



EUROPA-FACHBUCHREIHE

für Chemieerberufe

**Lösungsvorschläge
für die Aufgaben im Buch**

**Technische Mathematik
und Datenauswertung
für Laborberufe**

6. Auflage

Klaus Brink, Gerhard Fastert, Eckhard Ignatowitz

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 71764

Autoren:

Dr. Klaus Brink, StR
Gew. Lehrer Gerhard Fastert, OStR
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR
Dr. Ernst Bartels, StD

Leverkusen
Stade
Waldbronn
Hannover

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:

Gerhard Fastert

Bildentwürfe:

Die Autoren

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Hinweise für den Benutzer:

Das vorliegende Buch enthält Lösungsvorschläge für sämtliche Aufgaben im Buch „Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe“. Teilweise wurde für eine Aufgabe sowohl ein Lösungsweg mit Größengleichungen und ein Lösungsweg mit Schlussrechnung ausgeführt.

Die Lösungsvorschläge sind in derselben Reihenfolge wie die Aufgaben im Buch „Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe“ (TML) angeordnet. Die Seitenzahl von TML ist jeweils in den Kapitelüberschriften und am Außenrand einer jeden Buchseite angegeben.

Das Auffinden des Lösungsvorschlags einer bestimmten Aufgabe ist mit Hilfe des Inhaltsverzeichnisses und der TML-Seitenzahl leicht möglich.

Das vorliegende Buch wurde auf der Grundlage der aktuellen amtlichen Rechtschreibregeln erstellt.

6. Auflage 2012

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-7124-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Das Buchtitelbild „Eine typische Laborsituation“ wurde freundlicherweise von der Dynevo GmbH, Leverkusen, zur Verfügung gestellt. Abgebildet sind Frau Verena Crämer und Frau Stefanie Haas.

© 2012 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.Europa-Lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: MediaCreativ, Hr. Kuhl, 40723 Hilden

Satz & Grafik: Wissenschaftliche PublikationsTechnik Kernstock, 73230 Kirchheim/Teck

Druck: Media-Print Informationstechnologie, 33100 Paderborn

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen	7	2.5.1	Datenauswertung mit Tabellenkalkulationsprogrammen	47
1.1	Zahlenarten	7	2.5.2	Grafische Aufbereitung von Versuchs- und Prozessdaten, Diagrammartentypen	49
1.3	Grundrechnungsarten	7	2.5.3	Computergestützte Auswertung von Messreihen durch Regression	50
1.3.1	Addieren und Subtrahieren	7			
1.3.2	Multiplizieren	7			
1.3.3	Dividieren	8			
1.4	Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke	8			
1.5	Bruchrechnen	9			
1.5.1	Zusammenfassen	9			
1.6	Rechnen mit Potenzen	12			
1.7	Wurzeln	13			
1.7.1	Rechnen mit Wurzeln	13			
1.8	Rechnen mit Logarithmen	14			
1.8.2	Berechnen dekadischer Logarithmen	14			
1.8.3	Berechnen natürlicher Logarithmen	14			
1.8.4	Logarithmengesetze	14			
1.8.5	Logarithmieren bei der pH-Wert-Berechnung	15			
1.9	Lösen von Gleichungen	15			
1.9.1	Lineare Bestimmungsgleichungen	15			
1.9.2	Quadratische Bestimmungsgleichungen	16			
1.9.3	Wurzelgleichungen	19			
1.9.4	Exponentialgleichungen	20			
1.9.5	Umstellen von Größengleichungen	21			
1.10	Rechnen mit Winkeln und Winkelfunktionen	22			
1.11	Berechnung mit dem Dreisatz	23			
1.12	Berechnung mit Proportionen	23			
1.13	Rechnen mit Anteilen	24			
2	Auswertung von Messwerten und Prozessdaten	36			
2.1	Messtechnik in der Chemie	36			
2.1.1	Grundbegriffe der Messtechnik, Messunsicherheit, Messgenauigkeit	36			
2.2	Rechnen mit Messwerten	36			
2.3	Auswertung von Messwertreihen	37			
2.4	Darstellung von Messergebnissen	38			
2.4.1	Messwerte in Wertetabellen	38			
2.4.2	Grafische Darstellung von Messwerten	39			
2.4.3	Arbeiten mit Diagrammen in der Chemie	40			
2.4.4	Interpretation von Graphen	42			
2.4.5	Linearisieren einer Kurve	43			
2.4.6	Verwendung grafischer Papiere	44			
2.5	Versuchs- und Prozessdatenauswertung mit Computern	47			
3	Ausgewählte physikalische Berechnungen	65			
3.1	Größen, Zeichen, Einheiten, Umrechnungen	65			
3.2	Berechnung von Längen, Flächen, Oberflächen und Volumina	67			
3.2.1	Längenberechnung	67			
3.2.2	Umfangs- und Flächenberechnung	67			
3.2.3	Oberflächen- und Volumenberechnung	68			
3.3	Berechnung von Masse, Volumen und Dichte	69			
3.4	Bewegungsvorgänge	74			
3.5	Strömungsvorgänge	76			
3.6	Kräfte	77			
3.7	Arbeit	78			
3.8	Leistung	79			
3.9	Energie	79			
3.10	Wirkungsgrad	80			
3.11	Druck und Druckarten	81			
3.12	Druck in Flüssigkeiten	81			
3.13	Auftriebskraft	83			
3.14	Gaskinetik	84			
3.15	Druck in Gasen	84			
3.16	Sättigungsdampfdruck, Partialdruck	85			
3.17	Luftfeuchtigkeit	85			
4	Stöchiometrische Berechnungen	91			
4.2	Chemische Elemente	91			
4.3	Kernreaktionen	91			
4.4	Symbole und Ziffern in chemischen Formeln	92			
4.5	Quantitäten von Stoffportionen	93			
4.6	Zusammensetzung von Verbindungen und Elementen	96			
4.7	Elementar- und Molekülformel	101			
4.8	Gase und Gasgesetze	109			
4.8.1	Gase bei Normbedingungen	109			
4.8.2	Gase bei beliebigen Drücken und Temperaturen	111			
4.9	Rechnen mit Reaktionsgleichungen	113			
4.9.1	Reaktionsgleichungen	113			

