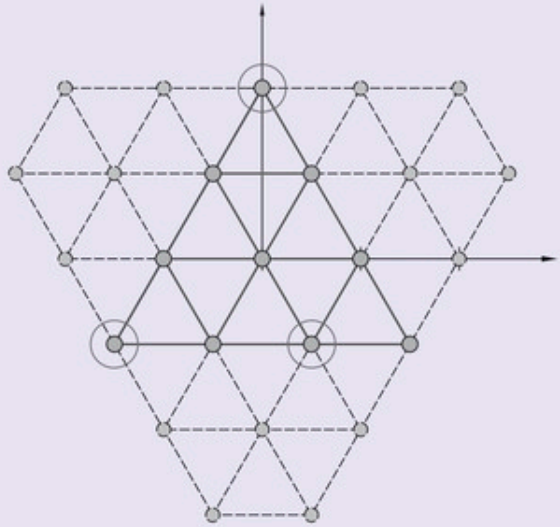
Greiner
Müller



QUANTENMECHANIK
SYMMETRIEN

Edition Harri Deutsch

EUROPA LEHRMITTEL

Quantenmechanik

Symmetrien

EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Quantenmechanik

Symmetrien

von

Walter Greiner
Berndt Müller

5., korrigierte Aufl ge

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56382

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS)
Johann Wolfgang Goethe-Universität
D-60438 Frankfurt am Main

Prof. Dr. Berndt Müller
Department of Physics
Duke University
Durham, NC 27708-0305, USA

5., korrigierte Auflag 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5639-9

ISBN 978-3-8085-5818-8 (E-Book)

http://www.europa-lehrmittel.de
Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Theoretische Physik

von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner

Seit vielen Jahren zählen die Bände der Reihe *Theoretische Physik* zu den weltweit geschätzten und wegweisenden Lehrbüchern, mit denen Generationen von Studierenden ihre Physikausbildung erfolgreich gestaltet haben. Damit führt Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner die Tradition der klassischen Buchreihen von Sommerfeld, von Planck und von Landau und Lifschitz fort, einen zusammenhängenden Blick auf das große Wissenschaftsfeld der Physik zu geben. Englische, französische, japanische und chinesische Ausgaben untermauern die Bedeutung des Werkes *Theoretische Physik*.

Auf über 7 000 Seiten lehrt Walter Greiner, der Herausgeber und Hauptautor, Physik mit einem eigenständigen, didaktisch geschickten Konzept: Vermittlung der theoretischen Grundlagen und deren Anwendung anhand vieler ausführlicher Beispiele und Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen – insbesondere auch zu aktuellen Themen. Denn nichts ist für den Studierenden von größerer Bedeutung, als im Detail zu erleben, wie die theoretischen Konzepte und Werkzeuge auf konkrete Probleme angewandt werden, die für den arbeitenden Physiker von Interesse sind. Walter Greiner begleitet seine Ausführungen mit einer sorgfältigen Entwicklung der benötigten mathematischen Methoden. Biografisch und geschichtliche Notizen schlagen die Brücke zu den Wegbereitern der modernen Physik.

So entstand ein lebendiges Konzept von integrierten Lehr- und Übungsbüchern. Pragmatisch orientiert, aber ohne Abstriche an der theoretischen Grundlegung des Stoffes, gelingt es Walter Greiner, den Lernenden einen schnellen Zugang zum theoretisch-physikalischen Denken zu ebnen und sie für die physikalische Wissenschaft zu begeistern.

