
190. Einfache Eigenwerte 568
191. Der erste Transformationsschritt bei mehrfachen Eigenwerten 569
192. Reduktion auf kanonische Form 573
193. Bestimmung der Struktur einer kanonischen Form 578
194. Beispiel 581

Literaturhinweise der Herausgeber 587

Sachverzeichnis 594

I. Anfangsgründe der Funktionentheorie

1. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Bei der Behandlung der Differential- und Integralrechnung haben wir vorausgesetzt, daß sowohl die unabhängigen Variablen als auch die Funktionen nur reelle Werte annehmen. Bei der Darlegung der höheren Algebra haben wir nur die einfachsten Funktionen – die Polynome – auch für komplexe Werte der unabhängigen Variablen betrachtet. Das Ziel des folgenden Kapitels ist nun die Ausdehnung der Elemente der Analysis auf Funktionen einer komplexen Variablen.

Betrachten wir z. B. das Polynom

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

wobei die a_k gegebene komplexe Zahlen sind. Wir wollen annehmen, daß auch die unabhängige Variable z beliebige komplexe Werte durchläuft; dann ist $f(z)$ für beliebige komplexe Werte z definiert. Das gleiche gilt für rationale Funktionen (soweit der Nenner von Null verschieden ist)

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}$$

oder selbst für Ausdrücke mit Radikalen, wie z. B.

$$\sqrt{z-1}.$$

Im Kapitel VI des ersten Teiles haben wir die elementaren transzendenten Funktionen für komplexe Werte der unabhängigen Variablen angegeben. Für die Exponentialfunktion gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Mit Hilfe dieser Definition von e^z lassen sich die trigonometrischen Funktionen für komplexe Werte des Argumentes definieren:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \\ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \\ \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{1}{i} \dfrac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1}; \\ \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = i \dfrac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}. \end{cases}$$

Für den natürlichen Logarithmus einer komplexen Zahl hatten wir den Ausdruck

$$(2) \qquad \log z = \log |z| + i \arg z,$$

wobei $|z|$ der Absolutbetrag ist und $\arg z$ das Argument der Veränderlichen z

bezeichnet. Betrachten wir die zu (1) inversen Funktionen, so kommen wir zu den Umkehrungen der Kreisfunktionen einer komplexen Variablen:

$$\operatorname{arc}\sin z,\ \operatorname{arc}\cos z,\ \operatorname{arc}\operatorname{tg} z,\ \operatorname{arc}\operatorname{ctg} z.$$

Man zeigt mühelos, daß diese Funktionen durch Logarithmen ausgedrückt werden können. Nehmen wir z. B.

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{e^{i2w}-1}{i\,(e^{i2w}+1)},$$

so gilt

$$i\,(e^{i2w}+1)\,z = e^{i2w}-1$$

oder

$$e^{i2w} = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit i und logarithmiert, so erhält man

$$w = \operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}.$$

Entsprechend bekommt man, ausgehend von

$$z = \sin w = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},$$

eine quadratische Gleichung in e^{iw}:

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0;$$

dann gilt

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

und folglich

$$w = \operatorname{arc}\sin z = \frac{1}{i}\log\,(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

wobei man beide Werte der Quadratwurzel berücksichtigen muß.

Weiter werden wir sehen: Alle oben genannten elementaren Funktionen besitzen als Funktionen einer komplexen Veränderlichen eine Ableitung, d. h., für sie existiert ein endlicher Grenzwert des Quotienten

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

wenn die komplexe Größe Δz gegen Null strebt. In diesem ersten Kapitel entwickeln wir die Anfangsgründe der Theorie der differenzierbaren Funktionen einer komplexen Variablen. Wir werden sehen, daß sich diese Theorie einerseits durch außerordentlich große Klarheit und Einfachheit auszeichnet und andererseits breite Anwendungen in vielen Gebieten der Naturwissenschaft und Technik hat. In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Abriß der Theorie selbst. Den Anwendungen sind die folgenden Kapitel gewidmet. Wir hoffen, auf diesem Wege eine *klarere* und *vollständigere* Darstellung der theoretischen Grundlagen zu erreichen.