4.9.2	Aufstellen von Reaktionsgleichungen	113	6.2.3	Einfluss der Temperatur auf die Reaktionsgeschwindigkeit	188
4.9.3	Oxidationszahlen	115	6.6	Verschiebung der Gleichgewichtslage	193
4.9.4	Aufstellen von Redox-Gleichungen	115	7	Rechnen mit Ionengleichgewichten	195
4.10	Umsatzberechnung	120	7.1	Protolysegleichgewichte	195
4.10.1	Umsatzberechnung bei reinen Stoffen	120	7.1.1	Protolysegleichgewicht des Wassers	195
4.10.2	Umsatzberechnung bei verunreinigten oder gelösten Stoffen	123	7.1.2	Der pH-Wert	195
4.10.3	Umsatzberechnung bei Gasreaktionen	129	7.1.3	pH-Wert starker Säuren und Basen	196
4.10.4	Umsatzberechnung unter Berücksichtigung der Ausbeute	132	7.1.4	Dissoziationsgrad α , Protolysegrad	198
5	Rechnen mit Mischphasen	144	7.1.5	Säure- und Basenkonstante.	200
5.1	Gehaltsgrößen von Mischphasen	144	7.1.6	pH-Wert schwacher Säuren und Basen	201
5.1.1	Massenanteil w	144	7.1.7	pH-Wert mehrprotoniger Säuren.	202
5.1.2	Volumenanteil φ	146	7.1.8	Das Ostwald'sche Verdünnungsgesetz	204
5.1.3	Stoffmengenanteil χ	147	7.1.9	pH-Wert von Pufferlösungen	205
5.1.4	Umrechnung der verschiedenen Anteile	151	7.1.10	Lage von Protolysegleichgewichten	208
5.1.5	Massenkonzentration β	154	7.2	Löslichkeitsgleichgewichte	209
5.1.6	Volumenkonzentration σ	154	8	Analytische Bestimmungen	220
5.1.7	Stoffmengenkonzentration c , Äquivalentkonzentration $c(1/z^*X)$	155	8.1	Gravimetrie.	220
5.1.8	Umrechnen der verschiedenen Konzentrationen	156	8.1.1	Feuchtigkeits- und Trockengehaltsbestimmungen von Feststoffen.	220
5.1.9	Löslichkeit L^*	159	8.1.2	Bestimmung des Wassergehalts in Ölen	221
5.2	Umrechnen von Anteilen \Leftrightarrow Konzentrationen \Leftrightarrow Löslichkeiten	161	8.1.3	Glührückstandsbestimmungen.	221
5.2.1	Umrechnung Massenanteil $w(X)$ \Leftrightarrow Stoffmengenkonzentration $c(X)$	161	8.1.4	Thermogravimetrie	223
5.2.2	Umrechnung Massenanteil $w(X)$ \Leftrightarrow Massenkonzentration $\beta(X)$	162	8.1.5	Gravimetrische Fällungsanalysen	224
5.2.3	Umrechnung Massenanteil $w(X)$ \Leftrightarrow Volumenkonzentration $\sigma(X)$	163	8.2	Volumetrie (Maßanalyse).	226
5.2.4	Umrechnung Massenanteil $w(X)$ \Leftrightarrow Löslichkeit $L^*(X)$	164	8.2.2	Maßlösungen.	226
5.3	Mischen, Verdünnen und Konzentrieren von Lösungen	169	8.2.2.1	Gehaltsangaben von Maßlösungen	226
5.3.1	Mischen von Lösungen	169	8.2.2.2	Herstellen von Maßlösungen.	227
5.3.2	Verdünnen von Lösungen.	169	8.2.2.3	Titer von Maßlösungen	229
5.3.3	Mischen von Lösungs-Volumina	171	8.2.2.4	Einstellen einer Maßlösung.	229
5.3.4	Konzentrieren von Lösungen	172	8.2.3	Berechnung von Maßanalysen – Neutralisationstitrationen.	230
6	Berechnungen zum Verlauf chemischer Reaktionen	183	8.2.3.1	Neutralisationstitrationen, Direkttitrationen	230
6.1	Die Reaktionsgeschwindigkeit.	183	8.2.3.2	Bestimmung des Titers von Maßlösungen.	233
6.2	Beeinflussung der Reaktionsgeschwindigkeit	184	8.2.3.3	Rücktitrationen.	234
6.2.1	Einfluss der Konzentration auf die Reaktionsgeschwindigkeit	184	8.2.3.4	Mehrstufige Neutralisationstitrationen	236
6.2.2	Grafische Ermittlung der Reaktionsordnung	185	8.2.3.5	Indirekte Titration	238
			8.2.3.6	Oleum-Bestimmungen	240
			8.2.4	Redox-Titrationen (Oxidimetrie)	244
			8.2.4.1	Manganometrische Titrationen	244
			8.2.4.2	Iodometrische Titrationen	245
			8.2.4.4	Bestimmung des CSB-Wertes	249
			8.2.5	Fällungstitrationen.	249
			8.2.6	Komplexometrische Titrationen	252

8.3	Maßanalytische Kennzahlen organischer Substanzen	259	11.5	Reihenschaltung von Widerständen	339
8.3.1	Säurezahl SZ	259	11.6	Parallelschaltung von Widerständen	340
8.3.2	Verseifungszahl VZ	259	11.7	Messbereichserweiterung von Strom- und Spannungsmessgeräten	341
8.3.3	Esterzahl EZ	260	11.8	Gruppenschaltungen, Netzwerke	342
8.3.4	Hydroxylzahl OHZ	261	11.9	Wheatstone'sche Brückenschaltungen	344
8.3.5	Iodzahl IZ	262	11.10	Elektrische Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad	344
8.4	Maßanalytische Bestimmungen mit elektrochemischen Methoden	265	12	Elektrochemische Berechnungen	349
8.4.1	Potentiometrische Neutralisationstitrationen	265	12.1	Elektrolytische Stoffabscheidung	349
8.4.2	Leitfähigkeitstitrationen (Konduktometrie)	269	12.2	Leitfähigkeit von Elektrolyten	351
8.5	Optische Analyseverfahren	274	12.3	Elektrochemische Potentiale	353
8.5.1	UV/VIS-Spektroskopie	274	13	Berechnungen zur Wärmelehre	358
8.5.2	Refraktometrie	279	13.1	Temperaturskalen	358
8.5.3	Polarimetrie	281	13.2	Verhalten der Stoffe bei Erwärmung	358
8.6	Chromatografie	282	13.2.1	Thermische Längenänderung von Feststoffen	358
8.7	Partikelgrößenanalyse, Siebanalyse	289	13.2.2	Thermische Volumenänderung von Feststoffen	358
8.7.3	Auswertung einer Siebanalyse mit einem Tabellenkalkulationsprogramm	296	13.2.3	Thermische Volumenänderung von Flüssigkeiten	359
			13.2.4	Thermische Volumenänderung von Gasen	360
9	Statistische Methoden in Biologie und Analytischer Chemie	301	13.3	Wärmeinhalt von Stoffportionen	360
10	Qualitätssicherung in der Analytischen Chemie	322	13.4	Aggregatzustandsänderungen	361
10.1	Validierung analytischer Verfahren	322	13.4.1	Schmelzen, Erstarren	361
10.1.2	Untersuchung der Richtigkeit von Messwerten	322	13.4.2	Verdampfen, Kondensieren	361
10.1.3	Untersuchung der Präzision von Messwerten	324	13.5	Temperaturänderung beim Mischen	362
10.1.4	Prüfung von Messwertreihen auf Ausreißer	326	13.6	Reaktionswärmen bei chemischen Reaktionen	365
10.2	Qualitätsregelkarten in der Analytischen Chemie	329	13.6.1	Reaktionsenergie, Reaktionsenthalpie	365
10.2.2	Regelgrenzen in Lage-Qualitätsregelkarten	329	13.6.2	Heiz- und Brennwert	366
10.2.3	Bewertung von Lage-Qualitätsregelkarten	330	13.6.3	Neutralisationsenthalpie	366
10.2.4	Regelgrenzen in Streuungs-Qualitätsregelkarten	330	13.6.4	Lösungsenthalpie	367
10.2.6	Erstellen und Führen von Qualitätsregelkarten	331	13.6.5	Freie Reaktionsenthalpie, Entropie	367
11	Berechnungen zur Elektrotechnik	338	14	Physikalisch-chemische Bestimmungen	375
11.1	Grundbegriffe der Elektrotechnik	338	14.1	Dichtebestimmungen	375
11.2	Elektrischer Widerstand eines Leiters	338	14.1.1	Dichtebestimmung mit dem Pyknometer	375
11.3	Temperaturabhängigkeit des Widerstands	339	14.1.4	Dichtebestimmung nach dem Tauchkörper-Verfahren	377
11.4	Ohm'sches Gesetz	339	14.1.5	Dichtebestimmung mit dem Aräometer	377
			14.1.6	Dichtebestimmung nach der Schwebemethode	377
			14.1.7	Bestimmung der Röntgendichte	377
			14.1.8	Bestimmung der Schütt- und Rütteldichte	377

14.1.9	Dichtebestimmung nach der Schwingungsmethode	378	16	Berechnungen mit Beschichtungsstoffen	406
14.2	Bestimmung der Viskosität	379	16.1	Gehaltsgrößen von Beschichtungsstoffen	406
14.2.1	Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler	379	16.1.1	Massenanteile in Beschichtungsstoffen.	406
14.3	Bestimmung der Oberflächenspannung	382	16.1.2	Volumenanteile in Beschichtungsstoffen	407
14.4	Bestimmung der molaren Masse	383	16.1.3	Pigment-Bindemittel-Massenverhältnis.	408
14.4.1	Molare Masse aus den Gasgesetzen.	383	16.1.4	Umrechnung von Rezepturen.	409
14.4.2	Molare Masse aus der Dampfdruckerniedrigung	384	16.2	Bestimmung der Kenngrößen von Beschichtungen.	413
14.4.3	Molare Masse aus der Siedepunkterhöhung	385	16.3	Schichtdicke von Beschichtungen.	414
14.4.4	Molare Masse aus der Gefrierpunkterniedrigung.	387	16.4	Verbrauch und Ergiebigkeit von Beschichtungsstoffen	416
14.4.5	Molare Masse aus dem osmotischen Druck	389	16.5	Maßanalytische Kennzahlen von Beschichtungsstoffen	417
15	Trennen von Flüssigkeitsgemischen	391	16.5.1	Aminzahl, H-aktiv-Äquivalentmasse.	417
15.1	Destillieren	391	16.5.2	Epoxid-Äquivalentmasse, Epoxidwert.	420
15.1.1	Dampfdruck von Flüssigkeiten	391	16.6	Mischen von Zweikomponenten-Lacken (2K-Lacke)	420
15.1.2	Sieverhalten homogener Flüssigkeitsgemische	391	16.6.1	2-Komponenten-Lacke mit Hydroxylgruppen und Isocyanatgruppen	420
15.1.3	Siedediagramm	392	16.6.2	2-Komponenten-Lacke mit Epoxid-Gruppen und aktivem Wasserstoff.	421
15.1.4	Gleichgewichtsdiagramm.	392			
15.1.5	Durchführen einer Destillation	392			
15.1.6	Zeitlicher Verlauf einer Destillation	392			
15.2	Wasserdampfdestillation	397			
15.3	Rektifikation (Gegenstromdestillation).	399			
15.4	Flüssig-Flüssig-Extraktion	404			

