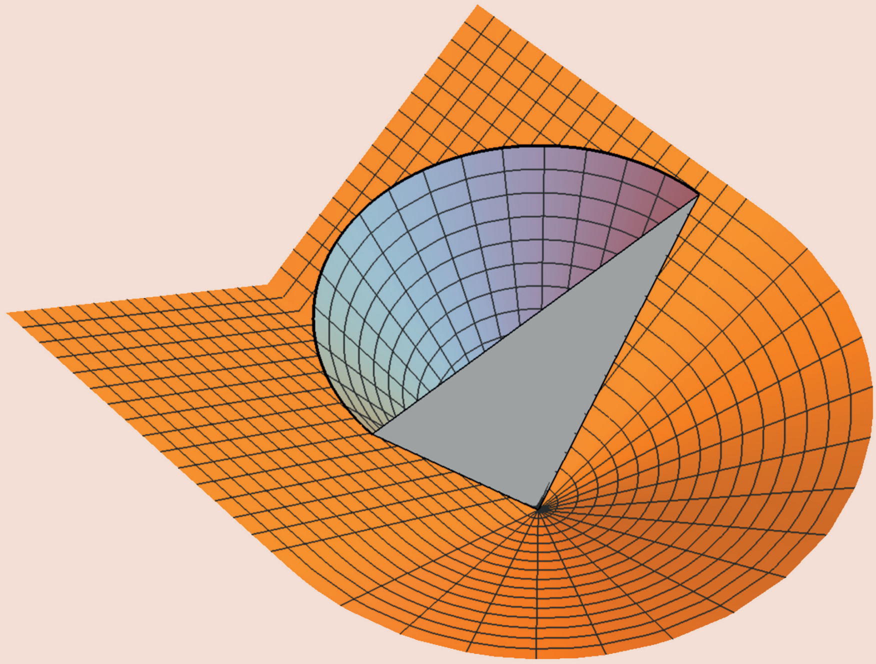
Karlheinz Spindler



HÖHERE MATHEMATIK

Band 2

AUFGABEN UND LÖSUNGEN

Edition Harri Deutsch

EUROPA LEHRMITTEL

Preisgekrönt

Prof. Spindler erhielt für sein Projekt *Holistische Lehre und forschendes Lernen in der Mathematik*, aus dem sein Lehrbuch und die Aufgabenbände hervorgegangen sind, den hochdotierten **Hessischen Hochschulpreis für Exzellenz in der Lehre 2022**.

Pressemitteilung: Hochschulpreis für Exzellenz in der Lehre 2022

Video: Holistische Lehre und forschendes Lernen in der Mathematik

Höhere Mathematik
Aufgaben und Lösungen

Band 2

von

Karlheinz Spindler

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 59543

Autor:

Prof. Dr. Karlheinz Spindler studierte Mathematik, Mechanik und Geschichte an der Technischen Hochschule Darmstadt. Nach Ablegung seines Diploms und des Staatsexamens für das Lehramt an Gymnasien war er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TH Darmstadt tätig und wurde dort über ein Thema aus der Strukturtheorie Liescher Algebren promoviert. Anschließend arbeitete er zunächst zwei Jahre lang als Visiting Assistant Professor an der Louisiana State University in Baton Rouge (USA) und dann fünf Jahre lang bei einem Unternehmen der Raumfahrtindustrie am European Space Operations Centre (ESOC) in Darmstadt. Im Jahr 1997 wurde er zum Professor für Mathematik und Datenverarbeitung an die Fachhochschule Wiesbaden (seit dem 1. September 2009 Hochschule RheinMain) berufen, wo er im Studiengang „Angewandte Mathematik" tätig ist. Er ist Begründer und Mitorganisator eines seit 2006 jährlich stattfindenden mathematischen Weiterbildungsseminars für Angehörige der hessischen Hochschulen für angewandte Wissenschaften.

1. Auflage 2021

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5954-3

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagmotiv: Vom Autor erstellte Illustration und bearbeitetes Foto
Druck: CPI books GmbH, 25917 Leck

Vorwort

Das vorliegende Aufgaben- und Lösungsbuch will einen Beitrag zur Förderung der Mathematikausbildung leisten, indem es zur Beschäftigung mit mathematischen Aufgabenstellungen und zur Einübung von Problemlösungsfertigkeiten einlädt. Es ist entstanden aus Aufgabenblättern und Übungsmaterialien, die ich über viele Jahre hinweg in einer ganzen Reihe verschiedenster mathematischer Lehrveranstaltungen an der Hochschule RheinMain verwendet habe.

Wichtig war mir – sowohl beim Stellen der Aufgaben als auch beim Schreiben des Buches – eine große Bandbreite der Aufgabenstellungen. Diese reichen von einfachen Fragen zur Gewöhnung an neue Begriffe und Routineaufgaben zum Einüben und Einschleifen von Rechentechniken über anspruchsvollere Aufgaben, in denen Beispiele und Gegenbeispiele gesucht, Feinheiten von Begriffsbildungen und Aussagen ausgelotet und weiterführende Aspekte erkundet werden, bis hin zu wirklichen Herausforderungen, denen sich zu stellen einige Ausdauer erfordert. Dabei habe ich bewußt hohe Ansprüche nicht vermieden, denn (wie schon der Prediger Salomo wußte) "wo viel Weisheit ist, da ist viel Grämen, und wer viel lernt, der muß viel leiden". Ich bin aber zuversichtlich, daß durch die Aufteilung komplexer Aufgabenstellungen auf mehrere Teilaufgaben und durch die gegebenen Hinweise allzu großen Frustrationen vorgebeugt wird.

Damit das Buch auch zum Selbststudium geeignet ist, habe ich zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen erstellt, deren Formulierung vielleicht auch ein Gefühl dafür vermittelt, wie man mathematische Sachverhalte ausdrückt und zu Papier bringt. Natürlich sollte man aber vor dem Blick in die Lösung immer versuchen, die jeweilige Aufgabe selbst zu bearbeiten: Mathematik ist kein Zuschauersport, sondern eher wie Klavierspielen; man erlernt sie nur durch eigene aktive Beschäftigung. Ich hoffe, daß bei aller Konzentration auf das Lösen von Aufgaben auch etwas von der Schönheit, Klarheit und Eleganz der Mathematik deutlich wird. Von den Inhalten und vom Kapitelaufbau her richtet sich das vorliegende Buch nach dem Lehrbuch

> Karlheinz Spindler: *Höhere Mathematik – Ein Begleiter durch das Studium*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main* 2010.

Immer, wenn in den Lösungen auf "das Buch" verwiesen wird, ist dieses Lehrbuch gemeint. Die Verweise dienen in erster Linie der bequemen Referenzierung; die allermeisten Aufgaben können vollkommen unabhängig von der Verwendung eines bestimmten Lehrbuches oder Manuskriptes bearbeitet werden, und ich hoffe, daß sich geeignete Aufgaben für eine Vielzahl verschiedener Lehrveranstaltungen auswählen lassen. Da das Material des Buches in unterschiedlicher Intensität für unterschiedliche Lehrveranstaltungen entstand, war eine gewisse Unausgewogenheit zwischen den verschiedenen thematischen Bereichen (oder, positiver ausgedrückt, eine gewisse Schwerpunktsetzung) unausweichlich. Der zu erwartende eher geringe Zusatznutzen erschien es mir nicht wert, hier mit entsprechendem Zeitaufwand (und resultierenden Verzögerungen) die Unterschiede nachträglich noch auszugleichen. Um noch einmal den Prediger Salomo zu Wort kommen zu lassen: "Des vielen Büchermachens ist kein Ende, und viel Studieren macht den Leib müde".

Wie schon bei dem genannten Lehrbuch bin ich auch beim Schreiben dieses Aufgaben- und Lösungsbuchs Frau Dr. Renate Schappel zu kaum ermeßlichem Dank verpflichtet. Sie hat sich mit bewundernswerter Energie und Begeisterung, mit großer Akribie und Sorgfalt der Herkulesaufgabe angenommen, das vollständige Manuskript (teilweise in verschiedenen Versionen) kritisch zu lesen und zu kommentieren. Sie deckte eine Unzahl von Fehlern auf, und nichts war vor ihrem kritischen Blick sicher: einfache Tippfehler, Rechenfehler, falsche oder unvollständige Schlüsse, stilistisch verunglückte Formulierungen, falsche Verweise, unschöne Zeilen- oder Seitenumbrüche und vieles mehr. Ohne ihre Hilfe wäre das Erscheinen dieses Buches schlechterdings nicht denkbar. Mein Dank gilt ferner Herrn Klaus Horn vom Verlag Europa-Lehrmittel für die kompetente verlagsseitige Umsetzung des Werkes und die jederzeit angenehme Zusammenarbeit. Ihm danke ich nicht nur für die engagierte und sachkundige Unterstützung des Buchprojekts, sondern auch für den gutmütigen Humor, mit dem er meinen Sonderwünschen begegnete. Schließlich bin ich mehreren Generationen von Studenten zu Dank verpflichtet, mit denen ich über die Jahre hinweg zusammenarbeiten durfte und deren Fragen, Kommentare und Anregungen zu Verbesserungen bei zahlreichen Aufgaben und Lösungen führten.

Alle noch verbliebenen Fehler und Unstimmigkeiten gehen natürlich einzig und allein zu meinen Lasten als Autor. Autor und Verlag sind für Hinweise auf Fehler und Ungenauigkeiten sowie für konstruktive Kritik jederzeit dankbar.

A. D. 2021 Karlheinz Spindler

* Inzwischen Edition Harri Deutsch, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe (65.12) Wenn ein Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung besitzt, kann man versuchen, eine Näherungslösung x_0 zu finden, die optimal in dem Sinne ist, daß der Ausdruck $\|Ax_0 - b\|$ minimal wird; dies ist genau dann der Fall, wenn Ax_0 eine Bestapproximation von b im Bild von A ist. Bestimme alle solchen Näherungslösungen x_0 für die beiden folgenden Gleichungssysteme!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Aufgabe (65.13) Es sei V die Menge aller (reellen oder komplexen) Zahlenfolgen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

(a) Zeige, daß V mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

(b) Zeige, daß für $x, y \in V$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ konvergiert und daß durch $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(c) Zeige, daß die Menge U aller Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern einen Untervektorraum von V bildet. Bestimme das Orthogonalkomplement $U^\perp$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aufgabe (65.14) Es sei $V = \mathbb{K}^{m\times n}$ der Vektorraum aller (reellen bzw. komplexen) $m \times n$-Matrizen; für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sei $A^\star := \overline{A}^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ die Matrix, die aus A durch Transponieren und durch Konjugieren der einzelnen Matrixelemente entsteht.

(a) Zeige, daß durch $\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle := \mathrm{Spur}(B^\star A) = \mathrm{Spur}(AB^\star)$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist. (Dabei ist die Spur einer quadratischen Matrix die Summe ihrer Diagonalelemente. Beachte, daß $B^\star A$ eine $(n \times n)$-Matrix ist, dagegen $AB^\star$ eine $(m \times m)$-Matrix.) Dieses Skalarprodukt bezeichnet man als **Frobenius-Produkt**, die zugehörige Norm

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Spur}(A^\star A)} = \sqrt{\mathrm{Spur}(AA^\star)}$$

auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ als **Frobenius-Norm**.