Vorwort zur 5. Auflage

Die Theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Festkörperphysik bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweihen und so Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muss auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die Theoretische Physik in das 1. Studiensemester vorverlegt. Darum werden die Mechanik I und II, die Elektrodynamik und die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie II, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pfl chtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungen und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, Klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der Schwachen Wechselwirkung, Theorie der Elementarteilchen usw. Einige davon, wie z.B. die zweisemestrigen Vorlesungen über Theoretische Kernphysik bzw. Theoretische Festkörperphysik, gehören auch zu den Pflichte für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier die Symmetrien in der Quantenmechanik vor. Die Vorlesung ist so gehalten wie die Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeuges, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir den Stoff so interessant wie möglich darzustellen. Dabei haben wir mit den Symmetrien in der Quantenmechanik ein besonders schönes Thema angesprochen.

Die getroffene Stoffauswahl ist unkonventionell, entspricht aber unserer Meinung nach der Bedeutung dieses Gebietes in der modernen Physik. Nach kurzer Vorstellung einiger Symmetrien in der klassischen Mechanik zeigen wir ihre Bedeutung in der Quantenmechanik auf, besprechen ausführlich die Konsequenzen der Rotationssymmetrie und gelangen so zur allgemeinen Theorie der Lie-Gruppen. Die Isospingruppe, die Hyperladung, die SU(3)-Symmetrie und ihre Anwendung in der modernen Elementarteilchenphysik werden ausführlich besprochen.

Wichtige mathematische Sätze haben wir zunächst ohne Beweis zitiert und in ihrer Bedeutung heuristisch erläutert. Kapitel über die Permutationsgruppe, die Methode der Young-Tableaux und über Gruppencharaktere erläutern das Handwerkszeug für die Anwendung der Theorie der Symmetriegruppen. Mit der Behandlung von Charm und der SU(4)-Symmetrie gelangen wir zu einem immer noch sehr aktuellen Gebiet der Physik.

Eine größere mathematische Ergänzung über Wurzelvektoren und klassische Lie-Algebren vertieft das Gesagte, und je ein Kapitel über spezielle diskrete Symmetrien, dynamische Symmetrien, nicht-kompakte Lie-Gruppen und das wichtige Racah'sche Theorem runden die Vorlesung ab.

Dies alles sind Themen, die jüngere Physikerinnen und Physiker faszinieren, weil sie ihnen zeigen, dass man auch schon im 5. Semester ohne Niveauverlust an Fragen der Spitzenforschung herangeführt werden kann. Das in den letzten Jahren aktuell gewordene Thema der Supersymmetrie haben wir allerdings bewusst ausgelassen, um eine Überfrachtung zu vermeiden.

Die neue Auflag erscheint erstmals in der Edition Harri Deutsch des Verlags Europa-Lehrmittel.

Mai 2014
Frankfurt am Main — Walter Greiner

Die Mitarbeiter

An den bisherigen Auflage   haben im Laufe der Jahre viele ehemalige Studierende, Doktoranden und Assistenten mitgearbeitet:

Verbesserter Nachdruck der 2. englischen Aufl ge (1994)

Wir danken allen Kollegen und Studenten für ihre hilfreichen Kommentare, vor allem Prof. Dr. P. O. Hess (Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, Mexico City) und Dr. U. Eichmann, der bei der Verbesserung mehrerer Übungen und Beispiele mitgeholfen und den Nachdruck vorbereitet hat.

2. englische Aufl ge (1994)

Zahlreichen Kollegen und Lesern schulden wir Dank für ihre hilfreichen Kommentare, allen voran Herrn Prof. L. Wilets (Seattle), der uns eine ausführliche Liste von inhaltlichen Unzulänglichkeiten und Druckfehlern zur Verfügung gestellt hat. Zu großem Dank verpflichte sind wir auch gegenüber Prof. P. O. Hess (Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, Mexico City) für seine Korrekturen und wertvolles, ergänzendes Material zu Kapitel 12. Wir danken schließlich Herrn Dr. R. Mattiello, der die Vorbereitung der zweiten englischen Auflag überwacht hat.