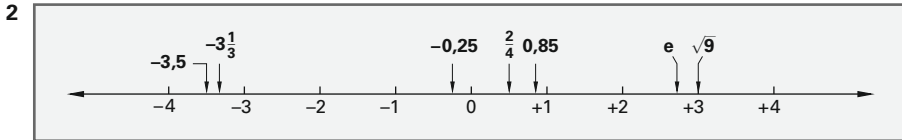
1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

1

1.1 Zahlenarten

- 9
- | | | | | |
|---|------------|------------------------------|---------------|-----------------------|
| 1 | 0,7 | Dezimalzahl; | -18 | negative ganze Zahl; |
| | $\sqrt{3}$ | Wurzelzahl; | $\frac{1}{7}$ | Bruchzahl; |
| | 0 | natürliche Zahl; | -387 | negative ganze Zahl; |
| | $-\pi$ | negative transzendente Zahl; | -0,32 | negative Dezimalzahl. |

► 9
10
11



1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

- 10
- 1 a) $328 + 713 + 287 + 38 + 9 - 103 = 1272$
 - b) $59,30a - 27,53a + 7,83b - 21,04b = 31,77a - 13,21b$
 - c) $22,2u + 38,9v - 17,8u + 3,6v + 9,8w = 4,4u + 42,5v + 9,8w$
 - 2 $8,3x - 7,8a + 2,5x - 9,2a = 8,3x - (7,8a - 2,5x + 9,2a)$
 - 3 $25a - (36b - 19a - 11b - 12a) = 25a - 36b + 19a + 11b + 12a = 56a - 25b$

1.3.2 Multiplizieren

- 11
- | | |
|--------------------------------|--|
| 1 a) $(+3) \cdot (-15) = -45$ | b) $(+9) \cdot (+7) = 63$ |
| c) $(-7) \cdot (-12) = 84$ | d) $(+5) \cdot 0 = 0$ |
| e) $(0) \cdot (-16) = 0$ | f) $(-3a) \cdot (8b) \cdot (+2c) = -48abc$ |
| g) $(+9x) \cdot (-4y) = -36xy$ | h) $(+13m) \cdot (+4m) \cdot (+2m) = 104m^3$ |
-
- | | |
|--|---|
| 2 a) $3(3a - 2b) = 9a - 6b$ | b) $9(7u + 8v) = 63u + 72v$ |
| c) $(-5) \cdot (-4x - 7y) = +20x + 35y$ | d) $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32) = 0$ |
| e) $(6c - 3d) \cdot (+2a) = 12ac - 6ad$ | f) $-x(y - z) = -xy + xz$ |
| g) $4uv(9r - 5s) = 36uvr - 20uvs$ | h) $-(4ab + 7xy) \cdot (-12) = 48ab + 84xy$ |
| i) $W = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot V_2 - p \cdot V_1$ | j) $m_M = \varrho_M \cdot \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} \right) = \frac{\varrho_M \cdot m_1}{\varrho_1} + \frac{\varrho_M \cdot m_2}{\varrho_2}$ |
-
- 3
- a) $(7s + 5r) \cdot (3l - 6k) = 21ls - 42ks + 15lr - 30kr$
 - b) $5(3u - 4v) \cdot 8 \cdot (2w - 9x) = 40 \cdot (6uw - 27ux - 8vw + 36ux) = 240uw - 1080ux - 320vw + 1440vx$
 - c) $(-4) \cdot (9w + 3x) \cdot (-3) \cdot (8y - 5z) = +12 \cdot (72wy - 45wz + 24xy - 15xz) = 864wy - 540wz + 288xy - 180xz$
 - d) $11a(-3b + 2x) \cdot (4c - 5y) = 11a \cdot (-12bc + 15by + 8cx - 10xy) = -132abc + 165aby + 88acx - 110axy$

$$4 \quad 7(5-2x) \cdot (-4) \cdot (-3+6y) \text{ mit } x=3 \text{ und } y=4$$

$$7(5-6) \cdot (-4) \cdot (-3+24) = 7 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (21) = \mathbf{+588}$$

$$5 \text{ a) } 2ab + 2ac + 2ad = \mathbf{2a(b+c+d)}$$

$$b) \pi nr_1 + \pi nr_2 = \mathbf{\pi n(r_1 + r_2)}$$

$$c) -30rs + 20ls = \mathbf{10s(-3r+2l)}$$

$$d) \pi r_1^2 + \pi h^2 = \mathbf{\pi(r_1^2 + h^2)}$$

1.3.3 Dividieren

$$\blacktriangleright 11 \quad 1 \text{ a) } 63 : (-7) = \mathbf{-9}$$

$$b) (-64) : (-4) = \mathbf{+16}$$

$$c) (-91) : 13 = \mathbf{-7}$$

$$d) \frac{105}{15} = \mathbf{7}$$

$$e) \frac{-96}{8} = \mathbf{-12}$$

$$f) \frac{-132}{-11} = \mathbf{+12}$$

$$2 \text{ a) } \frac{(-7) \cdot (18)}{12} = \mathbf{-10,5}$$

$$b) \frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)} = \mathbf{+22}$$

$$c) \frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)} = \mathbf{-4,5}$$

$$3 \text{ a) } (156 - 72) : 14 = 84 : 14 = \mathbf{6}$$

$$b) (391 - 144) : (121 - 102) = 247 : 19 = \mathbf{13}$$

$$4 \text{ a) } \frac{-12u \cancel{4}}{\cancel{3} \cancel{4}} = \mathbf{-4u}$$

$$b) \frac{6a - 3b}{3} = \frac{\cancel{3}(2a - b)}{\cancel{3}} = \mathbf{2a - b}$$

$$c) \frac{81x \cancel{9}}{-9 \cancel{9}} = \mathbf{-9x}$$

$$d) \frac{-187r \cancel{17} + 153r \cancel{9} + 34r \cancel{17}}{-17 \cancel{17}} = \frac{\cancel{17}(-11r + 9r + 2r)}{-\cancel{17}} = \mathbf{0}$$

$$e) \frac{21 \cdot (-9) \cdot 4x}{(-35) \cdot (-2)} = -\frac{\cancel{7} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x}{\cancel{7} \cdot 5 \cdot 2} = \mathbf{-\frac{54}{5}x}$$

$$f) \frac{-(x-5)}{(5-x)} = \frac{-(x-5)}{-(-5+x)} = \frac{-(x-5)}{-(x-5)} = \mathbf{1}$$

$$g) -\frac{(7x-y) \cdot (3+2b)}{-2b-3} = -\frac{(7x-y) \cdot \cancel{(3+2b)}}{-\cancel{(3+2b)}} = \mathbf{+7x - y}$$

$$5 \text{ a) } \frac{7a \cdot (-3)}{5b \cdot (-3)} = \frac{\mathbf{-21a}}{\mathbf{-15b}}$$

$$b) \frac{3x \cdot (-1)}{-8y \cdot (-1)} = \frac{\mathbf{-3x}}{\mathbf{+8y}}$$

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

$$\blacktriangleright 13 \quad 1 \text{ a) } -4 \cdot (0,2 - 3,2) + (14,5 - 8,5) \cdot (-0,1) = -4 \cdot (-3) + 6 \cdot (-0,1) = 12 - 0,6 = \mathbf{11,4}$$

$$b) 12x \cdot (-3y) + (0,75x - 0,50x) \cdot (+80) = -36xy + 0,25x \cdot 80 = -36xy + 20x = \mathbf{4x(5 - 9y)}$$

$$2 \text{ a) } \frac{(-2,5) \cdot (86 - 82)}{(1,3 - 0,8) \cdot (42 - 38)} = \frac{-2,5 \cdot 4}{0,5 \cdot 4} = \mathbf{-5}$$

$$b) \frac{222}{37} - \frac{0,125 \cdot (-85 + 117)}{(0,4) \cdot (-8) \cdot (2,5)} = 6 - \frac{0,125 \cdot 32}{-8} = 6 + 0,5 = \mathbf{6,5}$$

$$c) 24,7 \cdot \frac{(1 - 0,392)}{(1 - 0,065)} = 24,7 \cdot 0,65027 \approx \mathbf{16,1}$$

$$3 \text{ a) } (23,8 - 21,3) \cdot \frac{2,14 + 0,86}{4,52 - 4 \cdot 0,38} = 2,5 \cdot \frac{3}{4,52 - 1,52} = \frac{7,5}{3} = \mathbf{2,5}$$

$$b) \frac{18,06 - 17,56}{0,25} + \frac{27}{3,2 + 5,8} - \frac{(0,2 + 2,8) \cdot (5,4 - 3,4)}{2,4 \cdot 2,5} = \frac{0,5}{0,25} + \frac{27}{9} - \frac{3 \cdot 2}{6} = 2 + 3 - 1 = \mathbf{4}$$