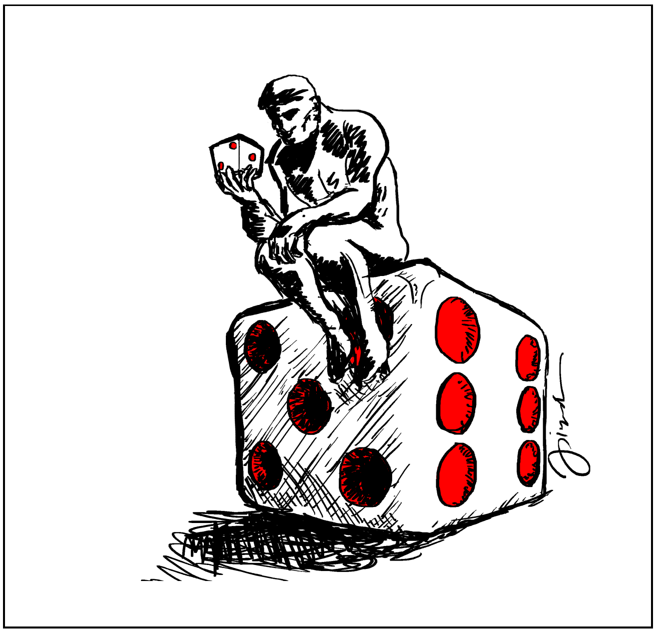
(b) Zeige, daß die Frobenius-Norm mit den kanonischen Normen auf $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ in dem Sinne kompatibel ist, daß für alle $x \in \mathbb{K}^n$ die Abschätzung

$$\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$$

gilt. (In dieser Ungleichung treten drei verschiedene Normen auf: $\|x\|$ wird mit der Standardnorm auf $\mathbb{K}^n$ gebildet, $\|Ax\|$ mit der Standardnorm auf $\mathbb{K}^m$ und $\|A\|$ mit der Frobenius-Norm.)

(c) Zeige, daß für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $m = n$ (also im Fall $V = \mathbb{R}^{n\times n}$) stets $\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle = 0$ gilt, wenn A symmetrisch und B schiefsymmetrisch ist. Zeige ferner, daß auch $\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle = 0$ gilt, wenn A eine Diagonalmatrix ist und B nur Nullen auf der Diagonalen hat.

Aufgabe (65.15) Die sechs Seiten eines Würfels seien mit den reellen Zahlen $f_1, \ldots, f_6$ beschriftet. Für jede Seite wird das arithmetische Mittel der Zahlen auf den vier Nachbarseiten ermittelt; anschließend wird jede der ursprünglichen Zahlen durch das jeweilige arithmetische Mittel ersetzt. Dieser Vorgang wird nun mit den neu erhaltenen Zahlen wiederholt, und so weiter. Welche Zahlen zeigt der Würfel nach n-facher Durchführung dieses Vorgangs? Was geschieht für $n \to \infty$? (Vorher raten!)



Anleitung: Wir schreiben W für die Menge der Seiten des Würfels; jede Beschriftung des Würfels durch reelle Zahlen läßt sich dann als eine Abbildung $f : W \to \mathbb{R}$ auffassen. Betrachte den Vektorraum $\mathfrak{F}$ aller Funktionen $f : W \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \sum_{x\in W} f(x)g(x)$ sowie die lineare Abbildung $L : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ mit

$$(Lf)(x) := \frac{1}{4} \sum_{\substack{y \text{ benach-} \\ \text{bart zu } x}} f(y)\,.$$

Ist x eine beliebige Seite des Würfels, so bezeichnen wir mit $x^\star$ die x gegenüberliegende Seite. Wir nennen eine Funktion f gerade, wenn $f(x^\star) = f(x)$ für alle $x \in W$ gilt, dagegen ungerade, wenn $f(x^\star) = -f(x)$ für alle $x \in W$ gilt. Zeige, daß die Mengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &:= \{f \in \mathfrak{F} \mid f \text{ ist konstant}\}, \\ \mathfrak{F}_2 &:= \{f \in \mathfrak{F} \mid f \text{ ist gerade mit } \textstyle\sum_{x\in W} f(x) = 0\}. \\ \mathfrak{F}_3 &:= \{f \in \mathfrak{F} \mid f \text{ ist ungerade}\} \end{aligned}$$

Untervektorräume von $\mathfrak{F}$ sind, die aufeinander senkrecht stehen und von L jeweils in sich abgebildet werden. Bestimme für $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ jeweils eine Orthonormalbasis! Löse dann die eigentliche Aufgabe.

Aufgabe (68.17) Für $n \geq 2$ sei $\mathbb{K}^{n\times n}$ der Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) Zeige, daß die Norm

$$\|A\|_\infty \;:=\; \max_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}|$$

zwar die Bedingung $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ erfüllt, aber nicht submultiplikativ ist (und daher keine Operatornorm sein kann).

(b) Zeige, daß die Norm

$$\|A\|_1 \;:=\; \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|$$

zwar submultiplikativ ist, aber nicht die Bedingung $\|\mathbf{1}\|_1 = 1$ erfüllt (und daher keine Operatornorm sein kann).

(c) Zeige, daß die Frobeniusnorm

$$\|A\|_2 \;:=\; \sqrt{\mathrm{tr}(A^\star A)} \;=\; \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

zwar submultiplikativ ist, aber nicht die Bedingung $\|\mathbf{1}\| = 1$ erfüllt, und daher keine Operatornorm bezüglich irgendeiner Norm auf $\mathbb{K}^n$ sein kann.

Aufgabe (68.18) Für $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ definieren wir $\|A\|$ durch

$$\left\| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\| \;:=\; \max\{|a| + 2|b|, 2|c| + |d|\}\,.$$

(a) Zeige, daß $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^{2\times 2}$ ist, die die Bedingungen $\|\mathbf{1}\| = \mathbf{1}$ sowie $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ erfüllt.
(b) Zeige, daß $\|\cdot\|$ keine Abbildungsnorm ist, daß es also keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^2$ gibt mit $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{K}^2, \|x\| \leq 1\}$.

Hinweis zu Teil (b): Betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nimm an, $\|\cdot\|$ sei von einer Vektornorm $\|\cdot\|$ induziert. Zeige, daß unter dieser Annahme einerseits $\|Av\| \leq \|v\|$ und $\|Dv\| \leq \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{K}^2$ gilt, es andererseits Vektoren $x, y \in \mathbb{K}^2$ mit $\|Bx\| > \|x\|$ und $\|Cy\| > \|y\|$ gibt. Zeige, daß sich die Ungleichungen $\|Bx\| > \|Dx\|$ und $\|Cy\| > \|Ay\|$ widersprechen.

Aufgabe (68.19) (Operatornormen) Es seien $T_i : V_i \to W_i$ beschränkte lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen. Wir wählen eine Abbildung Φ wie in Aufgabe (68.9) und definieren Normen auf $V := V_1 \times \cdots \times V_n$ und $W := W_1 \times \cdots \times W_n$ vermöge

$$\|(v_1, \ldots, v_n)\| := \Phi(\|v_1\|, \ldots, \|v_n\|),$$
$$\|(w_1, \ldots, w_n)\| := \Phi(\|w_1\|, \ldots, \|w_n\|).$$

Zeige, daß dann die Abbildungsnorm von $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ gegeben ist durch

$$\|T\|_{\mathrm{Abb}} \;=\; \max_{1\leq i\leq n} \|T_i\|_{\mathrm{Abb}}\,.$$

Aufgabe (68.20) Es seien $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ und $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Wir definieren eine neue Norm $\|\cdot\|_\star$ auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ durch

$$\|A\|_\star \;:=\; \|T^{-1}AT\|.$$

Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Genau dann gilt $\|\mathbf{1}\|_\star = 1$, wenn $\|\mathbf{1}\| = 1$ gilt.
(b) Genau dann ist $\|\cdot\|_\star$ submultiplikativ, wenn $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist.
(c) Genau dann ist $\|\cdot\|_\star$ eine Operatornorm, wenn $\|\cdot\|$ eine Operatornorm ist.

Lösungen zu »Normierte Räume« siehe Seite 214

Aufgabe (69.18) Es seien Z ein Punkt in einer affinen Ebene $\mathbb{A}$ und $\lambda \neq 0$ eine Zahl. Die **zentrische Streckung** mit Streckzentrum Z und Streckfaktor λ ist die Abbildung $\sigma_{Z,\lambda} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, die gegeben ist durch

$$\sigma_{Z,\lambda}(P) \;:=\; Z + \lambda\overrightarrow{ZP}.$$

Zeige, daß die Menge aller zentrischen Streckungen und aller Translationen einen Normalteiler der affinen Gruppe von $\mathbb{A}$ bildet. Zeige ferner, daß eine zentrische Streckung jede Gerade g auf eine zu g parallele Gerade abbildet.

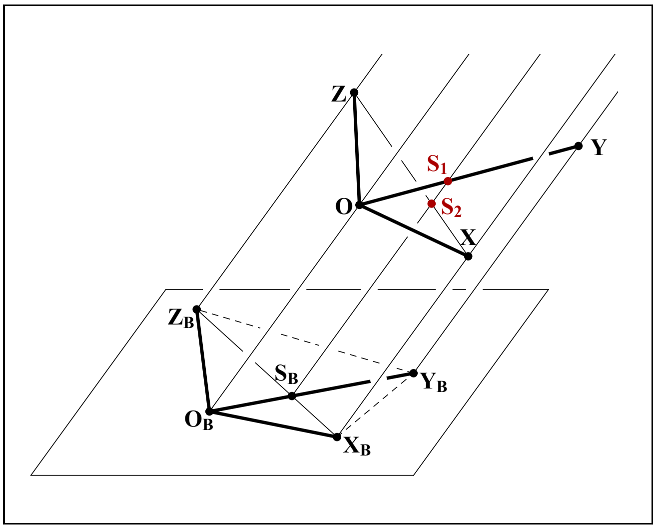
Aufgabe (69.19) In einem Dreieck ABC schneide die Winkelhalbierende des Winkels bei C die Strecke AB im Punkt Z. Es sei σ diejenige zentrische Streckung mit Streckzentrum Z (und negativem Streckfaktor), die A auf B abbildet. Bestimme geometrisch den Punkt, auf den unter dieser zentrischen Streckung der Punkt C abgebildet wird. Schließe dann auf die Verhältnisgleichung

$$a : b \;=\; c_a : c_b,$$

wenn Z die Strecke AB in die beiden Teilstrecken c_b und c_a zerlegt, wobei c_a an a anliegt und c_b an b. (In einem Dreieck teilt also jede Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.)

Aufgabe (69.20) Beweise den folgenden **Satz von L'Huilier**, benannt nach dem Schweizer Mathematiker Simon Antoine Jean L'Huilier (1750-1840): Ein dreiseitiges Prisma sei fest vorgegeben. Dann läßt sich jede beliebige Dreiecksform durch einen ebenen Schnitt durch dieses Prisma erzeugen (**Prismenschnittaufgabe**).

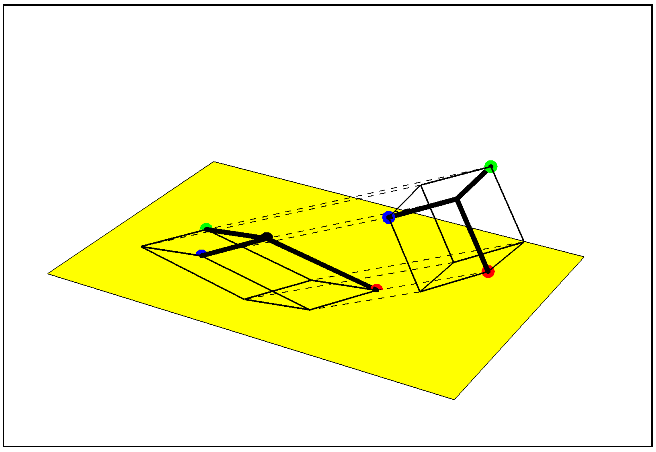
Aufgabe (69.21) Beweise den folgenden **Satz von Pohlke**, der auch als **Hauptsatz der Axonometrie** bekannt ist! Es seien $\overrightarrow{O_B X_B}$, $\overrightarrow{O_B Y_B}$, $\overrightarrow{O_B Z_B}$ drei Vektoren, die eine Ebene E in einem dreidimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}$ aufspannen. Dann gibt es Punkte $O, X, Y, Z \in \mathbb{A}$ derart, daß $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ eine Würfelecke bilden, sowie eine Parallelprojektion $\pi : \mathbb{A} \to E$ mit $\pi(O) = O_B$, $\pi(X) = X_B$, $\pi(Y) = Y_B$ und $\pi(Z) = Z_B$.