Im folgenden werden wir sehr oft von der geometrischen Deutung der komplexen Zahlen Gebrauch machen, die wir schon in [**I, 170**] besprochen haben.

Wir erinnern kurz an die grundlegenden Ideen dieser Interpretation: Führt man in der Ebene geradlinig-rechtwinklige Achsen OX, OY ein, so kann man entweder jedem Punkt dieser Ebene zwei reelle Koordinaten x, y oder eine komplexe Ko-

ordinate $x + iy$ zuordnen, wie wir es hernach auch tun werden. Die Ebene heißt in diesem Sinne Ebene der komplexen Veränderlichen (kurz: komplexe Ebene), die X-Achse die reelle und die Y-Achse die imaginäre Achse. Außer dieser Punktdarstellung der komplexen Zahlen werden wir in den folgenden Kapiteln hauptsächlich die Vektordarstellung benutzen, und zwar ordnen wir der komplexen Zahl $x + iy$ den Vektor zu, dessen Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen gleich x bzw. y sind. Der Zusammenhang der beiden Darstellungen ist unmittelbar klar; es gilt nämlich folgendes: Dem Vektor, der vom Koordinatenursprung zum Punkt mit der komplexen Koordinate $x + iy$ führt, entspricht eben diese komplexe Zahl $x + iy$. Liegt ferner in unserer Ebene ein Vektor, dessen Anfangspunkt der Punkt A mit der Koordinate $a_1 + ia_2$ und dessen Endpunkt der Punkt B mit der Koordinate $b_1 + ib_2$ ist, so entspricht diesem Vektor $\overrightarrow{AB}$ die komplexe Zahl, die gleich der Differenz der Koordinaten des End- und des Anfangspunktes ist:

$$(b_1 - a_1) + i\,(b_2 - a_2)\,.$$

Wir erinnern an einige früher behandelte Resultate [**I, 171** und **172**]:

Der Addition der komplexen Zahlen entspricht die geometrische Addition der diesen Zahlen entsprechenden Vektoren. Der absolute Betrag einer komplexen Zahl ist gleich der Länge des zugeordneten Vektors und das Argument gleich dem Winkel, den der Vektor mit der X-Achse bildet. Ändert sich die komplexe Variable z, so bewegt sich der entsprechende Punkt in der Ebene.

Wir wollen sagen, daß $z = x + iy$ gegen den Grenzwert $\alpha = a + ib$ strebt, wobei a und b reelle Konstanten sind, wenn der Betrag der Differenz

$$|\alpha - z| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

gegen Null strebt. Aus der angegebenen Relation folgt unmittelbar, da ja unter der Wurzel eine nicht-negative Summe steht, daß $|\alpha - z| \to 0$ gleichbedeutend mit

$$x \to a \quad \text{und} \quad y \to b$$

ist. Folglich ist

$$x + iy \to a + ib$$

gleichbedeutend mit

$$x \to a \quad \text{und} \quad y \to b\,.$$

Dabei strebt offensichtlich der veränderliche Punkt M, dem die Zahl $z = x + iy$ entspricht, gegen den Punkt A mit der Koordinate $\alpha = a + ib$ als Grenzlage. Wie man mühelos zeigt, gelten für komplexe Veränderliche die üblichen Sätze über Summen, Produkte und Quotienten von Grenzwerten; damit werden wir uns aber nicht aufhalten.

Wir merken noch an, daß aus der Definition des Grenzwertes folgt, daß $z \to 0$ gleichbedeutend mit $|z| \to 0$ ist. Ferner gilt bei $z \to \alpha$ offenbar $|z| \to |\alpha|$. Für komplexe Variable gilt auch das Cauchysche Kriterium für die Existenz des Grenzwertes. Sei z. B. eine abzählbare Folge von komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1\,; \\ z_2 &= x_2 + iy_2\,; \\ &\cdots\cdots\cdots\,; \\ z_n &= x_n + iy_n\,; \\ &\cdots\cdots\cdots\,. \end{aligned}$$

vorgegeben. Die Existenz eines Grenzwertes z dieser Folge ist gleichbedeutend mit derjenigen der Grenzwerte x und y der reellen Folgen x_n und y_n; für die Existenz dieser Grenzwerte ist aber notwendig und hinreichend, daß die absoluten Beträge der Differenzen $|x_n - x_m|$ und $|y_n - y_m|$ für genügend große n und m beliebig klein werden [**I, 31**]. Berücksichtigt man