- 4 a) $2x - [5y - (3x - 4y) + 7x] - y$
 $= 2x - [5y - 3x + 4y + 7x] - y$
 $= 2x - 5y + 3x - 4y - 7x - y$
 $= 2x + 3x - 7x - 5y - 4y - y$
 $= -2x - 10y$
- b) $4,5a \cdot [(2b - c) - c] - 8a(c - b)$
 $= 4,5a \cdot [2b - c - c] - 8a(c - b)$
 $= 4,5a \cdot (2b - 2c) - 8a(c - b)$
 $= 4,5 \cdot 2a(b - c) + 8a(b - c)$
 $= 9a(b - c) + 8a(b - c)$
 $= 17a(b - c)$
- c) $[-0,2a - (1,7b - 1,9a)] : \left[\frac{5,5a}{10} - 0,85b + 0,3a \right]$
 $= [-0,2a + 1,9a - 1,7b] : [0,55a + 0,3a - 0,85b]$
 $= (1,7a - 1,7b) : (0,85a - 0,85b)$
 $= \frac{1,7(a - b)}{0,85(a - b)} = \frac{1,7}{0,85} = 2$
- 5 a) $2 \cdot [-2xy - (20a - 12xy)] + 5(2a - xy)$
 $= 2[-2xy - 20a + 12xy] + 5(2a - xy)$
 $= 2(-20a + 10xy) + 5(2a - xy)$
 $= -2 \cdot 10(2a - xy) + 5(2a - xy)$
 $= -15(2a - xy)$
- b) $0,3a \cdot \{5xy - (92x - 87y) - (84y - 82x)\}$
 $= 0,3a \cdot \{5xy - 92x + 87y - 84y + 82x\}$
 $= 0,3a \cdot \{5xy - 10x + 3y\}$
- c) $\{-9,5x + [(1,5x - 4y) \cdot (0,5 + 6,5)] + 29y\} \cdot \frac{1}{x + y}$
 $= \{-9,5x + [(1,5x - 4y) \cdot 7] + 29y\} \cdot \frac{1}{x + y}$
 $= \{-9,5x + 10,5x - 28y + 29y\} \cdot \frac{1}{x + y}$
 $= \{x + y\} \cdot \frac{1}{x + y} = \frac{x + y}{x + y} = 1$

1.5 Bruchrechnen

1.5.1 Zusammenfassen

▶ 15 1 a) Hauptnenner: $3 = 3$
 $4 = 2 \cdot 2$
 $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $\text{kgV} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{5}{24} = \frac{16}{24} + \frac{6}{24} + \frac{5}{24} = \frac{27}{24} = 1 \frac{3}{24} = 1 \frac{1}{8}$$

b) Hauptnenner: $25 = 5 \cdot 5$
 $15 = 5 \cdot 3$
 $3 = 3$
 $5 = 5$
 $\text{kgV} = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$

$$\frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{14 \cdot 3}{25 \cdot 3} + \frac{23 \cdot 5}{15 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 25}{3 \cdot 25} + \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 15} = \frac{42}{75} + \frac{115}{75} - \frac{25}{75} + \frac{30}{75} = + \frac{162}{75} = 2 \frac{12}{75} = 2 \frac{4}{25}$$

2 a) Hauptnenner: $4a = 2 \cdot 2 \cdot a$

$$\frac{12b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b}{\text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 12ab}$$

$$\frac{7x}{4a} + \frac{5x}{12b} = \frac{7x \cdot 3b}{4a \cdot 3b} + \frac{5x \cdot a}{12b \cdot a} = \frac{21bx}{12ab} + \frac{5ax}{12ab} = \frac{21bx + 5ax}{12ab} = \frac{x(21b + 5a)}{12ab}$$

b) Hauptnenner: $3bc = 3 \cdot b \cdot c$

$$\frac{12c = 3 \cdot c \cdot 2 \cdot 2}{18b = 3 \cdot b \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\text{kgV} = 3 \cdot b \cdot c \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36bc$$

$$\frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b} = \frac{5u \cdot 12}{3bc \cdot 12} + \frac{7u \cdot 3b}{12c \cdot 3b} - \frac{5u \cdot 2c}{18b \cdot 2c}$$

$$= \frac{60u}{36bc} + \frac{21bu}{36bc} - \frac{10cu}{36bc} = \frac{60u + 21bu - 10cu}{36bc} = \frac{u(60 + 21b - 10c)}{36bc}$$

Aufgaben zum Bruchrechnen

Zusammenfassen von Brüchen

1 a) Hauptnenner: $49 = 7 \cdot 7$

$$\frac{56 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{8 = 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\text{kgV} = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 392$$

$$\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8} = \frac{8 \cdot 8}{49 \cdot 8} + \frac{6 \cdot 7}{56 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 49}{8 \cdot 49} = \frac{64}{392} + \frac{42}{392} - \frac{147}{392} = -\frac{41}{392}$$

b) Hauptnenner: $25 = 5 \cdot 5$

$$\frac{10 = 5 \cdot 2}{5 = 5}$$

$$\text{kgV} = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$$

$$3\frac{6}{25} - 18\frac{7}{10} + 24\frac{3}{5} = 3 - 18 + 24 + \frac{6}{25} - \frac{7}{10} + \frac{3}{5} = 9 + \frac{6}{25} - \frac{7}{10} + \frac{3}{5}$$

$$= 9 + \frac{6 \cdot 2}{25 \cdot 2} - \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 10} = 9 + \frac{12}{50} - \frac{35}{50} + \frac{30}{50} = 9 + \frac{7}{50} = 9\frac{7}{50}$$

c) Hauptnenner: $2a + 3b = 2a + 3b$

$$\frac{3}{3} = 3$$

$$\text{kgV} = 3 \cdot (2a + 3b)$$

$$\frac{8x + 4y}{4a + 6b} + \frac{9x}{9b + 6a} - \frac{5}{3} = \frac{2(4x + 2y)}{2(2a + 3b)} + \frac{3 \cdot 3x}{3(3b + 2a)} - \frac{5}{3} = \frac{4x + 2y}{2a + 3b} + \frac{3x}{2a + 3b} - \frac{5}{3}$$

$$= \frac{(4x + 2y) \cdot 3}{(2a + 3b) \cdot 3} + \frac{3x \cdot 3}{(2a + 3b) \cdot 3} - \frac{5 \cdot (2a + 3b)}{3 \cdot (2a + 3b)} = \frac{12x + 6y + 9x - 10a - 15b}{3(2a + 3b)}$$

$$= \frac{21x + 6y - 10a - 15b}{3(2a + 3b)} = \frac{-10a - 15b + 21x + 6y}{3(2a + 3b)}$$

Multiplizieren von Brüchen

2 a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14} = \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = 2$

e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a} = \frac{9ab \cdot 15x \cdot 3 \cdot 3}{5y \cdot 12a \cdot 4} = \frac{9bx}{4y}$

b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22} = \frac{11 \cdot 4}{8 \cdot 22 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

d) $1\frac{5}{6} \cdot 3\frac{6}{15} = \frac{11}{6} \cdot \frac{51 \cdot 17}{15 \cdot 5} = \frac{187}{30} = 6\frac{7}{30}$

Dividieren von Brüchen

3 a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 16} = \frac{49}{32} = 1\frac{17}{32}$

c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15} = \frac{9 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 12 \cdot 4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

d) $3xy : \frac{1}{2}z = \frac{3xy \cdot 2}{z} = \frac{6xy}{z}$

e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y} = \frac{2x \cdot 3y}{9y \cdot 4x \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v} = \frac{26ab \cdot 22v \cdot 2 \cdot 2}{33u \cdot 13a \cdot 3} = \frac{4bv}{3u}$