1. englische Aufl ge (1989)

Für die erste englische Auflag bedanken wir uns bei M. Berenguer, S. Butorac, C. Derreth, Dr. K. Geiger[2], Dr. M. Grabiak, C. Greiner, C. Hartnack, Dr. R. Herrmann, R. Mattiello, D. Neubauer, J. Rau, W. Renner, D. Rischke, T. Schönfeld und Dr. S. Schramm für ihre Mitarbeit. Frau A. Steidl besorgte die Abbildungen. Allen sind wir zu aufrichtigem Dank verpflich et. Wir danken ferner Herrn Dr. K. Langanke und Herrn R. Könning vom Fachbereich Physik der Universität Münster für ihre wertvollen Kommentare zur deutschen Auflage Wir möchten insbesondere Herrn Dipl.-Phys. B. Waldhauser für seine vielfältige Hilfe danken. Seine organisatorischen Talente und seine Ratschläge in technischen Fragen haben wir sehr geschätzt.

4. Aufl ge (2004)

Besonderen Dank schulden wir Frau Astrid Steidl für die Erfassung der Abbildungen in elektronischer Form sowie den Herren Dr. Rainer Kissener und Dr. Stefan Scherer für ihre sorgfältige Unterstützung bei der Erstellung der deutschen Neuauflage, der Aktualisierung des Textes und der Überwachung der Drucklegung.

3. Aufl ge (1989)

Diesmal bedanken wir uns besonders bei Frau A. Steidl für die Gestaltung der Zeichnungen, bei Herrn Dipl.-Phys. T. Schönfeld für die Edition und bei den Herren Dr. R. Herrmann, Dr. V. Schneider, Dr. S. Schramm, den Herren Dipl.-Phys. K. Geiger[2] , C. Greiner, R. Heuer, L. Neise und bei den Herren K. Griepenkerl, M. Hafner, U. Katscher und K. Lutz für ihre Hilfe bei der Drucklegung sowie bei den Herren Dipl.-Phys. D. Rischke und T. Schönfeld für die Ausarbeitung einiger Übungsaufgaben. Unser besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Phys. R. Maaß für die Ausarbeitung des Kapitels über Lie-Algebren nichtkompakter Lie-Gruppen.

2. Aufl ge (1985)

Unser besonderer Dank gilt auch diesmal Frau B. Utschig, vor allem für das Anfertigen der zahlreichen Illustrationen. Weiterhin möchten wir uns bei den Studenten J. Fink, S. Graf, C. Greiner, C. Ionescu, L. Neise, A. Rosenhauer, C. Scheich, S. Schramm, C. Schweitzer und B. Waldhauser sowie bei Frau Ellen Pfiste für ihre unermüdliche Hilfe bei der Erstellung des Manuskripts bedanken. Unser Dank gilt ferner Herrn Dr. P. O. Hess für die Ausarbeitung des Kapitels über Gruppencharaktere, sowie Herrn Dr. U. Müller für die Betreuung der Drucklegung.

1. Aufl ge (1979)

Wir bedanken uns bei Frau R. Lasarzig und Frau B. Utschig für ihre große Hilfe bei der Anfertigung des Manuskripts. Vor allem sei aber unseren Mitarbeitern Dr. H. Stock, Dr. J. Hofmann und Dr. P. O. Hess für ihre tatkräftige Unterstützung bei der Ausarbeitung der Vorlesung gedankt. Sie haben durch ihre Anregungen wesentlich zum Gelingen beigetragen.

---

[2] Wir gedenken besonders Herrn Dr. Klaus Kinder-Geiger, der am 2. September 1998 beim Absturz von Flug Swiss Air 111 vor Long Island ums Leben gekommen ist.

