Theoretische Physik

Band 7A

Walter Greiner
Joachim Reinhardt

Feldquantisierung

Verlag Harri Deutsch

Theoretische Physik
Band 7A
Walter Greiner / Joachim Reinhardt
Feldquantisierung

Walter Greiner

Theoretische Physik

Band 1: Mechanik, Teil 1
Band 2: Mechanik, Teil 2
Band 3: Elektrodynamik
Band 4: Quantenmechanik, Teil 1: Einführung
Band 5: Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien
Band 6: Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen
Band 7: Quantenelektrodynamik
Band 8: Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung
Band 9: Thermodynamik und Statistische Mechanik
Band 10: Quantenchromodynamik

Ergänzungsbände

Band 2 A: Hydrodynamik
Band 3 A: Spezielle Relativitästheorie
Band 4 A: Quantentheorie, Spezielle Kapitel
Band 7 A: Feldquantisierung

In Vorbereitung:

Physik der Elementarteilchen, Theoretische Grundlagen
Modelle der Elementarteilchen
Kernmodelle
Quantenstatistik
Allgemeine Relativitästheorie und Gravitation

Theoretische Physik

Band 7A

Walter Greiner
Joachim Reinhardt

Feldquantisierung

Ein Lehr- und Übungsbuch

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen
und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

1. Auflage 1993

Verlag Harri Deutsch

Professor Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. Walter Greiner ist Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main
Dr. phil. nat. Joachim Reinhardt ist Akademischer Oberrat am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Theoretische Physik. – Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch
Bd. 7a. Greiner, Walter: Feldquantisierung. – 1993

Greiner, Walter:
Feldquantisierung / Walter Greiner ; Joachim Reinhardt. –
Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch, 1993
(Theoretische Physik ; Bd. 7a)
ISBN 3-87144-975-X
NE: Reinhardt, Joachim:

ISBN 3-87144-975-X

1. Auflage 1993

Vorwort

Die Theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Thermodynamik und Statistische Mechanik, Festkörperphysik, bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweihen; Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden.

An der Johann Wolfgang Goethe–Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die Theoretische Physik in das 1. Studiensemester vorverlegt. Darum werden die Mechanik 1 und 2, die Elektrodynamik, die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie 2, Thermodynamik und Statistische Mechanik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungen und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Theorie der Elementarteilchen usw. Einige davon wie z. B. die zweisemestrigen Vorlesungen über Theoretische Kernphysik bzw. Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Der vorliegende Band der Vorlesungen befaßt sich mit der Feldquantisierung, also einem etwas spezielleren Thema, das nichtsdestoweniger das Herzstück vieler Entwicklungen in der Theoretischen Physik bildet. Die Erkenntnis, daß eine klassische Feldtheorie, nämlich die Elektrodynamik, um korpuskulare und nichtdeterministische Eigenschaften erweitert werden muß, stand an der Wiege der Quantentheorie. Etwa um 1930 wurde erkannt, daß nicht nur das Strahlungsfeld mit seinen Photonen, sondern auch alle Materiefelder einheitlich der „zweiten Quantisierung" zu unterwerfen sind. Die Materie wird dabei durch operatorwertige Felder beschrieben, die bestimmte Kommutationsrelationen erfüllen. Dies führt auf eine Theorie für Systeme von mehreren Teilchen (Feldquanten) und erlaubt es auf natürliche Weise, die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen zu beschreiben. Dies Quantenfeldtheorie ist die Sprache der modernen Theoretischen Physik. Nicht nur die Hochenergie- und Elementarteilchenphysik, sondern auch die Vielteilchentheorie, also etwa die Festkörper-, Kern- und Atomphysik machen von quantenfeldtheoretischen Methoden Gebrauch.

Das Ziel des vorliegenden Bands ist es, die Methoden der Feldquantisierung selbst, also ohne Hinblick auf spezielle Anwendungen, zu vermitteln. Entstanden ist dieses Buch als Begleiter des Bands 7 dieser Reihe (Quantenelektrodynamik), in dem das Schwergewicht auf der konkreten Berechnung physikalischer Prozesse lag, ohne daß näher auf die feldtheoretischen Grundlagen eingegangen wurde. Der Stoff dieses Bandes ist jedoch weitgehend in sich abgeschlossen, so daß die Kenntnis der Quantenelektrodynamik keine Voraussetzung für die Lektüre bildet. Vorausgesetzt werden jedoch Kenntnisse der (nichtrelativistischen und relativistischen) Quantenmechanik.