Berechnen von Brüchen

4 a) Hauptnenner: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
 $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $\text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

$$14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8} \right) = 14 \cdot \left(\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} \right) = 14 \cdot \frac{14 + 15}{24} = \frac{14 \cdot 29 \cdot 7}{24 \cdot 12} = \frac{203}{12} = 16\frac{11}{12}$$

b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22} = \frac{42 \cdot 7 \cdot 7}{6} + \frac{9}{22} = 49 + \frac{9}{22} = 49\frac{9}{22}$

c) $\frac{8x+8y}{3r-3s} : \frac{4x+4y}{9r-9s} = \frac{8(x+y) \cdot 9(r-s) \cdot 2 \cdot 3}{3(r-s) \cdot 4(x+y)} = 6$

d) $15 = 3 \cdot 5$
 $10 = 5 \cdot 2$
 $\text{kgV} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

$$\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10} \right) \cdot 8 = \left(\frac{11 \cdot 2}{15 \cdot 2} - \frac{6 \cdot 3}{10 \cdot 3} \right) \cdot 8 = \left(\frac{22}{30} - \frac{18}{30} \right) \cdot 8 = \frac{4 \cdot 8 \cdot 2}{30 \cdot 15} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

e) $6n = 2 \cdot 3 \cdot n$
 $3m = 3 \cdot m$
 $\text{kgV} = 2 \cdot 3 \cdot n \cdot m = 6nm$

$$\frac{5a-3b}{6n} + \frac{5a-3b}{3m} = \frac{(5a-3b) \cdot m}{6n \cdot m} + \frac{(5a-3b) \cdot 2n}{3m \cdot 2n} = \frac{5am-3bm+10an-6bn}{6nm}$$

f) $5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10} \right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2} \right) \right] = 5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5} \right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{10 \cdot 3}{2 \cdot 3} \right) \right]$
 $= 5\frac{1}{2} - 1 \cdot \left[5 : \left(\frac{42}{6} - \frac{30}{6} \right) \right] = 5\frac{1}{2} - \left[5 : \frac{12}{6} \right] = 5\frac{1}{2} - [5 : 2] = 5\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$

g) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{8}{5} = \frac{14}{3} \cdot \frac{23}{5} = \frac{14 \cdot 23}{3 \cdot 5} = \frac{322}{15} = 21\frac{7}{15}$

h) $\left(12 : 2\frac{2}{3} \right) : \frac{7}{9} = \left(12 : \frac{8}{3} \right) : \frac{7}{9} = \frac{12 \cdot 3}{8} : \frac{7}{9} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{81}{14} = 5\frac{11}{14}$

i) $\left(\frac{u+v}{l+k} + \frac{3(u+v)}{2(l+k)} - \frac{5(u-v)}{3(k+l)} \right) : \frac{1}{2} = \left(\frac{(u+v) \cdot 6}{(l+k) \cdot 6} + \frac{3(u+v) \cdot 3}{2(l+k) \cdot 3} - \frac{5(u-v) \cdot 2}{3(l+k) \cdot 2} \right) \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{6(u+v) + 9(u+v) - 10(u-v)}{6(l+k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15(u+v) - 10(u-v)}{6(l+k)}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{15u + 15v - 10u + 10v}{6(l+k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5u + 25v}{6(l+k)} = \frac{5(u+5v)}{12(l+k)}$

1.6 Rechnen mit Potenzen

Potenzrechnen

▶ 16
17

- ▶ 16 1 a) $2l \cdot 4l \cdot 8l = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot l^3 = 2^6 l^3$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2$
 c) $1,5\text{cm} \cdot 2,3\text{cm} \cdot 1,4\text{cm} = 4,83\text{cm}^3$
- 2 a) $21^{2,5} = 2020,9159$ b) $(-6,3)^3 = -250,047$
 c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 128$ d) $2,4^{3,5} = 21,416049$
- 3 a) $5000000 = 5 \cdot 1000000 = 5 \cdot 10^6$ b) $0,0023 = 23 \cdot \frac{1}{10000} = 23 \cdot 10^{-4} = 2,3 \cdot 10^{-3}$
 c) $96485 = 9,6485 \cdot 10^4$ d) $0,000082 = 8,2 \cdot 10^{-5}$

Addieren und Subtrahieren von Potenzen

- ▶ 17 1 a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2 = 4r^3 - 2r^3 + 3r^3 + 12r^2 + 3r^2 = 5r^3 + 12r^2$
 b) $12m^2 + 7m^3 - 7m^2 + 5m^3 = 7m^3 + 5m^3 + 12m^2 - 7m^2 = 12m^3 + 5m^2$
 c) $6,2x^4 + 3,4y^2 + 7,5x^4 - 3,4y^2 = 6,2x^4 + 7,5x^4 + 3,4y^2 - 3,4y^2 = 13,7x^4$
 d) $2,8\pi r^2 h + \frac{5}{4}\pi r^3 - 1,75\pi r^3 + 2,2hr^2\pi$
 $= 2,8\pi r^2 h + 2,2\pi r^2 h + 1,25\pi r^3 - 1,75\pi r^3$
 $= (2,8 + 2,2)\pi r^2 h + (1,25 - 1,75)\pi r^3 = 5\pi r^2 h - 0,5\pi r^3 = \pi(5r^2 h - 0,5r^3)$
 e) $-14,3 \cdot 7^3 + 6,9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1,1 \cdot 11^4 + 8,7 \cdot 7^3$
 $= (-14,3 + 8,7) \cdot 7^3 + (6,9 + 1,1) \cdot 11^4 + 1715 \cdot \frac{1}{7^3}$
 $= -1920,8 + 117128 + 5 = 115212,2$

Multiplizieren von Potenzen

- 2 a) $x^5 \cdot x^{-3} \cdot x^2 = x^{5-3+2} = x^4$
 b) $0,4a^4 \cdot 0,5a^5 = 0,4 \cdot 0,5a^{4+5} = 0,2a^9$
 c) $2,5 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} = 2,5^2 \cdot 10^{5-2} = 6,25 \cdot 10^3 = 6250$
 d) $(r^3 - 2,5r^2) \cdot 2r^2 = r^3 \cdot 2r^2 - 2,5r^2 \cdot 2r^2 = 2r^{3+2} - 5r^{2+2} = 2r^5 - 5r^4$
 e) $d^{0,5x} \cdot d^{7x+3} = d^{0,5x+(7x+3)} = d^{0,5x+7x+3} = d^{7,5x+3}$
 f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n} = x^{a-n+a+n} = x^{2a}$
 g) $(r+s)^2 \cdot (r+s)^3 = (r+s)^{2+3} = (r+s)^5$
 h) $(x+y)^a \cdot (x+y)^b = (x+y)^{a+b}$

Dividieren von Potenzen

- 3 a) $\frac{10^3}{10^2} = 10^{3-2} = 10^1 = 10$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3} = 10^{3+2-1-3} = 10^1 = 10$
 c) $\frac{225^3}{15^3} = \left(\frac{225}{15}\right)^3 = 15^3 = 3375$ d) $\frac{780x^5}{39y^5} = \frac{780}{39} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5 = 20\left(\frac{x}{y}\right)^5$
 e) $\frac{2r^3}{3a^2} \cdot \frac{12a^2}{16r^3} = \frac{2 \cdot 12 \cdot r^3 \cdot a^2}{3 \cdot 16 \cdot r^3 \cdot a^2} = 0,5$ f) $\frac{n^3}{x^4} : \frac{n^3 \cdot x^4}{a} = \frac{n^3 \cdot a}{x^4 \cdot n^3 \cdot x^4} = \frac{a}{x^4 \cdot x^4} = \frac{a}{x^8}$

Potenzieren von Potenzen

- 4 a) $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$
 b) $(10^3)^{-2} = 10^{3 \cdot (-2)} = 10^{-6}$
 c) $(4^2 \cdot a x y^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot x^3 \cdot y^{2 \cdot 3} = 4^6 a^3 x^3 y^6$
 d) $5 \cdot (u^2 v^3)^5 = 5 u^{2 \cdot 5} \cdot v^{3 \cdot 5} = 5 u^{10} v^{15}$
 e) $(1^7)^2 \cdot (3^0)^3 = 1^2 \cdot 1^3 = 1 \cdot 1 = 1$
 f) $(7^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 = 7^{2 \cdot 3} \cdot 7^{-3} = 7^{6-3} = 7^3 = 343$