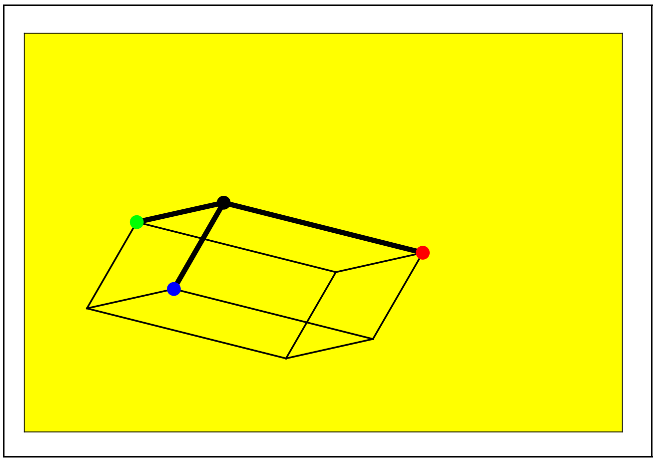


Beweis des Satzes von Pohlke.

Hinweis: Überlege zunächst, wie sich aus der gegebenen ebenen Figur $O_B X_B Y_B Z_B$ die Projektionsrichtung der zu findenden Parallelprojektion ermitteln läßt. Es hilft dabei, sich zunächst für einen Moment vorzustellen, man hätte eine Würfelecke mit der gewünschten Eigenschaft bereits gefunden.

Bemerkung: Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle in der Darstellenden Geometrie und verdient eine etwas längere Erläuterung. Die Darstellende Geometrie beschäftigt sich mit Verfahren zur Projektion dreidimensionaler Objekte auf eine zweidimensionale Darstellungsebene; sie ist wichtig bei der Darstellung architektonischer und technischer Strukturen, in der Kartographie, der Malerei und der Computergraphik. Wir fragen zunächst, welche Gesetzmäßigkeiten gelten, wenn Punkte einer dreidimensionalen Szene mittels einer Parallelprojektion auf eine zweidimensionale Ebene abgebildet werden; dazu stellen wir uns das Drahtmodell eines Würfels vor und überlegen, wie das Schrägbild dieses Würfels unter einer solchen Parallelprojektion aussieht.

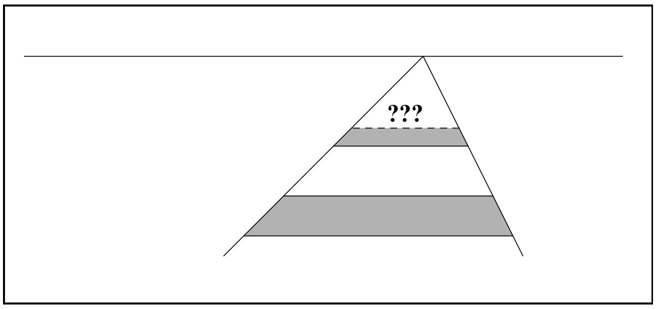

Schrägbild eines Würfels unter einer Parallelprojektion.


Ansicht der zweidimensionalen Bildebene.

Lösungen zu »Affine Geometrie« siehe Seite 223

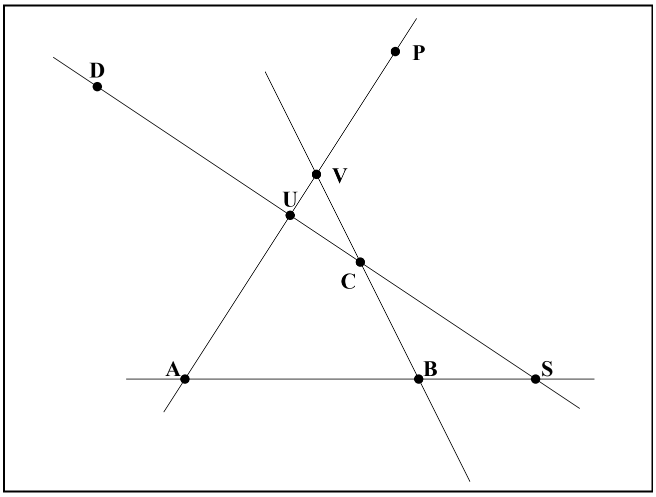
A70: Projektive Geometrie

Aufgabe (70.1) Die Abbildung zeigt Eisenbahngleise, die zum Horizont hin verlaufen. Die einzelnen Gleisschwellen seien dabei gleich breit und in gleichen Abständen verlegt. Wo ist die gestrichelte Linie einzuzeichnen, damit die Abbildung perspektivisch korrekt ist?



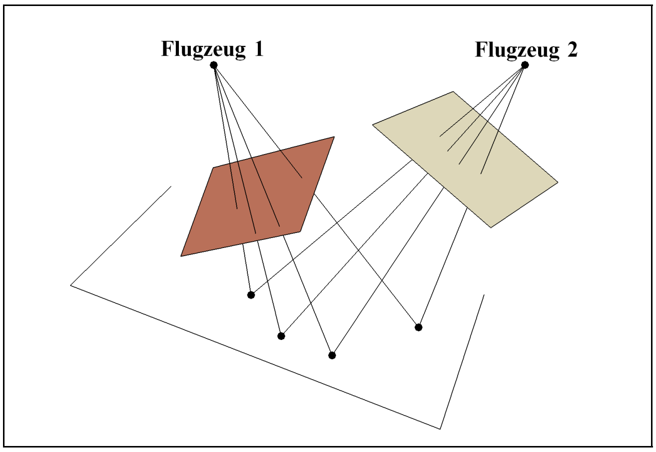
Aufgabe (70.2) Gegeben seien je vier Punkte A, B, C, D und A', B', C', D' einer projektiven Ebene; keine drei der vier Punkte A, B, C, D seien kollinear. Dann gibt es genau eine projektive Kollineation $f : P \to P'$ mit $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ und $f(D) = D'$. Zeige, wie man für einen beliebigen Punkt P das Bild $f(P)$ anhand der folgenden Hilfspunkte bestimmen kann!

$$\begin{aligned} S &:= \text{Schnittpunkt von } \overline{AB} \text{ und } \overline{CD}; \\ U &:= \text{Schnittpunkt von } \overline{AP} \text{ und } \overline{CD}; \\ V &:= \text{Schnittpunkt von } \overline{AP} \text{ und } \overline{BC}. \end{aligned}$$



Konstruktion einer projektiven Kollineation.

Bemerkung: Die Konstruktion solcher Kollineationen wird in der Photogrammetrie ausgenutzt. Bei der Auswertung von Luftbildaufnahmen tritt oft das Problem auf, verschiedene Bilder von Teilen des gleichen (als flach angenommenen) Geländes miteinander abzugleichen. Gibt es im Überlappungsbereich zweier Bilder (also demjenigen Teil des Geländes, der auf beiden Bildern zu sehen ist) vier identifizierbare Punkte, so ermöglicht es die in dieser Aufgabe behandelte Vorgehensweise, mittels einer projektiven Abbildung eine (theoretisch perfekte) Korrespondenz zwischen allen auf beiden Aufnahmen erkennbaren Geländepunkten herzustellen.



Auswertung von Luftbildaufnahmen.

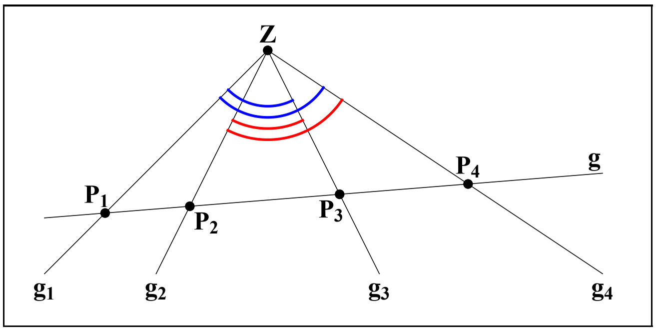
Aufgabe (70.3) Sind vier kollineare Punkte A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden g gegeben, so schreiben wir $A \preceq B \preceq C \preceq D$, wenn die Punkte, der Geraden g folgend, in dieser Reihenfolge durchlaufen werden können. Gib in den folgenden Fällen jeweils das Vorzeichen des Doppelverhältnisses $\mathrm{DV}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ an!

(a) $P_1 \preceq P_2 \preceq P_3 \preceq P_4$
(b) $P_1 \preceq P_3 \preceq P_2 \preceq P_4$
(c) $P_1 \preceq P_3 \preceq P_4 \preceq P_2$
(d) $P_3 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq P_4$
(e) $P_3 \preceq P_2 \preceq P_4 \preceq P_1$
(f) $P_3 \preceq P_4 \preceq P_1 \preceq P_2$

Aufgabe (70.4) Gegeben seien vier kopunktale Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mit dem gemeinsamen Schnittpunkt Z. Wir legen irgendeine Gerade g transversal zu den Geraden g_i und bezeichnen für $1 \le i \le 4$ mit P_i den Schnittpunkt von g_i mit g. Zeige, daß das Doppelverhältnis der Geraden g_i in sinnvoller Weise durch

$$\mathrm{DV}(g_1, g_2, g_3, g_4) \; := \; \mathrm{DV}(P_1, P_2, P_3, P_4)$$

definiert werden kann, und drücke dieses Doppelverhältnis durch die Winkel $\alpha_{ij} := \angle(g_i, g_j)$ aus!



Lösungen zu »Projektive Geometrie« siehe Seite 234

Aufgabe (70.5) Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 paarweise verschiedene Punkte in einem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$. Beweise die folgende **Veblen-Young-Bedingung**: Besitzen die Geraden $[P_1, P_2]$ und $[P_3, P_4]$ einen Schnittpunkt, dann auch die Geraden $[P_1, P_3]$ und $[P_2, P_4]$.

Aufgabe (70.6) Zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen wollen wir eine Abbildung $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ definieren, und zwar durch $\mathbb{P}(f)\big(K \cdot v\big) := K \cdot f(v)$.

(a) Zeige, daß $\mathbb{P}(f)$ genau dann wohldefiniert ist, wenn f injektiv ist. Zeige ferner, daß im Fall der Injektivität von f auch $\mathbb{P}(f)$ injektiv ist.

(b) Zeige, daß für zwei injektive lineare Abbildungen $f, g : V \to W$ genau dann $\mathbb{P}(f) = \mathbb{P}(g)$ gilt, wenn es ein Element $c \neq 0$ in K gibt mit $g = c \cdot f$.

(c) Gelten die Aussagen in (a) und (b) auch für semilineare Abbildungen?

Aufgabe (70.7) Es sei $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine bijektive Abbildung zwischen projektiven Räumen derart, daß sowohl φ als auch φ^{-1} Geraden auf Geraden abbildet. Zeige, daß eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ ist, wenn ihr Bild $\varphi(A)$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(W)$ ist; ist dies der Fall, so stimmen die (projektiven) Dimensionen von A und $\varphi(A)$ überein.