Inhaltsverzeichnis

I Symmetrien in der Quantenmechanik 1

1 Symmetrien in der klassischen Physik 1
2 Raumverschiebungen in der Quantenmechanik 17
3 Der unitäre Verschiebungsoperator 18
4 Die Bewegungsgleichung für räumlich verschobene Zustände . . . 20
5 Symmetrie und Entartung von Zuständen 22
6 Zeitverschiebungen in der Quantenmechanik 29
7 Definitio einer Gruppe 32
8 Rotationen und ihre Gruppeneigenschaften 34
9 Ein Isomorphismus der Rotationsgruppe 37
10 Infinitesimal und endliche Drehungen 39
11 Die Isotropie des Raumes 41
12 Der Drehoperator für Vielteilchenzustände 51

II Drehimpulsalgebra und Darstellung der Drehimpulsoperatoren . . 53

13 Irreduzible Darstellungen der Rotationsgruppe 53
14 Matrixdarstellungen der Drehimpulsoperatoren 58
15 Die Addition von zwei Drehimpulsen 66
16 Berechnung von Clebsch-Gordan-Koeffiziente 70
17 Rekursionsformeln für Clebsch-Gordan-Koeffiziente 71
18 Explizite Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffiziente 72

III Mathematische Ergänzung: Elementares über Lie-Gruppen 81

19 Allgemeine Struktur von Lie-Gruppen 81
20 Kommutatoren als verallgemeinerte Vektorprodukte 91
21 Algebraische Begriffe 93
22 Kompakte Lie-Gruppen und Lie-Algebren 100
23 Invariante Operatoren (Casimir-Operatoren) 100
24 Racah'sches Theorem 101
25 Erläuterungen zu Multipletts 101
26 Invarianz unter einer Symmetriegruppe 104
27 Konstruktion des invarianten Operators 107
28 Casimir-Operatoren Abel'scher Lie-Gruppen 109
29 Vollständigkeitsrelation für Casimir-Operatoren 110
30 Zusammenstellung einiger Gruppen und ihrer Eigenschaften 111
31 Koordinatentransformationen und Funktionstransformationen . . . 112

IV Symmetriegruppen und ihre physikalische Bedeutung 125
32 Symmetrien des Hamilton-Operators 125
33 Multiplett-Struktur der Zustände 127
34 Massenentartung innerhalb von Multipletts 129

V Die Isospingruppe (Isobarenspin) 131
35 Isospin als Eigenschaft der Nukleonen 131
36 Isospin-Operatoren für ein Vielnukleonensystem 137
37 Darstellungen einer Lie-Algebra – Allgemeines 144
38 Reguläre (oder adjungierte) Darstellung einer Lie-Algebra 145
39 Transformationsgesetz für Isospin-Vektoren 149
40 Experimenteller Test der Isospin-Invarianz 157

VI Die Hyperladung 173
41 Vom Isospin zur Hyperladung 173
42 Isospin und Hyperladung von Antiteilchen 179

VII Die SU(3)-Symmetrie 181
43 Die Gruppen U(n) und SU(n) 181
44 Die Generatoren der SU(3)-Gruppe 185
45 Die Lie-Algebra der SU(3)-Gruppe 187
46 Unteralgebren der SU(3) und Schiebeoperatoren 196
47 Kopplung von T-, U- und V-Multipletts 198
48 Quantitative Abrundung unserer Schlussfolgerungen 200
49 Geometrische Gestalt eines SU(3)-Multipletts 202
50 Anzahl der Zustände auf Gitterpunkten innerer Schalen 203

VIII Quarks und die Gruppe SU(3) 215
51 Quarks als kleinste nichttriviale Darstellung der SU(3) 215
52 Suche nach Quarks 218
53 Die Transformationseigenschaften der Quark-Zustände 219
54 Konstruktion von SU(3)-Multipletts aus elementaren Darstellungen 225
55 Aufbau der Darstellungen $D(p,q)$ aus Quarks und Antiquarks . . . 227
56 Mesonen-Multipletts 231
57 Regeln für die Reduktion direkter Produkte von SU(3)-Multipletts 243
58 U-Spin-Invarianz 247
59 Test der U-Spin-Invarianz 250
60 Die Gell-Mann-Okubo-Massenformel 251
61 Die Clebsch-Gordan-Koeffiziente der SU(3) 254
62 Quarkmodelle mit inneren Freiheitsgraden 257
63 Die Massenformel in der SU(6) 285
64 Magnetische Momente im Quarkmodell 286
65 Angeregte mesonische und baryonische Zustände 288