Potenzieren von Summen

- 5 a) $(3 + 7)^3 = 10^3 = 100$
 b) $(22 - 17)^5 = 5^5 = 3125$
 c) $(23 - 14)^5 = 9^5 = 59049$
 d) $(5 + 9)^4 = 14^4 = 38416$

1.7 Wurzeln**1.7.1 Rechnen mit Wurzeln**

- ▶ 19 1 a) $\sqrt{45796} = 214$
 b) $\sqrt{0,0065324} = 0,0808233$
 c) $\sqrt{1432,6225} = 37,85$
 d) $\sqrt[3]{39,785} = 3,414$
 e) $\sqrt[4]{42,424} = 2,552$
 f) $\sqrt{\pi} = 1,7724539$
- 2 a) $2,8 \cdot \sqrt{3} + 1,9 \cdot \sqrt{5} - 2,1 \cdot \sqrt{5} - 1,6 \cdot \sqrt{3}$
 $= 2,8 \cdot \sqrt{3} - 1,6 \cdot \sqrt{3} + 1,9 \cdot \sqrt{5} - 2,1 \cdot \sqrt{5}$
 $= (2,8 - 1,6) \sqrt{3} + (1,9 - 2,1) \sqrt{5}$
 $= 1,2 \cdot \sqrt{3} - 0,2 \cdot \sqrt{5}$
 $= 2,078461 - 0,4472136$
 $= 1,6312474 \approx 1,631$
- b) $\frac{1}{5} \sqrt[3]{216} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{125} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{64} = \frac{1}{5} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{6}{5} + \frac{10}{3} - 2 = \frac{18}{15} + \frac{50}{15} - \frac{30}{15} = \frac{38}{15}$
- c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22,5} = \sqrt{10 \cdot 22,5} = \sqrt{225} = 15$
- d) $(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 13,9282 \cdot 5,6839 = 79,1669 \approx 79,2$
- e) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$
- f) $\frac{5}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$
- g) $\frac{7x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = 7x \cdot \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = 7x \sqrt[3]{27} = 7x \cdot 3 = 21x$
- h) $\sqrt[3]{27^4} = \sqrt[3]{(3^3)^4} = 3^{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}} = 3^4 = 81$
- i) $125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 5^2 = 25$
- 3 a) $\sqrt{1444 \cdot 729} = \sqrt{1444} \cdot \sqrt{729} = 38 \cdot 27 = 1026$
 b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{105^3} = 105$

$$c) \sqrt{64^2} = (\sqrt{64})^2 = 8^2 = \mathbf{64} \quad \text{oder} \quad \sqrt{64^2} = 64^{\frac{2}{2}} = 64^1 = \mathbf{64}$$

$$d) 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = 3 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{1}$$

$$e) \frac{\sqrt[3]{2560}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{2560}{5}} = \sqrt[3]{512} = \mathbf{8}$$

$$f) \sqrt[4]{81^6} = (\sqrt[4]{81})^6 = 3^6 = \mathbf{729} \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{81^6} = 81^{\frac{6}{4}} = 81^{\frac{3}{2}} = 81^1 \cdot 81^{\frac{1}{2}} = 81 \cdot \sqrt{81} = 81 \cdot 9 = \mathbf{729}$$

$$g) \sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{49}}$$

$$h) 4,3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3,8 \cdot \sqrt[3]{343} = (4,3 - 3,8) \cdot \sqrt[3]{343} = 0,5 \cdot 7 = \mathbf{3,5}$$

$$i) 1\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \left(1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} - 3\right) \cdot \sqrt{3} = (4 - 3) \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \mathbf{\sqrt{3}}$$

$$j) \sqrt{\left(\frac{3,9\text{m} - 2,7\text{m}}{3}\right)^2 + (0,3\text{m})^2} = \sqrt{\left(\frac{1,2\text{m}}{3}\right)^2 + 0,09\text{m}^2} = \sqrt{0,16\text{m}^2 + 0,09\text{m}^2} = \sqrt{0,25\text{m}^2} = \mathbf{0,5\text{m}}$$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.2 Berechnen dekadischer Logarithmen

- 21
- | | | |
|--|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 a) $\lg 2320 = \mathbf{3,365488}$ | b) $\lg 0,873 = \mathbf{-0,0589858}$ | c) $\lg 11,3 = \mathbf{1,0530784}$ |
| d) $\lg 0,990 = \mathbf{-0,0043648}$ | e) $\lg 0,01 = \mathbf{-2}$ | f) $\lg 0,5352 = \mathbf{-0,2714839}$ |
| g) $\lg 120\,000 = \mathbf{5,0791812}$ | | |

- 2 a) $\lg x = 0,752 \Rightarrow x = 10^{0,752} = \mathbf{5,6493697}$
 b) $\lg x = 10,25 \Rightarrow x = 10^{10,25} = \mathbf{1,7783 \cdot 10^{10}}$

1.8.3 Berechnen natürlicher Logarithmen

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 3 a) $\ln 20 = \mathbf{2,9957323}$ | b) $\ln 1000 = \mathbf{6,9077553}$ |
| c) $\ln 0,001 = \mathbf{-6,9077553}$ | d) $\ln 580 = \mathbf{6,3630281}$ |

1.8.4 Logarithmengesetze

- 22
- 1 a) $\lg(147 \cdot 717 \cdot 873) = \lg 92013327 = \mathbf{7,9638507}$ oder
 $\lg(147 \cdot 717 \cdot 873) = \lg 147 + \lg 717 + \lg 873 = 2,1673173 + 2,8555192 + 2,9410142 = \mathbf{7,9638507}$
- b) $\lg \frac{4,38 \cdot 2,19}{871 \cdot 2,52} = \lg(4,3701821 \cdot 10^{-3}) = \mathbf{-2,3595005}$ oder
 $\lg \frac{4,38 \cdot 2,19}{871 \cdot 2,52} = \lg 4,38 + \lg 2,19 - \lg 871 - \lg 2,52$
 $= 0,6414741 + 0,3404441 - 2,9400182 - 0,0414005 = \mathbf{-2,3595005}$
- c) $\lg(0,97^7 \cdot 2,82^{3,5}) = \lg(0,8079828 \cdot 37,659268) = \lg 30,428042 = \mathbf{1,483274}$ oder
 $\lg(0,97^7 \cdot 2,82^{3,5}) = \lg 0,97^7 + \lg 2,82^{3,5} = 7 \cdot \lg 0,97 + 3,5 \cdot \lg 2,82$
 $= 7 \cdot (-0,0132283) + 3,5 \cdot 0,4502491 = -0,0925981 + 1,5758719 = \mathbf{1,4832738}$
- d) $\ln \sqrt[5]{65,931} = \ln 2,311 = \mathbf{0,838}$ oder
 $\ln \sqrt[5]{65,931} = \ln 65,931^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \ln 65,931 = \frac{1}{5} \cdot 4,189 = \mathbf{0,838}$

1.8.5 Logarithmieren bei der pH-Wert-Berechnung

- 1 a) $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 0,040 \text{ mol/L}$
 $\Rightarrow \text{pH} = -\lg c(\text{H}_3\text{O}^+) = -\lg 0,040 = +1,39794 \approx 1,4$
 ONC \square \square 0 \square 4 \square log \square +/- $\Rightarrow 1.39794$
- b) $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 8,5 \cdot 10^{-12} \text{ mol/L}$
 $\Rightarrow \text{pH} = -\lg(8,5 \cdot 10^{-12}) = -(-11,070581) \approx 11$
- c) $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 6,83 \cdot 10^{-5} \text{ mol/L}$
 $\Rightarrow \text{pH} = -\lg(6,83 \cdot 10^{-5}) = -(-4,1655793) \approx 4,17$
- d) $\text{pH} = 2,67$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-2,67} \text{ mol/L} = 0,002138 \text{ mol/L} \approx 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$
- e) $\text{pH} = 7,51$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-7,51} \text{ mol/L} \approx 3,09 \cdot 10^{-8} \text{ mol/L}$
- f) $\text{pH} = 3,7$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-3,7} \text{ mol/L} = 0,0001995 \text{ mol/L} \approx 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L}$
- g) $\text{pH} = 10,2$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-10,2} \text{ mol/L} = 6,3095734 \cdot 10^{-11} \text{ mol/L} \approx 6,31 \cdot 10^{-11} \text{ mol/L}$
- h) $\text{pH} = 0,94$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-0,94} \text{ mol/L} = 0,1148154 \text{ mol/L} \approx 0,11 \text{ mol/L}$