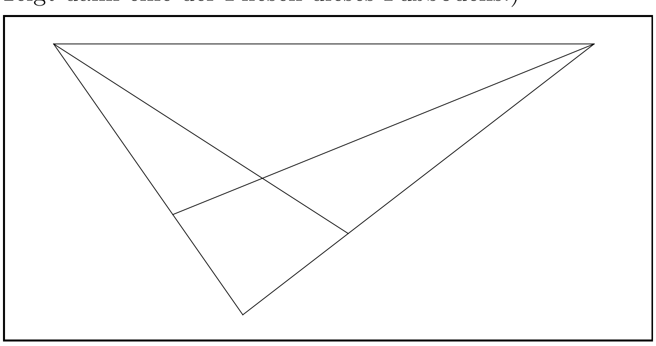
Aufgabe (70.8) Eine **projektive Basis** in einem n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}(W)$ ist eine Menge von $n+2$ Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$ derart, daß es eine Vektorraumbasis $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ von W gibt mit $P_i = [e_i]$ für $0 \le i \le n$ und $P_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$.

(a) Zeige, daß jeder projektive Raum eine projektive Basis besitzt.

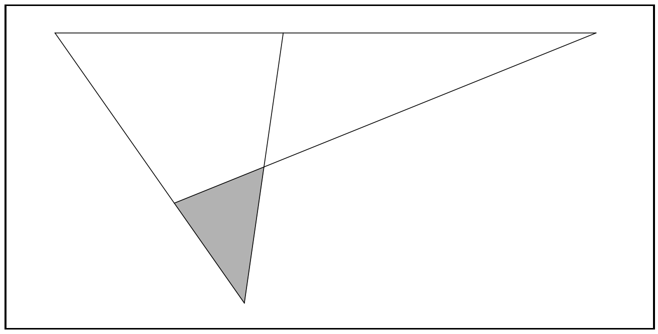
(b) Zeige, daß zwei Basen $(e_0, \ldots, e_n)$ und $(e_0', \ldots, e_n')$ von W genau dann die gleiche projektive Basis induzieren, wenn es ein Element $\lambda \neq 0$ in K gibt mit $e_i' = \lambda e_i$ für $0 \le i \le n$.

(c) Zeige: Ist $(P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1})$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(W)$ und ist $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n+1})$ projektiv unabhängig in $\mathbb{P}(W')$, so gibt es genau eine geradentreue Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W')$ mit $\varphi(P_i) = Q_i$ für alle i.

Aufgabe (70.9) Vervollständige allein mit Stift und Lineal das folgende Bild zu einer perspektivisch korrekten Wiedergabe eines mit quadratischen Platten gleicher Größe gefliesten Fußbodens! (Das abgebildete Viereck zeigt dann eine der Fliesen dieses Fußbodens.)

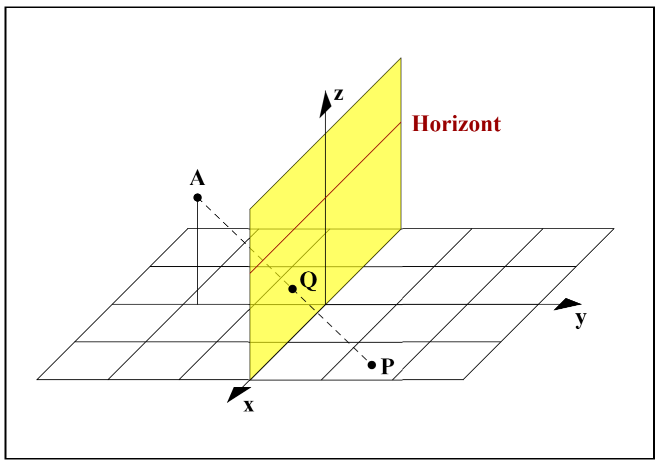


Aufgabe (70.10) (a) Ein Fußboden sei mit gleichseitigen Dreiecken gleicher Größe gefliest; das eingezeichnete Dreieck stelle eine dieser Fliesen dar. Ergänze die Zeichnung zu einer perspektivisch korrekten Darstellung des Fußbodens!



(b) Wie kann man einen Fußboden perspektivisch korrekt darstellen, der mit regelmäßigen Sechsecken gleicher Größe gefliest ist?

Aufgabe (70.11) Ein (einäugiger) Maler will die xy-Ebene (Urbildebene) so auf die xz-Ebene (Bildebene, "Leinwand") abbilden, wie er sie vom Punkt $A = (0, -d, a)$ aus sieht (a = Aughöhe, d = Distanz zur Leinwand).



(a) Auf welchen Bildpunkt $Q = (u, v)$ wird ein gegebener Originalpunkt $P = (x, y)$ abgebildet?

(b) Welcher Originalpunkt $P = (x, y)$ entspricht umgekehrt einem gegebenen Bildpunkt $Q = (u, v)$?

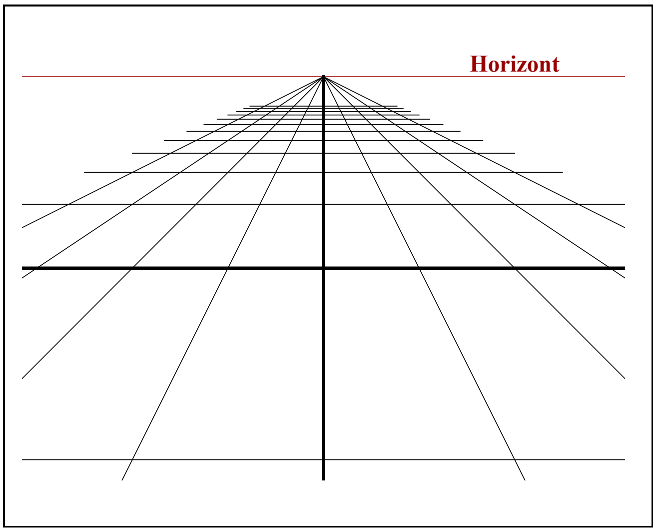
(c) Bestimme das Bild des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$!

(d) Bestimme das Bild der Normalparabel $y = x^2$!

(e) Kann man a und d so wählen, daß im Bild sowohl der Einheitskreis als auch die Normalparabel kreisförmig erscheinen?

(f) In dem folgenden Diagramm sind für $a = d = 2$ die Bilder der Koordinatenlinien für ganzzahlige Werte von x bzw. y perspektivisch korrekt wiedergegeben. Zeichne in dieses Diagramm die Bilder der Kurven $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2$ sowie $x^3 + y^3 = 6$ ein!

Lösungen zu »Projektive Geometrie« siehe Seite 234



Aufgabe (70.12) Bestimme für jede der folgenden affinen Kurven den projektiven Abschluß, d.h., bestimme in allen Fällen die Punkte im Unendlichen, die die jeweilige Kurve besitzt!
(a) $y^2 = x^2$
(b) $y^2 = x^3$
(c) $y^2 = x^3 + x$
(d) $x^3 + y^3 = xy$
(e) $y^4 = x^2 + 1$
(f) $x^2 + y^2 = 1$
(g) $x^2 + y^2 = x$
(h) $y^2 = x^3 + x^2$
(i) $y^2 = x^4 + x^2 + 1$
(j) $y^3 = x^3 + xy$
(k) $x^2 + xy + x = 0$

Aufgabe (70.13) Zeichne für die projektive Kurve $Y^2Z = X^3$ (Neilsche Parabel)
(a) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $Z = 1$;
(b) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $X = 1$;
(c) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $Y = 1$;
(d) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $X+Y+Z = 1$;
(e) eine projektive Ansicht im Einheitskreismodell.

Gib für jede der affinen Ansichten an, welche Punkte der Kurve jeweils im Unendlichen (bezüglich der gewählten affinen Ansicht) liegen.

Aufgabe (70.14) Der **Newton-Knoten** ist die projektive Kurve mit der Gleichung $Y^2Z = X^3 + X^2Z$, und die **Weierstraß-Quartik** ist die projektive Kurve mit der Gleichung $X^4 = Z^4+Y^2Z^2$. Zeichne für jede dieser beiden Kurven
(a) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $Z = 1$;
(b) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $X = 1$;
(c) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $Y = 1$;
(d) eine affine Ansicht mit der Sichtebene $X+Y+Z = 1$.

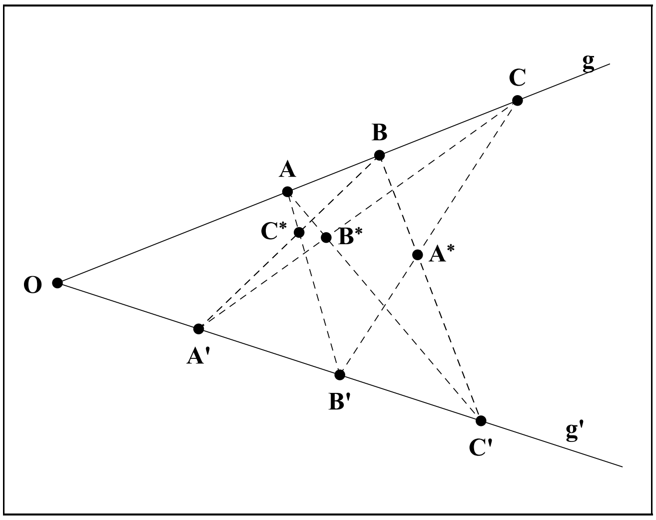
Aufgabe (70.15) Zeige, daß die Abbildung $\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ mit

$$[t_0 : t_1] \mapsto [(t_0+t_1)^2(t_0-t_1)^2 : 4t_0^2(t_0-t_1)^2 : 4t_0^2(t_0+t_1)^2]$$

wohldefiniert ist und eine Kurve in der reellen projektiven Ebene parametrisiert. Wie sieht diese Kurve aus?

Aufgabe (70.16) Der **Satz von Pappos** lautet in seiner projektiven Version folgendermaßen: Es seien A, B, C Punkte auf einer Geraden g sowie A', B', C' Punkte auf einer Geraden g'. Dann liegen die folgenden Punkte auf einer Geraden (sind also kollinear):

$$\begin{aligned} A^\star &:= \text{Schnittpunkt von } BC' \text{ und } B'C, \\ B^\star &:= \text{Schnittpunkt von } CA' \text{ und } C'A, \\ C^\star &:= \text{Schnittpunkt von } AB' \text{ und } A'B. \end{aligned}$$



In Satz (39.9) des Buches wurde die folgende (schwache) affine Version des Satzes von Pappos bewiesen: Es seien A, B, C Punkte auf einer Geraden g sowie A', B', C' Punkte auf einer Geraden g'. Gelten dann die Bedingungen $AB' \parallel A'B$ und $BC' \parallel B'C$, so gilt auch $AC' \parallel A'C$. Führe die allgemeine Version des Satzes von Pappos auf diesen Sonderfall zurück!

Aufgabe (70.17) Der **Satz von Desargues** lautet in seiner projektiven Version folgendermaßen: Es seien A, A', B, B', C und C' Punkte derart, daß die Geraden AA', BB' und CC' durch einen Punkt verlaufen (kopunktal sind). Dann liegen die folgenden Punkte auf einer Geraden (sind also kollinear):

$$\begin{aligned} A^\star &:= \text{Schnittpunkt von } BC \text{ und } B'C', \\ B^\star &:= \text{Schnittpunkt von } CA \text{ und } C'A', \\ C^\star &:= \text{Schnittpunkt von } AB \text{ und } A'B'. \end{aligned}$$

In Satz (42.7) des Buches wurde die folgende (schwache) affine Version des Satzes von Desargues bewiesen: Es seien

Lösungen zu »Projektive Geometrie« siehe Seite 234

A, A', B, B', C und C' Punkte derart, daß die Geraden AA', BB' und CC' durch einen Punkt verlaufen (kopunktal sind). Gelten dann die Bedingungen $AB \parallel A'B'$ und $BC \parallel B'C'$, so gilt auch $AC \parallel A'C'$. Führe die allgemeine Version des Satzes von Desargues auf diesen Sonderfall zurück!