IX Darstellungen der Permutationsgruppe und Young-Tableaux 295
66 Die Permutationsgruppe und identische Teilchen 295
67 Die Standard-Anordnung der Young-Tableaux 299

68 Irreduzible Darstellungen der Permutationsgruppe S_N 302
69 Der Zusammenhang zwischen SU(2) und S_2 311
70 Die irreduziblen Darstellungen der SU(n) 314
71 Bestimmung der Dimension 320
72 Die SU($n-1$)-Untergruppen von SU(n) 324
73 Zerlegung des Tensorproduktes zweier Multipletts 326

X Mathematische Ergänzung: Gruppencharaktere 331
74 Definitio von Gruppencharakteren 331
75 Die Schur'schen Lemmata 332
76 Orthogonalitätsrelationen für Darstellungen diskreter Gruppen . . 333
77 Äquivalenzklassen 335
78 Orthogonalitätsrelationen der Gruppencharaktere 337
79 Gruppencharaktere am Beispiel der Gruppe D(3) 338
80 Reduktion einer Darstellung 339
81 Kriterium für Irreduzibilität 340
82 Direktes Produkt von Darstellungen 341
83 Erweiterung auf kontinuierliche kompakte Gruppen 341
84 Mathematischer Exkurs: Gruppenintegration 342
85 Unitäre Gruppen 344
86 Der Übergang von U(N) nach SU(N) am Beispiel der SU(3) 345
87 Integration über unitäre Gruppen 347
88 Gruppencharaktere der unitären Gruppen 350

XI Charm und SU(4) 369
89 Die Entdeckung des Charm-Quarks 369
90 Teilchen mit Charm und die SU(4) 371
91 Die Gruppeneigenschaften der SU(4) 372
92 Strukturkonstanten f_{ijk} und Koeffiziente d_{ijk} für SU(4) 379
93 Multiplettstruktur der SU(4) 381
94 Zerfall der Mesonen mit verborgenem Charm 390
95 Zerfall von Mesonen mit offenem Charm 391
96 Baryonen-Multipletts 392
97 Das Potentialmodell des Charmoniums 401
98 Die SU(4) [SU(8)]-Massenformel 409
99 Die Υ-Resonanzen 412
100 Das Quark-Modell und das Top-Quark 414

XII Mathematische Ergänzungen 419
101 Einführung 419
102 Wurzelvektoren und klassische Lie-Algebren 423
103 Skalarprodukte von Eigenwerten 427
104 Cartan-Weyl-Normierung 430
105 Graphische Darstellung der Wurzelvektoren 431
106 Lie-Algebra vom Rang 1 432
107 Lie-Algebren vom Rang 2 432
108 Lie-Algebren vom Rang $l > 2$ 434

109 Die besonderen Lie-Algebren 435
110 Einfache Wurzeln und Dynkin-Diagramme 435
111 Die Dynkin'sche Vorschrift 437
112 Die Cartan'sche Matrix 439
113 Bestimmung aller Wurzeln aus den einfachen Wurzeln 440
114 Zwei einfache Lie-Algebren 441
115 Die Darstellungen der klassischen Lie-Algebren 443

XIII Spezielle diskrete Symmetrien 449
116 Raumspiegelung (Paritätstransformation) 449
117 Gespiegelte Zustände und Operatoren 451
118 Zeitumkehr 452
119 Antiunitäre Operatoren 454
120 Mehrteilchensysteme 458
121 Reelle Eigenfunktionen 459