Zur Einleitung und Wiederholung befassen wir uns zunächst in den ersten beiden Kapiteln mit der klassischen und quantenmechanischen Beschreibung schwingender Systeme und mit der klassischen Feldtheorie, insbesondere den Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Im Hauptteil werden nacheinander das freie nichtrelativistische Schrödinger-Feld und die freien relativistischen Felder mit Spin 0, Spin $\frac{1}{2}$ und Spin 1 der „kanonischen Quantisierung" unterworfen und ausführlich untersucht. Die nächsten beiden Kapitel befassen sich mit der Wechselwirkung zwischen Quantenfeldern und beschreiben, wie man mit den Mitteln der Störungstheorie physikalische Observable, insbesondere die Streumatrix, systematisch berechnen kann. Dies wird ergänzt durch ein Kapitel über diskrete Symmetrietransformationen, die bei der Entwicklung und Untersuchung von Elementarteilchenmodellen eine große Rolle spielen.

Der letzte Teil des Buchs enthält die Beschreibung eines Formalismus, der in Konkurrenz zur „klassischen" Technik der kanonischen Quantisierung steht, nämlich der Methode der Pfadintegration. Obwohl im Prinzip äquivalent zur kanonischen Methode, erfreut sich die Pfadintegral-Quantisierung steigender Beliebtheit. Neben ihrer formalen Eleganz besteht der Hauptgrund dafür in der Flexibilität beim Einbau von Zwangsbedingungen, wie sie bei der Beschreibung von Eichtheorien auftreten. Es ist heute unumgänglich, beide Zugänge zur Feldquantisierung zu kennen.

Wie schon erwähnt liegt das Hauptaugenmerk dieser Vorlesung auf einer detaillierten Beschreibung der Methoden der Feldquantisierung selbst, nicht auf deren Anwendung. Die Vorlesung ist so gehalten wie die anderen Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeugs, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir den Stoff so klar und interessant wie möglich darzustellen.

Die Behandlung eines wichtigen Bereichs der Quantenfeldtheorie, nämlich der Theorie der Renormierung, geht über den Rahmen dieses Bandes hinaus. Dies ist einem weiteren Band der Reihe vorbehalten, in dem dieses Thema im Zusammenhang mit den für die moderne Teilchenphysik grundlegenden nichtabelschen Eichtheorien behandelt wird.[1]

Unser besonderer Dank gilt Herrn Dipl. Phys. Christian Hofmann, der das Manuskript sorgfältig (und hoffentlich erfolgreich) auf Fehler überprüfte und viele Verbesserungs-

[1] W. Greiner und A. Schäfer: *Eichtheorie*, in Vorbereitung.

vorschläge machte. Wir bemühen uns, das Layout aller Bände dieser Reihe einheitlich zu gestalten. Dabei gilt unser Dank den Herren Dipl.-Phys. Ch. Best, K. Griepenkerl und M. Vidović, die zu diesem Zweck eine neue LaTeX-Umgebung erstellten. Ein besonderer Dank gebührt auch Frau Astrid Steidl, die einen großen Teil der Zeichnungen anfertigte.