Aufgabe (70.18) In projektiver Darstellung ist ein Kegelschnitt eine Menge der Form

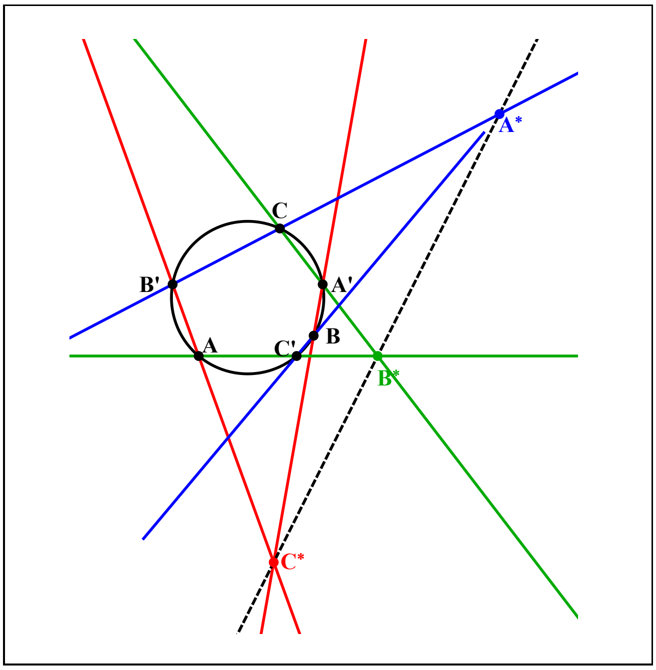
$$\{[X_0 : X_1 : X_2] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid \sum_{0\le i\le j\le 2} a_{ij}X_iX_j\}$$

mit Koeffizienten a_{ij}, die nicht sämtlich verschwinden. Wir können uns immer eine affine Darstellung eines Kegelschnitts vorstellen, zu der dann gegebenenfalls noch Punkte im Unendlichen ergänzt werden müssen. Unmittelbar anhand der Definition von Kegelschnitten ist klar, daß je zwei Kegelschnitte durch eine Zentralprojektion auseinander hervorgehen und damit projektiv äquivalent sind. Den folgenden Satz über Sechsecke (Hexagramme) auf Kegelschnitten bewies Blaise Pascal (1623-1662) als 16jähriger (!). Wegen seiner verblüffenden Aussage wird das in einer Pascal-Konfiguration auftretende Sechseck als "hexagramma mysticum" bezeichnet.

Satz von Pascal. Es seien A, C', B, A', C und B' sechs Punkte auf einem Kegelschnitt, die ein Sechseck bilden. Dann liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Sechsecksseiten auf einer Geraden, also die Punkte

$$\begin{aligned} A^\star &:= \text{Schnittpunkt von } \overline{BC'} \text{ und } \overline{B'C},\\ B^\star &:= \text{Schnittpunkt von } \overline{AC'} \text{ und } \overline{A'C},\\ C^\star &:= \text{Schnittpunkt von } \overline{AB'} \text{ und } \overline{A'B}, \end{aligned}$$

Beweise diesen Satz!



Bemerkung 1: Der Satz von Pascal umfaßt den folgenden Sonderfall: Sind einerseits $\overline{BC'}$ und $\overline{B'C}$ parallel, andererseits auch $\overline{AC'}$ und $\overline{A'C}$, so sind auch $\overline{AB'}$ und $\overline{A'B}$ parallel. In diesem Fall liegen nämlich $A^\star$ und $B^\star$ auf der unendlich fernen Geraden, folglich liegt nach dem Satz von Pascal auch $C^\star$ auf der unendlich fernen Geraden.

Bemerkung 2: Der Satz von Pappos kann als Ausartungsfall des Satzes von Pascal interpretiert werden, nämlich als der Grenzfall, in dem der betrachtete Kegelschnitt zu einem Geradenpaar entartet.

Aufgabe (70.19) Das Doppelverhältnis vierer Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist definiert durch

$$\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,z_4) \;:=\; \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\cdot\frac{z_4-z_2}{z_4-z_1} \;=\; \frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\cdot\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}.$$

In den Fällen $z_1 = \infty$, $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$ bzw. $z_4 = \infty$ ist dies zu interpretieren als

$$\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2},\ \frac{z_3-z_1}{z_4-z_1},\ \frac{z_4-z_2}{z_4-z_1} \text{ bzw. } \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Zeige, daß $\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,z_4)$ genau dann reell ist, wenn diese vier Punkte auf einem Kreis liegen. Zeige, daß diese Aussage genau die Aussage des elementargeometrischen Satzes wiedergibt, daß zwei Peripheriewinkel über einem Kreisbogen stets gleich sind oder sich zu π ergänzen!

Bemerkung: Die Aussage dieser Aufgabe erlaubt es, nicht nur vom Doppelverhältnis vierer Punkte auf einer Geraden, sondern auch vierer Punkte auf einem Kreis zu sprechen.

Aufgabe (70.20) Ein Satz der projektiven Geometrie sei gegeben. Der dazu duale Satz entsteht aus diesem durch jeweiligen Austausch der folgenden Begriffe:

- "Punkt" und "Gerade",
- "liegt auf" und "geht durch",
- "Gerade durch" und "Schnittpunkt von",
- "kollinear" und "kopunktal".

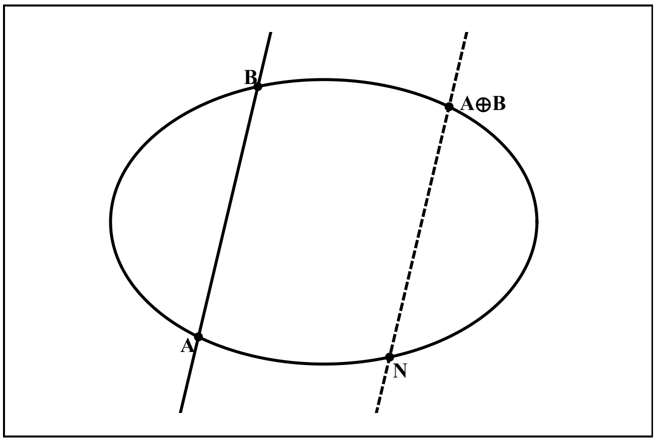
Beweise das folgende **Dualitätsprinzip**: Ist ein Satz der projektiven Geometrie wahr, so ist der dazu duale Satz automatisch auch wahr. (Jeder Beweis eines projektiven Satzes liefert also automatisch einen weiteren Satz mit.)

Aufgabe (70.21) Formuliere denjenigen Satz der projektiven Geometrie, der dual ist zum

(a) Satz von Pappos,
(b) Satz von Desargues,
(c) Satz von Pascal.

Aufgabe (70.22) Wir betrachten einen beliebigen Kegelschnitt K und wählen einen Punkt N auf K. Zu zwei Punkten $A, B \in K$ definieren wir einen dritten Punkt $A \oplus B \in K$ wie folgt: Wir betrachten die Gerade durch A und B (bzw. im Fall $B = A$ die Tangente an K durch A), verschieben diese parallel durch N und bezeichnen den zweiten Schnittpunkt dieser Parallelen mit K als $A \oplus B$.

Lösungen zu »Projektive Geometrie« siehe Seite 234

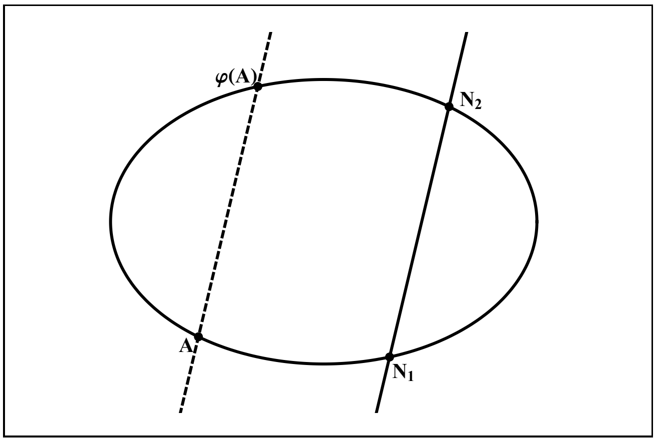


Arithmetik auf einem Kegelschnitt (hier einer Ellipse).

Zeige, daß die dadurch definierte Verknüpfung $(A, B) \mapsto A \oplus B$ die folgenden Eigenschaften hat:
(a) $B \oplus A = A \oplus B$ für alle $A, B \in K$;
(b) $N \oplus A = A$ für alle $A \in K$;
(c) zu jedem Punkt $A \in K$ existiert ein Punkt $A^\star \in K$ mit $A \oplus A^\star = N$;
(d) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ für alle $A, B, C \in K$.

Diese Eigenschaften besagen gerade, daß $(K, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. (Wir können also **Arithmetik auf Kegelschnitten** betreiben.)

Aufgabe (70.23) Bei der Definition der Addition auf einem Kegelschnitt in der vorigen Aufgabe wurde als Neutralelement völlig willkürlich irgendein Punkt N des Kegelschnitts gewählt. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß trotz dieser Willkür die zugehörige Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Genauer: Auf einem Kegelschnitt K wählen wir zwei beliebige Punkte N_1 und N_2 und bezeichnen mit $\oplus_1$ und $\oplus_2$ die zugehörigen Additionsoperationen auf K wie in der vorigen Aufgabe eingeführt. Wir definieren die Abbildung $\varphi : K \to K$ wie folgt: Wir verschieben die Gerade $\overline{N_1 N_2}$ parallel durch A und bezeichnen mit $\varphi(A)$ den zweiten Schnittpunkt dieser Parallelen mit A. Dann definiert φ einen Gruppenisomorphismus $(K, \oplus_1) \to (K, \oplus_2)$.



Gruppenisomorphismus $\varphi : (K, \oplus_1) \to (K, \oplus_2)$.

Aufgabe (70.24) Wie sieht die Gruppenoperation auf der Parabel $y = x^2$ aus, wenn wir als Neutralelement den Punkt $N = (0, 0)$ wählen?

Aufgabe (70.25) Wie sieht die Gruppenoperation auf der Hyperbel $y = 1/x$ aus, wenn wir als Neutralelement den Punkt $N = (1, 1)$ wählen?

Aufgabe (70.26) Wie sieht die Gruppenoperation auf der Parabel $y = x^2$ aus, wenn wir als Neutralelement einen beliebigen Parabelpunkt $N = (e, e^2)$ wählen?

Lösungen zu »Projektive Geometrie« siehe Seite 234

Aufgabe (73.14) Berechne die folgenden Grenzwerte!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}+3n}{n+2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

Aufgabe (73.15) Für gegebene reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) betrachten wir die neue Folge (c_n) mit $c_n := a_n + b_n$. Beweise oder widerlege (anhand eines Gegenbeispiels) die folgenden Aussagen.

(a) Sind (a_n) und (b_n) konvergent, dann ist auch (c_n) konvergent.
(b) Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, so ist (c_n) konvergent.
(c) Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, so ist (c_n) divergent.
(d) Sind (a_n) und (b_n) divergent, so ist auch (c_n) divergent.
(e) Sind (a_n) und (b_n) divergent, so ist (c_n) konvergent.

Aufgabe (73.16) Wie Aufgabe (73.15), aber mit $c_n := a_n b_n$.

Aufgabe (73.17) Für gegebene reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) mit $b_n \neq 0$ für alle n betrachten wir die neue Folge (c_n) mit $c_n := a_n/b_n$. Beweise oder widerlege (anhand eines Gegenbeispiels) die folgenden Aussagen.