XIV Dynamische Symmetrien 461
122 Das Wasserstoffatom 461
123 Die Gruppe SO(4) 464
124 Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms 465
125 Der klassische isotrope Oszillator 466
126 Der quantenmechanische isotrope Oszillator 467

XV Mathematische Ergänzung: Nichtkompakte Lie-Gruppen 481
127 Definitio und Beispiele nichtkompakter Lie-Gruppen 481
128 Die Lie-Gruppe SO(2,1) 488
129 Anwendung auf Streuprobleme 492

XVI Beweis des Racah'schen Theorems 495
130 Racah'sches Theorem 495

Sachwortverzeichnis 503

Aufgaben und Beispiele

A	1.1	Drehimpulse in unterschiedlichen Bezugssystemen	5
A	1.2	Erhaltungsgrößen bestimmter Felder	6
B	1.1	Das Noether'sche Theorem (zur Vertiefung)	8
A	1.3	Zeit-invariante Bewegungsgleichungen: Lagrange-Funktion und Erhaltungsgrößen	11
A	1.4	Bedingungen für Translations-, Rotations- und Galilei-Invarianz	11
A	1.5	Erhaltungssätze in homogenen elektromagnetischen Feldern	14
B	5.1	Matrixelemente räumlich verschobener Zustände	23
A	5.1	Die Relation $(\,\mathrm{i}\hat{p}/\hbar)^n \hat{B}(x)$ und Transformationsoperatoren	23
A	5.2	Translation eines Operators $\hat{A}(x)$	26
A	5.3	Generatoren für Translationen in einem homogenen Feld	26
B	11.1	Transformation von Vektorfeldern unter Rotationen	42
B	11.2	Die Transformation von Zweier-Spinoren unter Rotationen	46
A	11.1	Messung der Richtung von Elektronenspins	49
A	14.1	Spezielle Darstellung der Spin-1-Operatoren	60
B	18.1	Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffiziente für Spin-Bahn-Kopplung	76
B	19.1	Lie-Algebra der Gruppe SO(3)	84
A	19.1	Rechnung mit komplexen $n \times n$-Matrizen	85
A	19.2	Beweis einer Kommutationsrelation	86
A	19.3	Generatoren und Strukturkonstanten von eigentlichen Lorentz-Transformationen	88
B	20.1	Algebra von $\hat{p}_\nu$ und $\hat{J}_\nu$	92
B	21.1	Translations-Rotations-Gruppe	93
B	21.2	Einfache und halbeinfache Lie-Gruppen	95
A	21.1	Reduktion von $\exp\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\phi\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\}$	96
B	21.3	Cartan'sches Kriterium für Halbeinfachheit	97
B	21.4	Halbeinfachheit von SO(3)	99
B	25.1	Ein invarianter Unterraum der Rotationsgruppe	102
B	25.2	Reduktion eines invarianten Unterraumes	102
B	26.1	Casimir-Operator der Rotationsgruppe	105
B	26.2	Einige Gruppen mit Rang 1 oder 2	106
B	29.1	Konstruktion des Hamilton-Operators aus den Casimir-Operatoren	111
A	31.1	Transformationen mit r Parametern in einem n-dimensionalen Raum	114
A	31.2	Generatoren und infinitesimal Operatoren von SO(n)	115