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

und die Tatsache, daß unter der Wurzel eine nicht-negative Summe steht, so sieht man, daß für die Existenz eines Grenzwertes der Folge z_n notwendig und hinreichend ist, daß für alle hinreichend großen n und m die Zahl $|z_n - z_m|$ beliebig klein gemacht werden kann. Genau gesagt, heißt das: Zu beliebig vorgegebenem positivem ε existiert ein N derart, daß $|z_n - z_m| < \varepsilon$ ist, wenn nur n und m größer als N sind. Auch für den allgemeinen Fall einer komplexen Variablen bleibt alles gültig, was wir am Anfang des Abschnittes [**25**] von Teil I über reelle Variable gesagt haben. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Grenzwertes der komplexen Variablen z ist die folgende [**I, 31**]: Es gibt zu beliebig vorgegebenem positivem ε einen Wert der Variablen z derart, daß $|z' - z''| < \varepsilon$ ist, sobald z' und z'' zwei beliebige Werte sind, die auf diesen Wert von z folgen[1]). Weiter werden wir sagen, daß die komplexe Variable z gegen Unendlich strebt, wenn $|z| \to +\infty$ gilt.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung von Funktionen einer komplexen Variablen,

$$w = f(z),$$

über und treffen einige terminologische Verabredungen. Die Funktion $f(z)$ kann entweder in der ganzen Ebene oder nur in einem gewissen Bereich der komplexen Ebene definiert sein, z. B. innerhalb eines Kreises oder Rechtecks oder Ringes usw. Bei allen diesen Bereichen unterscheiden wir zwischen ihren inneren und ihren Randpunkten. So sind z. B. bei einem Kreise mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius 1 die inneren Punkte durch die Bedingungen

$$|z| < 1 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 < 1$$

charakterisiert, und der Rand ist der Kreis

$$|z| = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Die charakteristische Eigenschaft der inneren Punkte ist, daß es zu ihnen stets eine gewisse Umgebung gibt, die auch noch ganz dem Bereich angehört, d. h., ein Punkt M ist innerer Punkt eines Bereichs, wenn dieser einen hinreichend kleinen Kreis um M ganz enthält. Die Randpunkte sind keine inneren Punkte des Bereichs, aber in jeder beliebig kleinen Umgebung eines Randpunktes liegen innere Punkte. Außerdem werden wir annehmen, daß unser Bereich nicht in getrennte Stücke zerfällt, oder, anders ausgedrückt, wir werden voraussetzen, daß je zwei beliebige Punkte des Bereichs durch einen ganz in seinem Innern verlaufenden Weg verbindbar sind. Im folgenden verstehen wir unter *Gebiet* nur *die Gesamtheit der inneren Punkte* eines Bereichs. Wenn zum Gebiet auch der Rand hinzugenommen wird, so sprechen wir von einem *abgeschlossenen Bereich*. Ferner heißt ein Gebiet *beschränkt*, wenn der Abstand jedes seiner Punkte vom Nullpunkt unterhalb einer festen endlichen Grenze liegt. Später geben wir noch eine schärfere Definition des Begriffes „Gebiet".

[1]) Hier wird die Veränderliche ε als Funktion eines Parameters aufgefaßt, der eine geordnete Menge durchläuft; auf deren Ordnung bezieht sich das „folgen" (Anm. d. Red.).