1.9 Lösen von Gleichungen

1.9.1 Lineare Bestimmungsgleichungen

- ▶ 23 1 $8,5x + 4,75 = 9$
 $8,5x = 9 - 4,75$
 $x = \frac{4,25}{8,5}$
 $x = \frac{1}{2}$
- 2 $\frac{3x}{7} = 12$
 $3x = 12 \cdot 7$
 $x = \frac{12 \cdot 7}{3}$
 $x = 28$
- 3 $\frac{7}{x} = \frac{112}{8}$
 $\frac{x}{7} = \frac{8}{112}$
 $x = \frac{8 \cdot 7}{112}$
 $x = 0,5$
- 4 $\frac{23-x}{12} = 2$
 $23-x = 2 \cdot 12$
 $-x = 24 - 23$
 $-x = 1$
 $x = -1$
- 5 $\frac{x-2}{3} = \frac{x}{5}$
 $5(x-2) = 3x$
 $5x - 10 = 3x$
 $2x = 10$
 $x = 5$
- 6 $\frac{15x}{6} + 2,2 = -7,8$
 $\frac{15x}{6} = -7,8 - 2,2$
 $15x = -10 \cdot 6$
 $x = -\frac{60}{15}$
 $x = -4$
- 7 $1,75x = \frac{5}{9}$
 $x = \frac{5}{9 \cdot 1,75} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 7} = \frac{20}{63}$
- 8 $21x + 184 = 57x - 32$
 $21x - 57x = -32 - 184$
 $-36x = -216$
 $x = \frac{216}{36}$
 $x = 6$
- 9 $7x - [8x + (5x - 30)] = 12$
 $7x - [8x + 5x - 30] = 12$
 $7x - 8x - 5x + 30 = 12$
 $-6x = 12 - 30$
 $x = \frac{18}{6}$
 $x = 3$

1.9.2 Quadratische Bestimmungsgleichungen

1

▶ 24

▶ 24 1 $4x^2 - 69 = 31$

$4x^2 = 100$

$x^2 = 25$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x_1 = +5$

$x_2 = -5$

Probe: $x_1 = +5$

$\Rightarrow 4 \cdot 5^2 - 69 = 31$

$100 = 100 \quad \checkmark$

$x_2 = -5$

$\Rightarrow 4 \cdot (-5)^2 - 69 = 31$

$100 = 100 \quad \checkmark$

2 $2x^2 - 16x = 0$

$x \cdot (2x - 16) = 0$

$x_1 = 0$

$2x_2 - 16 = 0$

$2x_2 = 16$

$x_2 = 8$

Probe: $x_1 = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot 0 - 16 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$

$x_2 = 8$

$\Rightarrow 2 \cdot 8^2 - 16 \cdot 8 = 0$

$128 - 128 = 0 \quad \checkmark$

3 $x^2 - 8x - 20 = 0$

$x_{1/2} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2 - (-20)}$

$= 4 \pm \sqrt{16 + 20}$

$= 4 \pm \sqrt{36}$

$= 4 \pm 6$

$x_1 = 10$

$x_2 = -2$

Probe: $x_1 = 10$

$\Rightarrow 10^2 - 8 \cdot 10 - 20 = 0$

$100 - 80 - 20 = 0 \quad \checkmark$

$x_2 = -2$

$\Rightarrow (-2)^2 - 8(-2) - 20 = 0$

$4 + 16 - 20 = 0 \quad \checkmark$

4 $4x^2 - 10 = 6x$

$4x^2 - 6x - 10 = 0 \quad | : 4$

$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0$

$x_{1/2} = -\left(-\frac{3}{2 \cdot 2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)}$

$= +\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{40}{16}}$

$= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}$

$= \frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}$

$x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$x_2 = -\frac{4}{4} = -1$

Probe: $x_1 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10 = 6 \cdot \frac{5}{2}$

$4 \cdot \frac{25}{4} - 10 = \frac{30}{2}$

$25 - 10 = 15 \quad \checkmark$

$x_2 = -1$

$\Rightarrow 4 \cdot (-1)^2 - 10 = 6 \cdot (-1)$

$4 \cdot 1 - 10 = -6$

$4 - 10 = -6 \quad \checkmark$

5 $3x^2 - 15x = -18$

$3x^2 - 15x + 18 = 0 \quad | : 3$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_{1/2} = -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{6}{2} = 3$

$x_2 = \frac{4}{2} = 2$

Probe: $x_1 = 3$

$\Rightarrow 3 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 = -18$

$27 - 45 = -18 \quad \checkmark$

$x_2 = 2$

$\Rightarrow 3 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 = -18$

$12 - 30 = -18 \quad \checkmark$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & -40x - 100 = -5x^2 \\
 & 5x^2 - 40x - 100 = 0 \quad | : 5 \\
 & x^2 - 8x - 20 = 0 \\
 x_{1/2} &= -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - (-20)} \\
 &= +4 \pm \sqrt{16 + 20} \\
 &= +4 \pm \sqrt{36} \\
 &= +4 \pm 6 \\
 \mathbf{x_1} &= +4 + 6 = \mathbf{10} \\
 \mathbf{x_2} &= +4 - 6 = \mathbf{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } x_1 &= 10 \\
 \Rightarrow -40 \cdot 10 - 100 &= -5 \cdot 10^2 \\
 -400 - 100 &= -5 \cdot 100 \\
 -500 &= -500 \quad \checkmark \\
 x_2 &= -2 \\
 \Rightarrow -40 \cdot (-2) - 100 &= -5 \cdot (-2)^2 \\
 +80 - 100 &= -5 \cdot 4 \\
 -20 &= -20 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & 0,3 = -x - 0,6x^2 \\
 0,6x^2 + x + 0,3 &= 0 \\
 \frac{3}{5}x^2 + x + \frac{3}{10} &= 0 \quad | \cdot \frac{5}{3} \\
 x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{2} &= 0 \\
 x_{1/2} &= -\frac{5}{3 \cdot 2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3 \cdot 2}\right)^2 - \frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{18}{36}} \\
 &= -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{7}{36}} \\
 &= -\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{7} \\
 &= -\frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{7}) \\
 \mathbf{x_1} &= -\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) \\
 \mathbf{x_2} &= -\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } x_1 &= -\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) \\
 \Rightarrow 0,3 &= +\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) - 0,6 \left[-\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7})\right]^2 \\
 &= \frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) - \frac{0,6}{36}(5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} + 7) \\
 &= \frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) - \frac{1}{60} \cdot (32 - 10\sqrt{7}) \\
 &= \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{7} - \frac{32}{60} + \frac{1}{6}\sqrt{7} \\
 &= \frac{50}{60} - \frac{32}{60} = \frac{18}{60} \\
 &= \frac{3}{10} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= -\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) \\
 \Rightarrow 0,3 &= +\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) - 0,6 \left[-\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7})\right]^2 \\
 &= \frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) - \frac{0,6}{36}(25 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} + 7) \\
 &= \frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) - \frac{1}{60}(32 + 10\sqrt{7}) \\
 &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{7} - \frac{32}{60} - \frac{1}{6}\sqrt{7} \\
 &= \frac{50}{60} - \frac{32}{60} = \frac{18}{60} \\
 &= \frac{3}{10} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad & -3x^2 = 39x + 18,75 \\
 -3x^2 - 39x - 18,75 &= 0 \quad | : (-3) \\
 x^2 + 13x + 6,25 &= 0 \\
 x_{1/2} &= -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 6,25} \\
 &= -6,5 \pm \sqrt{42,25 - 6,25} \\
 &= -6,5 \pm \sqrt{36} \\
 &= -6,5 \pm 6 \\
 \mathbf{x_1} &= -6,5 + 6 = \mathbf{-0,5} \\
 \mathbf{x_2} &= -6,5 - 6 = \mathbf{-12,5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } x_1 &= -0,5 \\
 \Rightarrow -3 \cdot (-0,5)^2 &= 39 \cdot (-0,5) + 18,75 \\
 -3 \cdot 0,25 &= -19,5 + 18,75 \\
 -0,75 &= -0,75 \quad \checkmark \\
 x_2 &= -12,5 \\
 \Rightarrow -3 \cdot (-12,5)^2 &= 39 \cdot (-12,5) + 18,75 \\
 -3 \cdot 156,25 &= -487,5 + 18,75 \\
 -468,75 &= -468,75 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