A 31.3 Matrixdarstellung für die Lie-Algebra mit Spin 1 116
A 31.4 Translationen im eindimensionalen Raum; die Euklidische Gruppe E(3) in drei Dimensionen 120
A 31.5 Homomorphismus und Isomorphismus von Gruppen und Algebren 122
A 31.6 Transformationen der Strukturkonstanten 123
B 32.1 Erhaltungsgesetze bei Rotationssymmetrie und bei ladungsunabhängigen Kräften 126
B 33.1 Energie-Entartung für verschiedene Symmetrien 129
B 34.1 Entartung und Parität weiterer Symmetrien 130
A 35.1 Additionsgesetz für infinitesimal SU(2)-Transformationen 135
B 36.1 Das Deuteron 138
A 36.1 Die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte 141
B 36.2 Das Pionen-Triplett 142
A 38.1 Normierung der Gruppengeneratoren 147
B 39.1 Die G-Parität 152
A 39.1 Darstellung einer Lie-Algebra, reguläre Darstellung der Algebra der Bahndrehimpulsoperatoren 155
B 40.1 Das Wigner-Eckart-Theorem 159
B 40.2 Pionen-Produktion in der Proton-Deuteron-Streuung 162
B 40.3 Produktion neutraler Pionen in der Deuteron-Deuteron-Streuung . 163
B 40.4 Pion-Nukleon-Streuung 163
B 40.5 Zerfall des neutralen Rho-Mesons 170
A 41.1 Hyperladung von Atomkernen 174
B 41.1 Die Hyperladung der Δ-Resonanzen 175
B 41.2 Die Baryonen 175
A 41.2 Isospin und Hyperladung von Baryonen-Resonanzen 176
B 42.1 Antibaryonen 179
B 43.1 Die Lie-Algebra der SU(2)-Gruppe 184
A 44.1 Lineare Unabhängigkeit der Generatoren $\hat{\lambda}_i$ 186
A 45.1 Symmetrie der Koeffiziente d_{ijk} 189
A 45.2 Antisymmetrie der Strukturkonstanten f_{ijk} 190
A 45.3 Berechnung einiger d_{ijk}-Koeffiziente und Strukturkonstanten . . . 191
A 45.4 Relationen zwischen den Strukturkonstanten und den Koeffiziente d_{ijk} 193
A 45.5 Casimir-Operatoren der SU(3)-Gruppe 194
A 45.6 Nützliche Relationen für SU(3)-Casimir-Operatoren 195
B 50.1 Zunahme der Multiplizität von Zuständen auf den inneren Schalen von SU(3)-Multipletts 206
A 50.1 Teilchenzustände im Zentrum des Baryonen-Oktetts 210
A 50.2 Bestimmung der Dimension der Darstellung D(p,q) 210
A 50.3 Der Casimir-Operator $\hat{C} = \sum_i \hat{F}_i^2$ als Funktion von p und q 212
A 53.1 Die Generatoren der SU(3) in der Darstellung [3] 220
A 53.2 Transformationseigenschaften der Zustände des Antitripletts $[\bar{3}]$. 223