Wir kehren nun zur Betrachtung der Funktion $w = f(z)$ zurück und nehmen an, diese sei im Innern eines gewissen Bereiches B definiert, d. h., in allen Punkten z, die in B liegen, nehme $f(z)$ bestimmte komplexe Werte an (wir sprechen von eindeutigen Funktionen). Sei z_0 ein (innerer) Punkt von B. Die Funktion $f(z)$ heißt im Punkt z_0 stetig, wenn $f(z) \to f(z_0)$ für $z \to z_0$ gilt, d. h. zu beliebig vorgegebenem positivem ε ein positives η derart existiert, daß $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ist, wenn nur $|z - z_0| < \eta$ gilt. Eine Funktion heißt stetig in B, wenn sie in allen Punkten von B stetig ist. Es kann sein, daß die Funktion $f(z)$ nicht nur im Innern von B, sondern auch auf der Begrenzung l des Gebietes, d. h. im abgeschlossenen Bereich B definiert ist. Wir sagen dann, diese Funktion sei im abgeschlossenen Bereich stetig, wenn sie in jedem Punkt von B stetig ist. Bei der Definition der Stetigkeit in irgendeinem Punkt z_0 des Randes l muß man beachten, daß der Punkt z auf beliebige Weise gegen z_0 streben kann, dabei aber den abgeschlossenen Bereich B nicht verlassen darf. Ebenso wie im Reellen gilt der Satz [**I**, **43**]: Ist $f(z)$ in einem beschränkten abgeschlossenen Bereich stetig, so ist $f(z)$ in diesem Bereich gleichmäßig stetig, d. h., zu beliebig vorgegebenem positivem ε existiert ein positives η derart, daß $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ ist, wenn nur $|z_1 - z_2| < \eta$ gilt und z_1 und z_2 in diesem abgeschlossenen Bereich liegen. Wir zerlegen jetzt z und $w = f(z)$ in Real- und Imaginärteil und schreiben

$$z = x + iy;$$
$$w = f(z) = u + iv.$$

Die Vorgabe von z ist gleichbedeutend mit der von x und y, und die Vorgabe von $f(z)$ mit der von u und v, d. h., wir können u und v als Funktionen von x und y auffassen:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{3}$$

Bei den elementaren Funktionen kann man diese Zerlegung in Real- und Imaginärteil mit Hilfe einfacher Operationen ausführen, z. B.

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy.$$

Sei $z_0 = x_0 + iy_0$; dann ist die Bedingung $z \to z_0$ gleichbedeutend mit $x \to x_0$ und $y \to y_0$.

Aus der Definition der Stetigkeit im Punkte z_0 folgt, daß für $z \to z_0$

$$f(z) \to f(z_0)$$

oder

$$u(x, y) + iv(x, y) \to u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

gelten muß, was gleichbedeutend mit

$$u(x, y) \to u(x_0, y_0)$$

und

$$v(x, y) \to v(x_0, y_0)$$

ist. Folglich ist die Stetigkeit von $f(z)$ im Punkte z_0 gleichbedeutend mit der Stetigkeit von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ im Punkte (x_0, y_0).

Trennt man Real- und Imaginärteil und benutzt die Stetigkeit der elementaren Funktionen reeller Variabler, so überzeugt man sich davon, daß Polynome und die Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$ in der ganzen komplexen Ebene stetig sind.

Eine rationale Funktion ist überall stetig bis auf die Punkte z, für die ihr Nenner verschwindet. Ebenso ist tg z überall stetig bis auf die Punkte z, in denen cos z Null wird. Wie im Reellen sind Summe und Produkt endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetige Funktionen. Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist bis auf die Werte z stetig, für die der Nenner Null wird.

Wir beschäftigen uns zunächst mit eindeutigen Funktionen, später behandeln wir auch mehrdeutige. Beispiele für letztere sind $\sqrt{z-1}$, die Funktion (2) und die Umkehrungen der Kreisfunktionen.

2. Ableitungen. Sei $f(z)$ im Punkte z und in allen Punkten, die genügend nahe bei z liegen, definiert. Als Ableitung $f'(z)$ im Punkte z definiert man den Grenzwert

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{4}$$

Dabei muß dieser endlich und stets derselbe sein, wie auch der komplexe Zuwachs Δz gegen Null streben mag.

Man zeigt ebenso mühelos wie bei einer reellen Variablen, daß ein konstanter Faktor vor das Ableitungszeichen gezogen werden darf und daß die üblichen Differentiationsregeln für Summen, Produkte und Quotienten [**I**, **47**] gelten. Außerdem beweist man leicht [**I**, **47**], indem man den binomischen Satz anwendet, die übliche Regel für die Differentiation der Potenzfunktion für positive ganze Exponenten:

$$(z^n)' = n\, z^{n-1}. \tag{5}$$

Daher können wir behaupten, daß ein Polynom in jedem beliebigen Punkt z eine Ableitung besitzt. Ebenso haben die rationalen Funktionen überall eine Ableitung bis auf diejenigen Werte z, für die der Nenner Null wird.