9 $x^2 - 4x + 2,25 = x$
 $x^2 - 4x - x + 2,25 = 0$
 $x^2 - 5x + 2,25 = 0$

$$x_{1/2} = -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2,25}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{4}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$$

Probe: $x_1 = \frac{9}{2}$
 $\Rightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{9}{2} + 2,25 = \frac{9}{2}$
 $\frac{81}{4} - \frac{36}{2} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$
 $\frac{18}{4} = \frac{18}{4} \quad \checkmark$

$x_2 = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 2,25 = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{4} - 2 + 2,25 = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{4} + 0,25 = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$

10 $(3-x) \cdot (1-x) = x-1$
 $3-3x-x+x^2 = x-1$
 $x^2-5x+4=0$

$$x_{1/2} = -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Probe: $x_1 = 4$
 $\Rightarrow (3-4) \cdot (1-4) = 4-1$
 $(-1) \cdot (-3) = 3$
 $3 = 3 \quad \checkmark$

$x_2 = 1$
 $\Rightarrow (3-1) \cdot (1-1) = 1-1$
 $2 \cdot 0 = 0$
 $0 = 0 \quad \checkmark$

11 $2 \cdot (2-x) \cdot (1-x) = x^2$
 $2 \cdot (2-2x-x+x^2) = x^2$
 $4-6x+2x^2 = x^2$
 $x^2-6x+4=0$

$$x_{1/2} = -\left(-\frac{6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= 3 \pm \sqrt{9-4}$$

$$= 3 \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{5}$$

Probe: $x_1 = 3 + \sqrt{5}$
 $2 \cdot [2 - (3 + \sqrt{5})] \cdot [1 - (3 + \sqrt{5})] = (3 + \sqrt{5})^2$
 $2 \cdot [2 - 3 - \sqrt{5}] \cdot [1 - 3 - \sqrt{5}] = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 5$
 $2 \cdot (-1 - \sqrt{5}) \cdot (-2 - \sqrt{5}) = 14 + 6\sqrt{5}$
 $2 \cdot (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 5) = 14 + 6\sqrt{5}$
 $2 \cdot (7 + 3\sqrt{5}) = 14 + 6\sqrt{5}$
 $14 + 6\sqrt{5} = 14 + 6\sqrt{5} \quad \checkmark$

$x_2 = 3 - \sqrt{5}$
 $2 \cdot [2 - (3 - \sqrt{5})] \cdot [1 - (3 - \sqrt{5})] = (3 - \sqrt{5})^2$
 $2 \cdot (2 - 3 + \sqrt{5}) \cdot (1 - 3 + \sqrt{5}) = 9 - 2 \cdot 3\sqrt{5} + 5$
 $2 \cdot (-1 + \sqrt{5}) \cdot (-2 + \sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5}$
 $2 \cdot (2 - \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 5) = 14 - 6\sqrt{5}$
 $2 \cdot (7 - 3\sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5}$
 $14 - 6\sqrt{5} = 14 - 6\sqrt{5} \quad \checkmark$

12 $10^{-5} \cdot (12 - x)^2 = x \quad | : 10^{-5}$

$$(12 - x)^2 = \frac{x}{10^{-5}}$$

$$(12 - x)^2 = 10^5 \cdot x$$

$$12^2 - 2 \cdot 12 \cdot x + x^2 = 10^5 \cdot x$$

$$x^2 - 24x - 10^5x + 144 = 0$$

$$x^2 - (24 + 10^5)x + 144 = 0$$

$$x^2 - 100024x + 144 = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(-\frac{100024}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{100024}{2}\right)^2 - 144}$$

$$= 50012 \pm \sqrt{(-50012)^2 - 144}$$

$$= 50012 \pm \sqrt{2501200144 - 144}$$

$$\approx 50012 \pm 50011,99856$$

$$x_1 \approx 50012 + 50011,99856 = \mathbf{100023,99856}$$

$$x_2 \approx 50012 - 50011,99856 = \mathbf{0,00114}$$

Probe:

$$x_1 \approx 100023,99856$$

$$\Rightarrow 10^{-5} \cdot (12,0 - 100023,99856)^2 \approx 100023,99856$$

$$10^{-5} \cdot (-100011,99856)^2 \approx 100023,99856$$

$$100023,9984 \approx 100024 \quad \checkmark$$

$$x_2 \approx 0,00114$$

$$\Rightarrow 10^{-5} \cdot (12,0 - 0,00114)^2 \approx 0,00114$$

$$10^{-5} \cdot 11,99886^2 \approx 0,00114$$

$$0,00114 \approx 0,00114 \quad \checkmark$$

1
▶ 24
25

1.9.3 Wurzelgleichungen

▶ 25 1 $\sqrt{2x} + 5 = 7$

$$\sqrt{2x} = 7 - 5 = 2 \quad |^2$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

2 $\sqrt{4x + 12} = 4 \quad |^2$

$$4x + 12 = 16$$

$$4x = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4}{4} = 1$$

3 $5 + \sqrt{5x - 1} = x$

$$\sqrt{5x - 1} = x - 5 \quad |^2$$

$$5x - 1 = (x - 5)^2$$

$$= x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 10x - 5x + 25 + 1 = 0$$

$$x^2 - 15x + 26 = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(-\frac{15}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 26}$$

$$= 7,5 \pm \sqrt{56,25 - 26}$$

$$= 7,5 \pm \sqrt{30,25}$$

$$= 7,5 \pm 5,5$$

$$x_1 = 7,5 + 5,5 = \mathbf{13}$$

$$x_2 = 7,5 - 5,5 = \mathbf{2}$$

Probe: $x_1 = 13$

$$5 + \sqrt{5 \cdot 13 - 1} = 13$$

$$5 + \sqrt{65 - 1} = 13$$

$$5 + 8 = 13 \quad \checkmark$$

$$x_2 = 2$$

$$5 + \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 2$$

$$5 + \sqrt{9} = 2$$

$$5 + 3 \neq 2 \quad \text{⚡}$$

1

► 25

$$\begin{aligned}
 4 \quad \sqrt{10-x} &= \sqrt{6+x} & |^2 \\
 10-x &= 6+x \\
 -x-x &= 6-10 \\
 +2x &= +4 \\
 x &= \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad \sqrt{3x-2} &= \sqrt{8x} & |^2 \\
 3x-2 &= 8x \\
 3x-8x &= 2 \\
 -5x &= 2 \\
 x &= -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

1.9.4 Exponentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 1 \quad \frac{4}{3} &= 10^{2x-3} & | \lg \\
 \lg \frac{4}{3} &= \lg(10^{2x-3}) \\
 \lg \frac{4}{3} &= (2x-3) \cdot \lg 10 & \text{ mit } \lg 10 = 1 \\
 2x-3 &= \lg \frac{4}{3} \\
 2x &= \lg \frac{4}{3} + 3 \\
 x &= \frac{\lg \frac{4}{3} + 3}{2} \approx 1,562
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad k &= A \cdot e^{\frac{E_a}{R \cdot x}} \\
 e^{\frac{E_a}{R \cdot x}} &= \frac{k}{A} & | \ln \\
 \frac{E_a}{R \cdot x} &= \ln\left(\frac{k}{A}\right) \\
 E_a &= R \cdot x \cdot \ln\left(\frac{k}{A}\right); \quad x = \frac{E_a}{R \cdot \ln\left(\frac{k}{A}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad 3 \cdot e^{-0,25x} &= 17 & | \ln \\
 \ln(3 \cdot e^{-0,25x}) &= \ln 17 \\
 \ln 3 + \ln e^{-0,25x} &= \ln 17 \\
 \ln 3 + (-0,25x) \cdot \ln e &= \ln 17 & \text{ mit } \ln e = 1 \\
 \ln 3 - 0,25x &= \ln 17 \\
 -0,25x &= \ln 17 - \ln 3 \\
 x &= -\frac{\ln 17 - \ln 3}{0,25} \approx -\frac{2,833 - 1,097}{0,25} \approx -6,944
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad e^{x-3} &= 4^{3x} & | \ln \\
 \ln(e^{x-3}) &= \ln(4^{3x}) \\
 (x-3) \cdot \ln e &= 3x \cdot \ln 4 & \text{ mit } \ln e = 1 \\
 x-3-3x \cdot \ln 4 &= 0 \\
 x(1-3 \cdot \ln 4) &= 3 \\
 x &= \frac{3}{1-3 \ln 4} \approx \frac{3}{1-3 \cdot 1,386} \approx -0,950
 \end{aligned}$$