(a) Sind (a_n) und (b_n) konvergent, dann ist auch (c_n) konvergent.
(b) Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, so ist (c_n) konvergent.
(c) Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, so ist (c_n) divergent.
(d) Sind (a_n) und (b_n) divergent, so ist auch (c_n) divergent.
(e) Sind (a_n) und (b_n) divergent, so ist (c_n) konvergent.

Aufgabe (73.18) Die Folge (a_n) werde rekursiv definiert durch den Startwert $a_1 := 1/4$ und die Berechnungsvorschrift $a_{n+1} := a_n^2 + (1/4)$.

(a) Berechne die Folgenglieder a_2, a_3 und a_4.

(b) Zeige, daß die Folge monoton wächst.

(c) Zeige mit vollständiger Induktion, daß $a_n \leq 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(d) Schließe, daß die Folge konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert.

Aufgabe (73.19) Die Folge (a_n) werde rekursiv definiert durch den Startwert $a_1 := 2$ und die Berechnungsvorschrift $a_{n+1} := (2a_n + 1)/3$.

(a) Berechne die Folgenglieder a_2, a_3 und a_4.

(b) Zeige mit vollständiger Induktion, daß die Folge monoton fällt und nach unten durch 1 beschränkt ist.

(c) Folgere daraus die Konvergenz der Folge und bestimme ihren Grenzwert.

Aufgabe (73.20) Um diese Aufgabe bequem formulieren zu können, verwenden wir Quantoren, schreiben also $\forall$ statt "für alle" oder "zu jedem" sowie $\exists$ statt "es existiert" oder "es gibt". Gegeben seien eine Zahlenfolge (a_n) und eine Zahl a. Erkläre genau, was die folgenden Aussagen bedeuten!

(1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(3) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(4) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(5) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(6) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(7) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(8) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(9) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(10) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(11) $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(12) $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(13) $\exists N \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(14) $\exists N \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(15) $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
(16) $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

Aufgabe (73.21) Bei Studienanfängern hört man gelegentlich die Vorstellung, die Konvergenz einer Folge (a_n) gegen einen Grenzwert a bedeute, daß sich die Folgenglieder mehr und mehr an die Zahl a annähern, ohne diese je zu erreichen. Um diese Vorstellung zu präzisieren, nennen wir eine Folge (a_n) **pseudo-konvergent** gegen den **Pseudo-Grenzwert** a, wenn $0 < |a_{n+1} - a| < |a_n - a|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Untersuche den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen!

(a) Ist eine Folge konvergent gegen a, so ist sie auch pseudo-konvergent gegen a.
(b) Ist eine Folge pseudo-konvergent gegen a, so ist sie auch konvergent gegen a.
(c) Eine Folge kann nicht gegen zwei verschiedene Pseudo-Grenzwerte gleichzeitig pseudo-konvergieren.
(d) Jede pseudo-konvergente Folge ist konvergent.
(e) Jede pseudo-konvergente Folge ist beschränkt.
(f) Jede monotone pseudo-konvergente Folge ist konvergent.
(g) Jede beschränkte und streng monotone Folge ist pseudo-konvergent.
(h) Jede beschränkte Folge besitzt eine pseudo-konvergente Teilfolge.
(i) Jede Teilfolge einer pseudo-konvergenten Folge ist wieder pseudo-konvergent.
(j) Ist (a_n) pseudo-konvergent, dann auch $(|a_n|)$.
(k) Ist (a_n) pseudo-konvergent gegen Null, dann auch $(|a_n|)$.
(l) Sind (a_n) und (b_n) pseudo-konvergent, so ist auch $(a_n + b_n)$ pseudo-konvergent.

Aufgabe (73.22) Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_n := \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$$

mit n ineinandergeschachtelten Wurzeln. Zeige, daß die Folge (a_n) konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert a!

Aufgabe (73.23) Die Folge (b_n) sei definiert durch

$$b_n := \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

mit n ineinandergeschachtelten Wurzeln.

(a) Zeige, daß die Folge (b_n) monoton wächst und nach oben beschränkt ist, also einen Grenzwert b besitzt.

(b) Zeige, daß mit dem Grenzwert a aus Aufgabe (73.22) für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$b_n \;\le\; b \;\le\; \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{(n-1)+a\sqrt{n}}}}\,.$$

Hinweis: Setze $c_n := \sqrt{n+\sqrt{(n+1)+\sqrt{(n+2)+\cdots}}}$ und beweise die Abschätzung $c_n \le \sqrt{n}\cdot a$.

(c) Bestimme b auf drei Nachkommastellen genau!

Aufgabe (73.24) Für eine gegebene Zahl $a \ge 0$ sei

$$x_n \;:=\; \sqrt{a+\cdots+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}$$

(mit n ineinandergeschachtelten Quadratwurzeln). Diskutiere das Konvergenzverhalten der Folge (x_n) in Abhängigkeit von a!

Aufgabe (73.25) Für eine gegebene Zahl $a \ge 0$ sei

$$x_n \;:=\; \sqrt{a\cdots\sqrt{a\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{a}}}}$$

(mit n ineinandergeschachtelten Quadratwurzeln). Diskutiere das Konvergenzverhalten der Folge (x_n) in Abhängigkeit von a!

Aufgabe (73.26) Es sei $a > 0$ eine beliebige positive Zahl. Wir wählen einen beliebigen Startwert $x_0 > 0$ und betrachten dann die Folge (x_n), die definiert wird durch die Rekursionsformel

$$x_{n+1} \;:=\; \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Es gilt $x_{n+1} \ge \sqrt{a}$ für alle $n \ge 0$.
(b) Es gilt $x_{n+1} \le x_n$ für alle $n \ge 1$.
(c) Die Folge (x_n) konvergiert.
(d) Der Grenzwert der Folge (x_n) ist $\sqrt{a}$.
(e) Es gilt die Abschätzung $\vert x_{n+1}-\sqrt{a}\vert \le \dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}$.
(f) Das n-te Folgenglied ist explizit gegeben durch

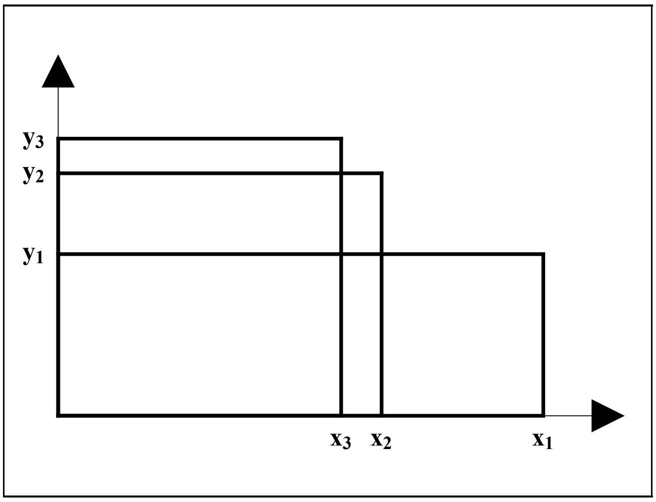
$$x_n \;=\; \sqrt{a}\cdot\frac{(x_0+\sqrt{a})^{2^n}+(x_0-\sqrt{a})^{2^n}}{(x_0+\sqrt{a})^{2^n}-(x_0-\sqrt{a})^{2^n}}\,.$$

Bemerkung: Die in dieser Aufgabe angegebene Methode zur Berechnung von Quadratwurzeln wird als **Babylonisches Wurzelziehen** bezeichnet. Die Abschätzung in (e) bezeichnet man als a-posteriori-Abschätzung; sie erlaubt es, den Abstand eines Folgengliedes vom Grenzwert durch den entsprechenden Abstand des vorhergehenden Folgengliedes abzuschätzen.

Aufgabe (73.27) Ist $a > 0$, so bedeutet das Lösen der Gleichung $x^2 = a$ geometrisch, ein Quadrat mit der Kantenlänge $x := \sqrt{a}$ zu konstruieren. Um ein solches Quadrat zu finden, bildet man eine Folge von Rechtecken, deren Seitenlängen x_n und y_n jeweils die Bedingung $x_n \cdot y_n = a$ erfüllen und die so gewählt werden, daß die Werte x_n und y_n immer näher zusammenrücken, was man dadurch erreicht, daß x_{n+1} gerade als arithmetisches Mittel von x_n und y_n gewählt wird; wir definieren also (beginnend beispielsweise mit $x_0 := a$ und $y_0 := 1$) die Seitenlängen x_n und y_n rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{x_n+y_n}{2} \quad \text{und} \quad y_{n+1} := \frac{a}{x_{n+1}} = \frac{2a}{x_n+y_n}\,.$$

Zeige, daß diese Methode genau das Babylonische Wurzelziehen zur Berechnung von $\sqrt{a}$ liefert! Benutze dieses Verfahren, um $\sqrt{5}$ auf drei Nachkommastellen genau zu bestimmen.



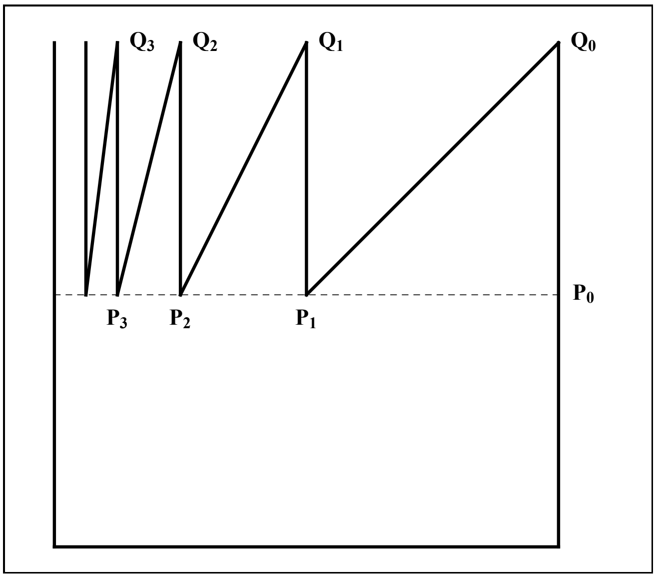
Geometrische Deutung des Babylonischen Wurzelziehens.

Lösungen zu »Die Vollständigkeit der Zahlengeraden« siehe Seite 301

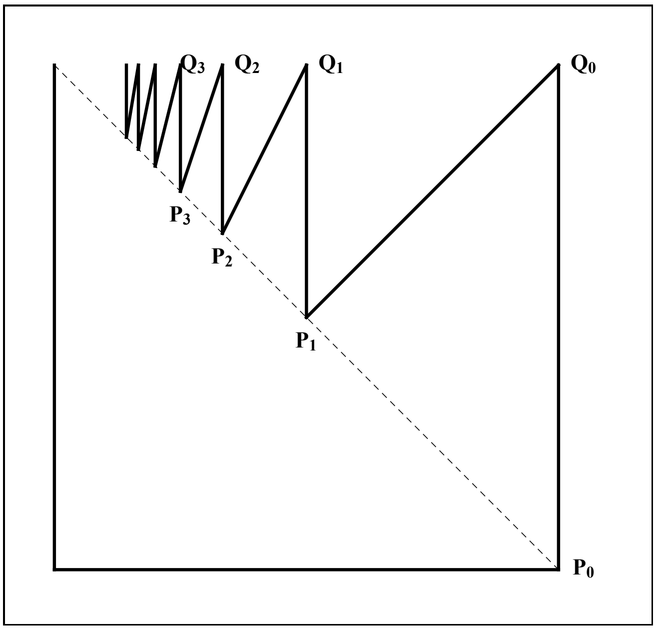
A75: Reihen

Aufgabe (75.1) Wir betrachten das Quadrat mit den Ecken $A := (0, 0)$, $B := (1, 0)$, $C := (1, 1)$ und $D := (0, 1)$ und führen die folgenden Konstruktionen durch.