Ferner gilt die übliche Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen:

$$\frac{d}{dz} F(w) = \frac{d}{dw} F(w) \frac{dw}{dz}, \tag{6}$$

wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß die beiden auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ableitungen existieren. Wie im Reellen folgt aus der Existenz der Ableitung in einem gewissen Punkt auch die Stetigkeit von $f(z)$ in diesem Punkt.

Die Funktion $f(z)$ sei in einem gewissen Bereich B definiert und besitze in jedem inneren Punkt von B eine Ableitung. Man sagt dann, $f(z)$ sei innerhalb des Gebietes B differenzierbar. Die Ableitung $f'(z)$ ist innerhalb B ebenfalls eine eindeutige Funktion.

Wir führen eine wichtige Definition ein: Eine Funktion $f(z)$ heißt *regulär* (oder *holomorph*) innerhalb B, wenn sie dort eindeutig ist und eine stetige Ableitung $f'(z)$ hat. Wir bemerken zunächst, daß aus der Existenz der Ableitung auch die Stetigkeit von $f(z)$ in B folgt. Zuweilen sagt man, $f(z)$ sei im Punkte z_0 regulär. Das bedeutet, daß $f(z)$ innerhalb eines gewissen Gebietes, das den Punkt z_0 im Innern enthält, regulär ist.

Wir greifen nun auf Formel (3) zurück, in welcher Real- und Imaginärteil sowohl bei z als auch bei der Funktion $f(z)$ getrennt sind, und stellen folgende Frage: Welche Bedingungen müssen die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ erfüllen, damit $f(z)$ innerhalb des Gebietes B regulär ist? Wir nehmen zunächst an, $f(z)$ sei innerhalb B regulär, und ziehen daraus Schlüsse auf $u(x, y)$ und $v(x, y)$.

Wie wir schon früher bei der Definition der Ableitung, deren Existenz wir voraussetzen, erwähnten, können wir den Zuwachs $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ auf beliebige Weise gegen Null streben lassen. Wir zeichnen in B einen gewissen Punkt M mit der Koordinate $z = x + iy$ und einen variablen Punkt N mit der Koordinate $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i\,(y + \Delta y)$ aus, wobei N gegen M streben möge.

Dann betrachten wir speziell zwei Fälle, in denen wir N gegen M, d. h. Δz gegen Null streben lassen.

Zuerst möge N auf einer zur x-Achse parallelen Geraden gegen M gehen, d. h.

$$\Delta y = 0 \quad \text{und} \quad \Delta z = \Delta x \tag{7}$$

gelten.

Dann möge N auf einer zur y-Achse parallelen Geraden gegen M streben; dabei gilt

$$\Delta x = 0 \quad \text{und} \quad \Delta z = i\Delta y\,. \tag{8}$$

Nun bilden wir die Ableitung $f'(z)$. Allgemein gilt

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \tag{9}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i\,[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}\,.$$

Daher erhalten wir für den ersten Fall

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\,\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}\right].$$

Daraus ersieht man, daß Real- und Imaginärteil auf der rechten Seite der Gleichung Grenzwerte haben, d. h. die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ partielle Ableitungen nach x besitzen müssen, und daß die Beziehung

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \tag{10}$$

gilt.

Entsprechend bekommen wir für den zweiten Fall gemäß (8) und (9) die Gleichungen

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{i}\left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + i\,\frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}\right]$$

oder

$$f'(z) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\,. \tag{11}$$

Vergleichen wir die Ausdrücke (10) und (11) für $f'(z)$, so erhalten wir die Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\,, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

denen die partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ genügen müssen.