Frankfurt am Main, im August 1992

Walter Greiner   Joachim Reinhardt

Inhaltsverzeichnis

III. Pfadintegral-Quantisierung

Aufgaben und Beispiele

Teil I

Vielteilchensysteme und klassische Feldtheorie

Kapitel 1

Klassische und Quantenmechanik von Teilchensystemen

1.1 Einleitung

Gegenstand dieser Vorlesungen ist die quantentheoretische Behandlung von Systemen, die durch eine *Feldtheorie* beschrieben werden. Ausgehend von den Vorstellungen der klassischen Physik mag man beim Begriff des Felds zunächst an makroskopische Größen denken, wie zum Beispiel Strömungs- oder Temperaturfelder usw. Solche Felder interessieren uns hier jedoch nicht, denn sie sind abgeleitete Größen, die durch Mittelung über mikroskopische Teilchendichten etc. entstehen. Auf einem fundamentalen mikroskopischen Niveau wird die Materie jedoch ebenfalls durch Felder beschrieben: Hier ist es die *quantenmechanische Wellenfunktion* $\psi(\vec{x},t)$, aus der die Dynamik aller Observablen eines Systems abgeleitet werden kann. In der Quantenmechanik ist die Wellenfunktion als ein gewöhnliches zahlenwertiges Feld (in Diracs Terminologie eine „c-Zahl"). Die Quantenfeldtheorie geht einen Schritt weiter und betrachtet die Wellenfunktion selbst als eine zu quantisierende Größe. Das heißt: Die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ wird zu einem *Feldoperator* $\hat{\psi}(\vec{x},t)$, für den gewisse Kommutationsbeziehungen gefordert werden. Diese sogenannte „zweite Quantisierung" steht in Analogie zum Vorgehen in der gewöhnlichen Quantenmechanik, wo aus einem Satz von klassischen Koordinaten q_i quantenmechanische Operatoren $\hat{q}_i$ werden. Ein technischer Unterschied besteht allerdings darin, daß es sich bei $\psi(\vec{x},t)$ um ein Feld handelt, also um eine Größe, die von den Koordinaten als „kontinuierlichen Indizes" abhängt, im Gegensatz zu dem diskreten Index von q_i.

Die Idee der Feldquantisierung hat weitreichende Konsequenzen; sie ist aus der modernen Physik nicht wegzudenken. Zunächst liefert sie eine elegante Sprache zur quantenmechanischen Beschreibung von Teilchensystemen. Wichtiger noch ist, daß die Feldquantisierung in natürlicher Weise zu der Erkenntnis führt, daß Feldquanten *erzeugt und vernichtet* werden können. Hierbei kann es sich um Elementarteilchen handeln (in der Hochenergiephysik) oder auch um Quasiteilchen, d.h. kollektive Anregungen in einem makroskopischen (z.B. Phononen in der Festkörperphysik) oder mikroskopischen (z.B. Schwingungen in der Kernphysik) Systemen. Natürlich gehört auch die Emission und Absorption von Lichtquanten, also von Photonen, zu diesen Prozessen. Tatsächlich war es das elektromagnetische Feld, bei dem am frühesten die

Notwendigkeit einer Feldquantisierung erkannt wurde.

Nach den Regeln der Quantentheorie unterliegen die Felder *Fluktuationen*, die sich sogar im Vakuum, also bei Abwesenheit von reellen Teilchen bemerkbar machen können. Die Beschreibung der Effekte solcher Vakuumfluktuationen in wechselwirkenden Systemen ist von zentraler Bedeutung in der Quantenfeldtheorie. In dieser Vorlesung werden wir darauf und auf das damit eng verbundene Thema der Renormierung allerdings nur wenig eingehen. Unser Hauptthema ist der Übergang von klassischen zu Quantenfeldern.

Im folgenden ersten Kapitel werden wir zur Vorbereitung kurz an den Formalismus der klassischen Mechanik für Punktteilchen erinnern. Anschließend erwähnen wir das Verfahren zur Quantisierung solcher Systeme, speziell am Beispiel des harmonischen Oszillators. Schließlich wird ein System von harmonisch gekoppelten Massenpunkten (die schwingende Kette) diskutiert. Im Kontinuumslimes liefert dies ein Modell für eine einfache Feldtheorie.

1.2 Klassische Mechanik von Massenpunkten

In stark geraffter Form sollen hier die Grundgleichungen der Punktmechanik zusammengestellt werden[1]. Wir betrachten ein strukturloses Teilchen der Masse m in einer Dimension, welches sich unter dem Einfluß eines zeitunabhängigen Potentials $V(q)$ bewegt. Die Zeitentwicklung der Trajektorie $q(t)$ wird durch die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \tag{1.1}$$

mit gewissen Anfangsbedingungen $q(t_0)$ und $\dot{q}(t_0)$ bestimmt. Eine alternative und flexiblere formale Beschreibung erhält man mit Hilfe der Lagrange-Funktion

$$L(q,\dot{q}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \tag{1.2}$$

und der daraus gewonnenen Wirkung

$$W = \int_{t_0}^{t_1} d\tau\, L(q(\tau),\dot{q}(\tau))\ . \tag{1.3}$$

Die Bewegungsgleichung kann man dann aus einem Variationsproblem ableiten, nämlich dem Hamiltonschen Prinzip der extremalen Wirkung. Das Teilchen wird

[1] Vergleiche Greiner, Mechanik, Band 1,2 dieses Kurses

derjenigen Bahn folgen, für welche die Wirkung unter Variation einen stationären Wert annimmt

$$\delta W = 0 \,. \tag{1.4}$$

Variiert werden $q(t)$ und $\dot{q}(t)$ mit der Randbedingung $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$. Die Variationsrechnung liefert daraus eine Bestimmungsgleichung für die Trajektorie $q(t)$ in Form der Differentialgleichung von Euler und Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \,, \tag{1.5}$$

was wegen der Lagrange-Funktion (2) genau mit Newtons Gleichung übereinstimmt.