(a) Wir setzen $P_0 := (1, 1/2)$ und $Q_0 := (1, 1)$ und definieren dann jeweils P_k als den Schnittpunkt der Geraden $\overline{AQ_{k-1}}$ mit der Geraden $y = 1/2$ sowie Q_k als den Punkt senkrecht oberhalb von P_k auf dem oberen Rand des Quadrates.

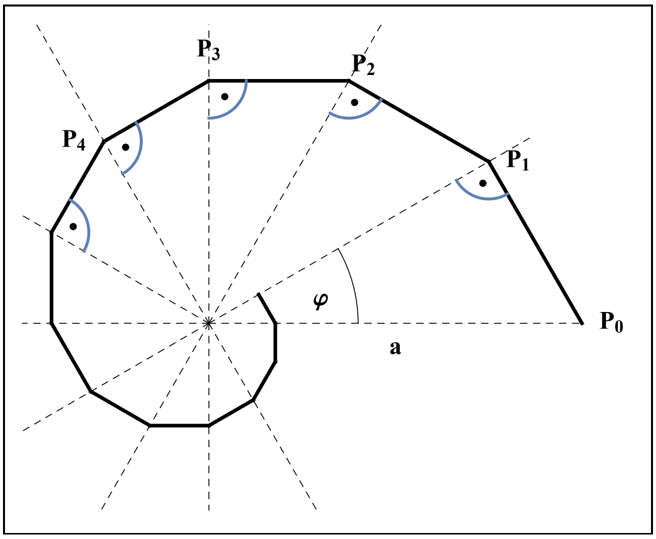


(b) Wir setzen $P_0 := (1, 0)$ und $Q_0 := (1, 1)$ und definieren dann jeweils P_k als den Schnittpunkt der Geraden $\overline{AQ_{k-1}}$ mit der Geraden $y = 1-x$ sowie Q_k als den Punkt senkrecht oberhalb von P_k auf dem oberen Quadratrand.



Fällen wir in (a) bzw. (b) von jedem der Punkte P_k aus das Lot auf die Gerade $\overline{AB}$ (also auf die untere Kante des Quadrates), so erhalten wir eine Folge von Trapezflächen. Zeige, daß die Summe dieser Trapezflächen einem endlichen Wert zustrebt, während die Summe der Längen $\overline{Q_{k-1}P_k} + \overline{P_kQ_k}$ gegen Unendlich geht. (Wir erhalten sozusagen ein Gebiet endlichen Flächeninhalts mit unendlichem Umfang bzw. ein Grundstück endlicher Fläche, das von einem Zaun unendlicher Länge begrenzt wird.)

Aufgabe (75.2) Von einem Ursprungspunkt O aus werden Strahlen abgetragen, jeweils um einen vorgegebenen Winkel φ auseinanderliegend. Auf dem Anfangsstrahl wählt man den Punkt P_0 im Abstand a vom Ursprungspunkt. Von P_0 aus fälle man das Lot auf den nächsten Strahl und bezeichne den Fußpunkt mit P_1. Fährt man so fort, so bilden die Strecken $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... einen Polygonzug, der sich spiralig um den Ursprungspunkt O zusammenzieht. Welche Länge hat dieser Polygonzug? Was ergibt sich speziell für $\varphi = 30^0$ wie in der Zeichnung?



Aufgabe (75.3) Eine Ansammlung n gleichartiger homogener Platten der Länge ℓ ist so zu stapeln, daß die oberste Platte möglichst weit über die unterste Platte hinausragt. Welcher maximale Überhang kann erzielt werden? Was geschieht für $n \to \infty$?

Hinweis: Man beginne gedanklich mit der obersten Platte und nehme die unteren Platten schrittweise hinzu. Beim Hinzufügen einer Platte wird der Überhang maximal, wenn die Kante der neuen Platte genau unter dem Schwerpunkt der über ihr befindlichen Platten liegt; es herrscht dann gerade noch Gleichgewicht.

Aufgabe (75.4) Achill kann mit der Geschwindigkeit v laufen, eine Schildkröte dagegen nur mit der kleineren Geschwindigkeit $u < v$. Dennoch kann laut der folgenden Argumentation des Philosophen Zenon von Elea (etwa 490-430 v. Chr.) Achill die Schildkröte nie einholen, wenn man ihr einen (noch so kleinen) Vorsprung $a > 0$

Lösungen zu »Reihen« siehe Seite 325

einräumt: Achill braucht zunächst eine Zeit t_1, bis er den Punkt erreicht, zu dem sich die Schildkröte anfangs befand; während der Zeitspanne t_1 hat sich diese aber weiterbewegt. Also braucht Achill eine endliche Zeitspanne t_2, um den Punkt zu erreichen, an dem sich die Schildkröte zur Zeit t_1 befand. Während dieser Zeitdauer t_2 hat sich die Schildkröte aber wieder weiterbewegt, hat also auch nach der Zeitdauer $t_1 + t_2$ noch einen Vorsprung vor Achill. Dieses Argument kann man immer weiterführen, was nach Zenon zeigt, daß Achill die Schildkröte niemals erreicht. Was ist an Zenons Argumentation falsch, und nach welcher Zeitdauer erreicht Achill die Schildkröte?

Aufgabe (75.5) Es sei $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind!
(1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
(2) Für jede Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.
(3) Es gibt eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe (75.6) Beweise die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ mit einem Widerspruchsbeweis!

Aufgabe (75.7) Berechne die Werte der folgenden konvergenten Reihen!

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{3}^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=3}^{\infty} 0.2^n$$

Aufgabe (75.8) Berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots$$

Aufgabe (75.9) Berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots .$$

Hinweis: Das n-te Glied der Reihe läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Aufgabe (75.10) Für welche komplexen Zahlen z konvergieren die folgenden Reihen?

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^n+1} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{z^n+1}$$

Aufgabe (75.11) Es sei z eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Benutze die Identität

$$\frac{2^n}{z^{2^n}+1} = \frac{2^n}{z^{2^n}-1} - \frac{2^{n+1}}{z^{2^{n+1}}-1}$$

zur Berechnung des Wertes der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{2^n}+1}$.

Aufgabe (75.12) Für welche Werte $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe? Welches ist im Konvergenzfall der Wert der Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iz-3+2i}{2z+i}\right)^n$$

Aufgabe (75.13) Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen. Wir definieren eine neue Folge (b_n) durch $b_n := a_{2n-1} + a_{2n}$. Beweise oder widerlege jede der folgenden Aussagen! (Wir schreiben kurz $\sum$ statt $\sum_{n=1}^{\infty}$.)
(a) Konvergiert $\sum a_n$, dann auch $\sum b_n$.
(b) Konvergiert $\sum b_n$, dann auch $\sum a_n$.
(c) Konvergiert $\sum a_n$ absolut, dann auch $\sum b_n$.
(d) Konvergiert $\sum b_n$ absolut, dann auch $\sum a_n$.

Aufgabe (75.14) Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen. Wir definieren eine neue Folge (b_n) durch $b_1 := a_1$ und $b_n := a_n - a_{n-1}$ für $n \geq 2$. Beweise oder widerlege jede der folgenden Aussagen! (Wir schreiben kurz $\sum$ statt $\sum_{n=1}^{\infty}$.)
(a) Konvergiert (a_n), so konvergiert $\sum b_n$.
(b) Konvergiert (a_n), so konvergiert $\sum b_n$ absolut.
(c) Konvergiert $\sum a_n$, dann auch $\sum b_n$.
(d) Konvergiert $\sum a_n$, so konvergiert $\sum b_n$ absolut.
(e) Konvergiert $\sum a_n$ absolut, dann auch $\sum b_n$.

Aufgaben (75.15) Es seien $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ und $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ Folgen komplexer Zahlen. Beweise die folgenden Aussagen! (Wir schreiben kurz $\sum$ statt $\sum_{n=1}^{\infty}$.)
(a) Konvergieren die Reihen $\sum |a_n|^2$ und $\sum |b_n|^2$, so konvergiert auch $\sum |a_n b_n|$ und $\sum |a_n + b_n|^2$.
(b) Konvergiert $\sum |a_n|^2$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so konvergiert auch $\sum |\lambda a_n|^2$.

Folgere, daß die Menge ℓ^2 aller Folgen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ ein Vektorraum ist und daß durch

$$\langle a, b\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

ein Skalarprodukt auf ℓ^2 definiert ist.

Aufgabe (75.16) Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Zeige: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, so konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Lösungen zu »Reihen« siehe Seite 325

A77: Wurzeln, Potenzen, Logarithmen

Aufgabe (77.1) (a) Beweise die Gleichungen

$$\sqrt{5 \pm \sqrt{24}} \;=\; \sqrt{3} \pm \sqrt{2}\,.$$

(b) Finde rationale Zahlen a, b, c, d mit $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ und $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = c + d\sqrt{3}$.

Aufgabe (77.2) Löse die folgenden Gleichungen!

(a) $x + 2\sqrt{x} = 3$	(d) $3\sqrt{x} + 2x + 1 = 0$
(b) $x + x\sqrt{2} = 3$	(e) $\sqrt{x} + x = 2$
(c) $2 + 3\sqrt{x} = x$	(f) $x + 2 = 3\sqrt{x}$

Aufgabe (77.3) Löse die folgenden Wurzelgleichungen!

(a) $x^2 + \sqrt{2x^2+11} = 2$
(b) $\sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}} = 4$
(c) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$
(d) $\sqrt{x-a^2} + \sqrt{x-b^2} = a - b$
(e) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x-7} + \sqrt{x-6}$
(f) $\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{8x-x^2-15} = 7$

Aufgabe (77.4) Löse die folgenden Wurzelgleichungen!

(a) $\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{6}+1} = \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{6}+1}$

(b) $\sqrt{x-4} - \dfrac{3}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-1}$

(c) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

(d) $\sqrt{a+x} - \sqrt{\dfrac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}$

Aufgabe (77.5) Bestimme für jede der folgenden Ungleichungen die Lösungsmenge!

(a) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

(b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} > \sqrt{x}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$

Aufgabe (77.6) Finde alle Zahlen $x, y \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \;=\; \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

Aufgabe (77.7) Bestimme den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion

$$f(x) \;=\; \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}},$$

vereinfache den angegebenen Ausdruck für $f(x)$ und skizziere dann den Verlauf der Funktion f!

Aufgabe (77.8) Beweise die folgende Gleichung!

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}} + \sqrt{16-2\sqrt{29}\,+\,2\sqrt{55-10\sqrt{29}}} \;=\; \sqrt{5} + \sqrt{22+2\sqrt{5}}$$

(D. Shanks, *Incredible Identities*, Fibonacci Quarterly **12**, 1974, S. 271/280.)

Aufgabe (77.9) Wir haben

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)^1 &= 1+\sqrt{2},\\ (\sqrt{2}+1)^2 &= 3+2\sqrt{2},\\ (\sqrt{2}+1)^3 &= 7+5\sqrt{2},\\ (\sqrt{2}+1)^4 &= 17+12\sqrt{2}\end{aligned}$$

und allgemein $(\sqrt{2}+1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ mit natürlichen Zahlen a_n und b_n. Zeige, daß in jedem Fall a_n diejenige ganze Zahl ist, die am dichtesten bei $b_n\sqrt{2}$ liegt.

Aufgabe (77.10) Skizziere in jedem der folgenden Fälle die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, auf der beide Seiten der angegebenen Gleichung überhaupt definiert sind, und dann die Menge derjenigen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die die angegebene Gleichung erfüllen.