Aus der Stetigkeit von $f'(z)$ folgt auf Grund von (10) und (11) die Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$. Die vorhergehenden Betrachtungen führen uns zu dem Ergebnis: Für die Regularität von $f(z)$ innerhalb B ist notwendig, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: *$u(x, y)$ und $v(x, y)$ müssen innerhalb B stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y haben, und diese Ableitungen müssen den Relationen* (12) *genügen.* Wir zeigen jetzt, daß *diese Bedingungen für die Regularität von $f(z)$ im Gebiet B nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind.* Wir nehmen also an, die hergeleiteten Bedingungen seien erfüllt, und beweisen die Existenz der stetigen Ableitung $f'(z)$. Berücksichtigt man die Stetigkeit der partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ nach x und y, so kann man schreiben [**I, 68**]:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y;$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y,$$

wobei die ε_k zusammen mit Δx und Δy gegen Null streben. Bildet man mit Hilfe der letztgenannten Ausdrücke den Zuwachs $f(z+\Delta z) - f(z)$ der Funktion und setzt ihn in die Beziehung (4) ein, so bekommt man

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Benutzt man die Bedingungen (12), dann kann man diese Relation in der Form

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \varepsilon_5 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \varepsilon_6 \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

schreiben, wobei

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_3 \quad \text{und} \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_2 + i\varepsilon_4$$

gleichzeitig mit Δz gegen Null streben.

Man sieht leicht, daß die letzten beiden Summanden rechts ebenfalls gegen Null gehen. Es gilt z. B.

$$\left|\varepsilon_5 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\right| = |\varepsilon_5| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Hier strebt der erste Faktor gegen Null, und der zweite ist nie größer als Eins.

Man kann daher die vorige Formel in der Form

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_7$$

schreiben, wobei ε_7 gleichzeitig mit Δz gegen Null strebt, während die ersten beiden Summanden der rechten Seite von Δz unabhängig sind.

Es strebt also der Ausdruck (4) gegen einen bestimmten Grenzwert, der durch (10) definiert ist. Daraus folgt, daß die obengenannten Bedingungen für $u(x, y)$ und $v(x, y)$ *notwendig und hinreichend* sind für die Regularität von $f(z)$ im Gebiet B. Die Gleichungen (12) werden gewöhnlich *Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen* genannt.

Wir sind diesen Gleichungen schon begegnet; sie müssen von Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion stationärer ebener Strömungen idealer inkompressibler Flüssigkeiten erfüllt werden [**II, 74**]. Wir sehen also, daß die Grundgleichungen der Funktionentheorie gleichzeitig auch diejenigen für die Untersuchung hydrodynamischer Probleme sind. So ergeben sich zahlreiche wichtige Anwendungen der Funktionentheorie auf die Hydrodynamik. Darüber werden wir im folgenden Kapitel sprechen.

Wir werden später folgende wichtige Tatsache beweisen: Ist eine reguläre Funktion vorgegeben, so besitzen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ Ableitungen beliebiger Ordnung. Differenziert man die erste der Gleichungen (12) partiell nach x, die zweite nach y und addiert, so bekommt man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \tag{13_1}$$

Entsprechend folgert man aus (12) mühelos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 . \tag{13_2}$$

Daraus folgt, daß *Real- und Imaginärteil einer regulären Funktion* $f(z)$ *die* Laplacesche *Gleichung erfüllen müssen*, d. h., sie müssen *harmonische Funktionen* sein. Im folgenden Kapitel untersuchen wir auch eingehend den Zusammenhang der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit der Laplaceschen Gleichung.

Aus den Gleichungen (13) folgt: Wir können eine reguläre Funktion konstruieren, indem wir ihren Realteil willkürlich vorgeben, d. h. für $u(x, y)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (13_1) nehmen; wir zeigen dann, daß dadurch $v(x, y)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

In der Tat folgt aus den Gleichungen (12)

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy ,$$

also

$$v(x, y) = \int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right) + C . \tag{14}$$

Es bleibt nachzuprüfen, daß das Kurvenintegral nicht vom Weg abhängt und eine Funktion seiner oberen Grenze liefert [**II, 71**]. Wir erinnern daran, daß man die Bedingung für die Unabhängigkeit eines Kurvenintegrals

$$\int (X dx + Y dy)$$

vom Wege in folgender Weise schreiben kann:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} .$$

Wenden wir dies auf das Integral (14) an, so bekommen wir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ;$$

diese Bedingung ist aber nach Voraussetzung erfüllt, da wir für $u(x, y)$ eine harmonische Funktion genommen hatten Wir bemerken noch: Auch wenn $u(x, y)$