Eine weitere äquivalente Formulierung ergibt sich, wenn man den kanonisch konjugierten Impuls

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{1.6}$$

als unabhängige Variable anstelle der Geschwindigkeit $\dot{q}$ einführt. Mittels einer Legendre-Transformation geht man von dem Variablenpaar $(q, \dot{q})$ zu (q, p) über. Dazu wird die Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = p\,\dot{q}(p) - L(q, \dot{q}(p)) \tag{1.7}$$

definiert. Die Bewegung des Punktteilchens wird dann durch ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \,, \tag{1.8a}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1.8b}$$

bestimmt. Diese Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind wiederum zur Newtonschen Gleichung äquivalent (aber allgemeiner als diese).

Abschließend erinnern wir noch an die Formulierung mittels Poissonklammern. Die Poissonklammern zweier dynamischer, d.h. von p und q abhängiger Größen $A(p,q)$ und $B(p,q)$ sind definiert durch

$$\{A\,,\,B\}_{\mathrm{PK}} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} \,. \tag{1.9}$$

Mit den Hamiltongleichungen (8) erkennt man, daß sich die Zeitableitung einer dynamischen Größe durch deren Poissonklammer mit der Hamilton-Funktion ausdrücken läßt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial A}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \{A\,,\,H\}_{\mathrm{PK}}\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Insbesondere ist die Hamilton-Funktion selbst eine Erhaltungsgröße, wenn keine explizite Zeitabhängigkeit im Potential (oder gegebenenfalls der Masse) auftritt

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H\,,\,H\}_{\mathrm{PK}} = \frac{\partial H}{\partial t}\,. \tag{1.11}$$

Die Poissonklammern der Koordinaten untereinander sind mit (1.9)

$$\{p\,,p\}_{\mathrm{PK}} = \{q\,,\,q\}_{\mathrm{PK}} = 0\,, \tag{1.12a}$$

$$\{q\,,\,p\}_{\mathrm{PK}} = 1\,. \tag{1.12b}$$

Alle Gleichungen dieses Abschnitts lassen sich problemlos auf Systeme mit mehreren (zunächst endlich vielen) Freiheitsgraden erweitern. Aus q und p werden dann mehrkomponentige „Vektoren“ $q_i, p_i, i = 1, \ldots, N$, und die Bewegungsgleichungen enthalten entsprechende Indizes. Über wiederholte Indizes ist zu summieren.

Die Methoden von Lagrange und Hamilton bieten eine elegante und flexible Beschreibung dynamischer Systeme. Sie lassen sich für beliebige Sätze von generalisierten Koordinaten q_i anwenden, es muß nur die Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion bekannt sein. Auch der Übergang zwischen verschiedenen Koordinaten läßt sich durch kanonische Transformationen elegant formulieren.

1.3 Quantenmechanik – Der harmonische Oszillator

Von der klassischen zur quantenmechanischen Beschreibung eines Systems kann man gelangen, indem man von den klassischen zahlenwertigen dynamischen Variablen zu linearen Operatoren in einem Hilbertraum übergeht. Im bisher betrachteten eindimensionalen Fall wird also ersetzt $q \to \hat{q}$ und $p \to \hat{p}$. Quantenmechanische Operatoren kommutieren im allgemeinen nicht miteinander. Den Kommutationsrest zweier Operatoren $[\hat{A}\,,\,\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ kann man durch folgendes Postulat aus den klassischen Poissonklammern (1.9) erhalten

$$\{A\,,\,B\}_{\mathrm{PK}} \to \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{A}\,,\,\hat{B}]\,. \tag{1.13}$$