A 53.3 Nicht-Äquivalenz der beiden fundamentalen Darstellungen von SU(3) 224
B 55.1 Das Gewicht eines Zustandes 227
B 55.2 Das höchste Gewicht des Quark-Tripletts [3] und des Antiquark-Tripletts $[\overline{3}]$ 228
B 56.1 Die pseudoskalaren Mesonen 232
B 56.2 Beispiel zur Vertiefung: Die K^0- und $\overline{K}^0$ Mesonen und ihre Zerfälle 233
B 56.3 Die skalaren Mesonen 240
B 56.4 Die Vektormesonen 241
B 56.5 Die Tensormesonen 242
B 56.6 Andere Resonanzen 242
A 57.1 Reduktion von SU(2)-Multipletts 246
A 62.1 Konstruktion der Neutronen-Wellenfunktion aus der des Protons . 265
A 62.2 Konstruktion der Wellenfunktionen des Baryonen-Dekupletts . . . 268
A 62.3 Konstruktion der Spin-Flavour-Wellenfunktionen des Baryonen-Oktetts 277
A 68.1 Basisfunktionen von S_3 304
A 68.2 Irreduzible Darstellungen der S_4 306
A 69.1 Multipletts eines Systems aus drei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen 312
A 70.1 Multipletts eines Zweiteilchensystems in der Gruppe SU(3) 315
A 70.2 Multipletts der SU(3), aufgebaut aus drei Teilchen 317
A 71.1 Dimensionsformel für die SU(3) 323
A 73.1 Zerlegung eines Tensorproduktes 328
B 73.1 Darstellungen der SU(2) und Spin 329
B 73.2 Trialität und Quark-Confinemen 329
B 77.1 Die Gruppe D_3 335
B 77.2 Die Rotationsgruppe O(3) 336
B 88.1 Anwendung der Gruppencharaktere: Zustandssumme für das Quark-Gluon-Plasma mit exakter SU(3)-Symmetrie 357
B 88.2 Beweis der Rekursionsformel für die Dimensionen der SU(n)-Darstellungen 361
A 91.1 Antikommutatoren der Generatoren der SU(N) 373
A 91.2 Die Spur eines Generatorproduktes in der SU(N) 375
A 91.3 Die Vollständigkeitsrelation der $\hat{F}_a$-Matrizen 376
A 91.4 Der Eigenwert des Casimir-Operators $\hat{C}_1$ einer fundamentalen Darstellung der SU(N) 379
A 93.1 SU(3)-Inhalt des SU(4)-Mesonen-Multipletts 389
A 96.1 Zerlegung des Produktes $[4]\otimes[4]\otimes[4]$ 396
A 96.2 SU(3)-Inhalt der SU(4)-Baryonen-Multipletts 397
B 96.1 Zerlegung und Dimension höherer SU(4)-Multipletts 399
B 97.1 Mathematische Ergänzung. Airy-Funktionen 406
B 101.1 Gewichtsoperatoren der SU(4)-Algebra 422
A 102.1 Beweis einer Beziehung für die Strukturkonstanten C_{ikl} 427
B 111.1 Dynkin-Diagramme für B_l 439

B 112.1 Die Cartan-Matrizen für SU(3), SU(4) und G_2 439
B 113.1 Bestimmung der Wurzeln von G_2 aus den zugehörigen einfachen Wurzeln 441
B 115.1 Analyse der SU(3) 445
A 119.1 Wirkung eines antiunitären Operators auf Matrixelemente von Wellenfunktionen 454
A 119.2 Kommutationsrelationen zwischen $\hat{\vec{U}}$ und $\hat{\vec{S}}$ 456
A 126.1 Energie und Drehimpuls des Wasserstoffatoms 468
A 126.2 Der Runge-Lenz-Vektor 469
A 126.3 Eigenschaften des Runge-Lenz-Vektors $\hat{\vec{M}}$ 470
A 126.4 Der Kommutator zwischen $\hat{\vec{M}}$ und $\hat{\vec{H}}$ 470
A 126.5 Das Skalarprodukt $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{M}}$ 472
A 126.6 Bestimmung von $\hat{\vec{M}}^2$ 474
A 126.7 Beweis der Kommutationsrelation für $[\hat{M}_j, \hat{L}_j]_-$ 475
A 126.8 Beweis der Kommutationsrelation für $[\hat{M}_i, \hat{M}_j]_-$ 477
A 127.1 Darstellung von SU(2)-Matrizen 482
A 127.2 Darstellung von SU(1,1)-Matrizen 483
A 127.3 Nicht-Kompaktheit der Lorentz-Gruppe 485
A 127.4 Generatoren der SO(p,q) 486
A 128.1 Casimir-Operator der SO(2,1) 489
A 129.1 Koordinatendarstellung der SO(2,1)-Operatoren 492
B 130.1 Der Eigenwert des Casimir-Operators zweiter Ordnung der SU(3) 500

Historische Notizen

1 Emmy Noether 8
2 Sophus Lie 37
3 Rudolf Friedrich Alfred Clebsch 67
4 Elie Cartan 97
5 Hendrik Brught Gerhard Casimir 101
6 Giulio Racah 101
7 Isai Schur 128
8 Eugene Paul Wigner 159
9 Carl Henry Eckart 159
10 Murray Gell-Mann 174
11 Kazuhiko Nishijima 174