Für die Orts- und Impulsoperatoren bedeutet dies nach (1.12) Heisenbergs fundamentale Quantisierungsbedingung

$$[\hat{q}\,,\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\,, \tag{1.14}$$

wobei auf der rechten Seite der Einheitsoperator $\hat{\mathbb{I}}$ hinzuzudenken ist. Ein Zustand des Quantensystems wird durch einen Vektor im Hilbertraum beschrieben; in Diracs Notation handelt es sich um einen ket-Vektor $|\Psi\rangle$. Es gilt das Superpositionsprinzip. Passend zum Raum der Vektoren $|\Psi\rangle$ wird ein dualer Vektorraum von adjungierten Vektoren (bra-Vektoren $\langle\Phi|$) konstruiert. Der Überlapp zweier Vektoren $\langle\Phi|\Psi\rangle$ ist eine komplexe Zahl und besitzt die üblichen Eigenschaften eines Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2\rangle &= \alpha\langle\Phi|\Psi_1\rangle + \beta\langle\Phi|\Psi_2\rangle \\
\langle\Phi|\Psi\rangle^* &= \langle\Psi|\Phi\rangle \\
\langle\Phi|\Phi\rangle = 0 &\leftrightarrow |\Phi\rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

Gemäß der probabilistischen Natur der Quantenmechanik bedeutet das Betragsquadrat $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein im Zustand $|\Psi\rangle$ präpariertes System im Zustand $|\Phi\rangle$ angetroffen wird. Meßbaren Größen werden Operatoren $\hat{O}$ zugeordnet. Diese observablen Operatoren müssen hermitesch (selbstadjungiert[2]) sein, d.h. der durch

$$\langle\Phi|\hat{O}^\dagger\Psi\rangle = \langle\hat{O}\Phi|\Psi\rangle \tag{1.15}$$

definierte hermitesch adjungierte Operator $\hat{O}^\dagger$ muß mit $\hat{O}$ übereinstimmen. Dies stellt sicher, daß die Meßwerte reelle Zahlen sind.

Der statistische Mittelwert einer Meßgröße wird durch den Erwartungswert des zugehörigen Operators in einem Quantenzustand beschrieben

$$O = \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle\,. \tag{1.16}$$

Bei häufiger Wiederholung einer solchen Messung (in einem Ensemble von identisch präparierten Systemen) werden die Meßwerte eine statistische Schwankung aufweisen, die durch

$$(\Delta O)^2 = \langle\Psi|(\hat{O} - O)^2|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{O}^2|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle^2 \tag{1.17}$$

[2] Die für die Gleichsetzung dieser Begriffe wichtige mathematischen Frage des Definitionsbereichs der Operatoren soll hier nicht betrachtet werden.

gegeben ist. Die Schwankung verschwindet (d.h. der Meßwert ist scharf definiert), wenn $|\Psi\rangle$ ein Eigenzustand

$$\hat{O}\,|\Psi\rangle = O|\Psi\rangle \tag{1.18}$$

des Operators $\hat{O}$ mit dem Eigenwert O ist. $|\Psi\rangle$ kann nicht gleichzeitig Eigenzustand zweier nicht miteinander kommutierender Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ sein. In diesem Fall gilt die Unschärferelation

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \Psi\right|[\hat{A}\,,\,\hat{B}]\left|\Psi\right\rangle\right| , \tag{1.19}$$

und speziell für Orts- und Impulsvariable

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{1}{2}\hbar\,. \tag{1.20}$$

Die Eigenzustände eines selbstadjungierten Operators bilden eine Basis des Hilbertraums, d.h. jeder Vektor läßt sich nach diesem Satz entwickeln. Hierbei treten eine Summe über die diskreten Eigenzustände und ein Integral über das kontinuierliche Spektrum auf.

Die Eigenzustände des Ortsoperators beschreiben ein Teilchen, das sich sich an einem bestimmten Punkt aufhält

$$\hat{q}\,|q\rangle = q\,|q\rangle\,. \tag{1.21}$$

Dementsprechend verschwindet der Überlapp mit einem an anderer Stelle lokalisierten Zustand. Man normiert „auf Deltafunktion"

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q-q')\,. \tag{1.22}$$

Weiterhin gilt die Vollständigkeitsrelation

$$1 = \int dq\,|q\rangle\langle q|\,. \tag{1.23}$$

Durch Projektion eines Zustandsvektors $|\Psi\rangle$ auf Orts-Eigenzustände erhält man die Schrödinger-Wellenfunktion in Ortsdarstellung

$$\psi(q) = \langle q|\Psi\rangle\,. \tag{1.24}$$