(a) $\sqrt{x^2-y^2} = x - y$
(b) $\sqrt{x^2+y^2} = x + y$
(c) $\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$
(d) $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

Aufgabe (77.11) Eine Heeresformation habe die Form eines Quadrats der Kantenlänge $\ell = 1$ km und bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts. Ein Kurier zu Pferd reitet, am hinteren Ende des Heeres beginnend, einmal um die Formation herum, und zwar immer exakt am Rand der Formation entlang. Er erreicht seinen Ausgangspunkt genau in dem Moment wieder, als die Heeresformation exakt einen Kilometer zurückgelegt hat. Welche Strecke hat der Kurier dann zurückgelegt?

Aufgabe (77.12) Wir betrachten einen geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit u strömenden Fluß sowie zwei Schwimmer A und B, die beide mit der Geschwindigkeit $v > u$ relativ zum Wasser schwimmen. Beide schwimmen die gleiche Strecke s hin und zurück (legen

Lösungen zu »Wurzeln, Potenzen, Logarithmen« siehe Seite 341

also insgesamt die Strecke $2s$ zurück), wobei A parallel zur Fließrichtung schwimmt (also einmal stromaufwärts, einmal stromabwärts), dagegen B senkrecht zur Fließrichtung (also quer durch den Fluß). Welche Zeiten t_A und t_B benötigen die beiden Schwimmer? Welche dieser beiden Zeiten ist kürzer?

Aufgabe (77.13) Löse die folgenden Gleichungen!
(a) $\sqrt[3]{(x+7)^2} - \sqrt[3]{x+7} = 6$
(b) $\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x-5} = 1$

Aufgabe (77.14) Beweise die folgenden Gleichungen!

(a) $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = 2$

(b) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$

(c) $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 1$

Hinweis: Bezeichne jeweils die linke Seite der Gleichung mit x und leite eine Polynomgleichung her, die von x erfüllt wird.

Aufgabe (77.15) Finde ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, das $\sqrt[4]{5/3} + \sqrt[4]{3/5}$ als Nullstelle hat.

Aufgabe (77.16) Finde für jede der folgenden Zahlen x ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, das x als Nullstelle hat!

(a) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (c) $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$
(b) $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ (d) $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$

Aufgabe (77.17) Vereinfache die folgenden Ausdrücke!

(a) $4^{5/2} - \dfrac{4^x \cdot 4^{2x}}{2^{3x}}$

(b) $\dfrac{a^{1/2}}{a^{2/3}} + \dfrac{a^{1/2} + a^{2/3}}{a^{4/3} + a^{3/2}}$

(c) $\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[6]{27}$

(d) $\dfrac{\sqrt[6]{a^{11}} + \sqrt[5]{a^9} - \sqrt[4]{a^7} - \sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[6]{1/a} + \sqrt[5]{1/a} - \sqrt[4]{1/a} - \sqrt[3]{1/a}}$

Aufgabe (77.18) Benutze das Babylonische Wurzelziehen, um die dritte Wurzel aus 5 auf drei Nachkommastellen genau zu berechnen.

Lösungen zu »Wurzeln, Potenzen, Logarithmen« siehe Seite 341

Aufgabe (77.19) In der wohltemperierten Stimmung wird eine Oktave so in zwölf Halbtonschritte unterteilt, daß das Verhältnis der Frequenz eines Tons zur Frequenz des einen Halbtonschritt darunter liegenden Tons stets den gleichen Wert q hat. Dabei hat der Ton, der eine Oktave über dem Grundton liegt, eine doppelt so hohe Frequenz wie der Grundton. Bestimme q und ermittle den numerischen Wert von q auf drei Nachkommastellen genau!

Aufgabe (77.20) Zeige: Für alle natürlichen Zahlen $m \geq n$ gilt
$$\sqrt[m]{n} \;\leq\; \sqrt[3]{3}.$$

Aufgabe (77.21) Bestimme die folgenden Grenzwerte!
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$
(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$
(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{4n^5}$
(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+2n+1}$
(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$
(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\sqrt[n+2]{n+3}}$

Aufgabe (77.22) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$$
und untersuche, an welchen Punkten auf dem Rand des Konvergenzkreises noch Konvergenz vorliegt.

Aufgabe (77.23) Berechne die folgenden Logarithmen!

$\log_4 64$	$\log_2 64$	$\log_2 8$	$\log_2(1/8)$	$\log_4 2$
$\log_3 81$	$\log_5(1/5)$	$\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$	$\log_{100} 10$	$\log_{1000} 100$

Aufgabe (77.24) Vereinfache die folgenden Ausdrücke!
$$\frac{\log_b(x^{10})}{\log_b(x^5)} \qquad \frac{\log_b(3x^2) - \log_b(3x/2)}{\log_b(2x)} \qquad \frac{\log_{2b}(b^{3x})}{\log_b(b^{3x})}$$

Aufgabe (77.25) Zeige, daß für alle $a, b > 0$ mit $a, b \neq 1$ die folgenden Gleichungen gelten!
$$\log_b a + \log_{(1/b)} a \;=\; 0 \qquad \log_a b \cdot \log_b a \;=\; 1$$
Für welche $a, b > 0$ gilt $a^b = 1$?

Aufgabe (77.26) Löse die folgenden Gleichungen nach x auf!
(a) $9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$
(b) $(a/b)^x = (b/a)^c$
(c) $(2/3)^x + (3/2)^x = 13/6$
(d) $a^x + a^{x+1} + a^{x+2} = a^6$
(e) $1 - a^x + a^{2x} - a^{3x} = 0$
(f) $a^x + a^{2x} = a^3$
(g) $a^x + a^{2x} = a^{3x}$

Aufgabe (77.27) Finde jeweils reelle Zahlen $a, b > 0$ mit den angegebenen Eigenschaften oder beweise, daß es solche Zahlen nicht geben kann!
(a) a rational, b rational, a^b rational
(b) a rational, b rational, a^b irrational
(c) a rational, b irrational, a^b rational
(d) a rational, b irrational, a^b irrational
(e) a irrational, b rational, a^b rational
(f) a irrational, b rational, a^b irrational
(g) a irrational, b irrational, a^b rational
(h) a irrational, b irrational, a^b irrational

Aufgabe (77.28) Es sei $I := (0, \infty)$. Wir wollen möglichst genau bestimmen, welche reelle Zahlen $x, y \in I$ die Gleichung

$$(\star) \qquad x^y = y^x$$

erfüllen. Dabei heißt eine Lösung von $(\star)$ trivial, wenn $x = y$ gilt, andernfalls nichttrivial.
(a) Zeige, daß (x, y) genau dann eine nichttriviale Lösung von $(\star)$ ist, wenn es eine Zahl $t > 0$ mit $t \neq 1$ gibt mit $x = t^{1/(1-t)}$ und $y = tx = t^{t/(t-1)}$. – **Hinweis:** Setze $t := y/x$. (In geometrischer Formulierung fragen wir also, welche Elemente der Menge $\{(x, y) \in I^2 \mid x^y = y^x\}$ auf der Ursprungsgeraden $y = tx$ mit der Steigung t liegen.)
(b) Zeige, daß $(x, y) \in I^2$ genau dann eine nichttriviale Lösung von $(\star)$ ist, wenn es eine Zahl $u \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ gibt mit

$$x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u, \quad y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

Hinweis: Benutze die Darstellung aus Teil (a) und substituiere $t = 1 + (1/u)$.
(c) Finde alle rationalen Lösungen von $(\star)$.
(d) Finde alle ganzzahligen Lösungen von $(\star)$.

Aufgabe (77.29) Wir betrachten für $x, y, z > 0$ die Gleichung

$$(x^y)^z = x^{(y^z)}.$$

(a) Charakterisiere alle Lösungen (x, y, z) dieser Gleichung!
(b) Finde alle rationalen Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ dieser Gleichung!
(c) Finde alle ganzzahligen Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ dieser Gleichung!

Aufgabe (77.30) Es seien (a_n) und (b_n) Folgen nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Zeige: Ist $(a, b) \neq (0, 0)$, so gilt $a_n^{b_n} \to a^b$. Zeige ferner, daß diese Aussage für $(a, b) = (0, 0)$ nicht mehr gilt.

Aufgabe (77.31) Es sei (a_n) eine beliebige Folge von Null verschiedener komplexer Zahlen. Beweise die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, daß immer dann, wenn das Quotientenkriterium als Konvergenzkriterium für Reihen greift, das Wurzelkriterium ebenfalls greift (und damit also das stärkere Kriterium ist); vgl. Aufgabe (76.15).

Aufgabe (77.32) Für welche Startwerte $x_0 > 0$ konvergiert die durch die Rekursionsformel $x_{n+1} := x_n^{x_n}$ definierte Folge reeller Zahlen? Welches ist im Konvergenzfall der Grenzwert der Folge?

Aufgabe (77.33) Es sei $a > 0$ eine fest vorgegebene Zahl. Für welche Startwerte $x_0 > 0$ konvergiert die durch die Rekursionsformel $x_{n+1} := x_n^a$ definierte Folge reeller Zahlen? Welches ist im Konvergenzfall der Grenzwert der Folge?

Aufgabe (77.34) Für welche Zahlen $a > 0$ existiert

$$\left(\left(\left((a^a)^a\right)^a\right)^a\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} \quad ?$$

Aufgabe (77.35) Es sei $a > 0$ eine fest vorgegebene Zahl. Für welche Startwerte $x_0 > 0$ konvergiert die durch die Rekursionsformel $x_{n+1} := a^{x_n}$ definierte Folge reeller Zahlen? Welches ist im Konvergenzfall der Grenzwert der Folge?

Aufgabe (77.36) Für welche Zahlen $a > 0$ existiert

$$\cdot^{\cdot^{\cdot}} a^{\left(a^{(a^a)}\right)} \quad ?$$

Warnung! Die beiden letzten Aufgaben sind zwar mit den in der Vorlesung eingeführten Begriffen formulierbar, aber (vermutlich) mit den bisher behandelten Methoden nicht vollständig lösbar. Versuche, die Aufgaben zumindest teilweise zu lösen; sobald uns der Ableitungsbegriff zur Verfügung steht, werden wir noch einmal auf diese beiden Aufgaben zurückkommen.

Lösungen zu »Wurzeln, Potenzen, Logarithmen« siehe Seite 341

Aufgabe (85.33) Zeige auf zwei Arten, daß in einem Hausdorff-Raum alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind: einmal mit Umgebungen, einmal mit Netzen.

Aufgabe (85.34) Zeige, daß für einen topologischen Raum X die folgenden Bedingungen äquivalent sind!

(1) Zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X gibt es Umgebungen U von x und V von y mit $x \notin V$ und $y \notin U$.
(2) Jede einpunktige Menge $\{x\}$ ist abgeschlossen in X.

Aufgabe (85.35) Wir betrachten ein Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und die Menge aller Paare (P,Z) der folgenden Art:

- $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, d.h., P ist eine Partition des Intervalls $[a,b]$ (als deren **Feinheit** wir die Zahl $|P| := \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$ bezeichnen);
- $Z = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ mit $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ für $1 \leq k \leq n$, d.h., die Menge Z besteht aus Zwischenpunkten der Partition P.

Wir können die Menge der Paare (P,Z) einerseits zu einer gerichteten Menge I machen, indem wir

$$(P,Z) \preceq_1 (P',Z') \;:\Leftrightarrow\; P' \subseteq P$$

setzen. (Es gilt also $(P,Z) \preceq_1 (P',Z')$ genau dann, wenn die Partition P' eine Verfeinerung der Partition P ist, also aus P durch Hinzufügung weiterer Unterteilungspunkte entsteht). Wir können die Menge der Paare (P,Z) andererseits auch zu einer gerichteten Menge J machen, indem wir

$$(P,Z) \preceq_2 (P',Z') \;:\Leftrightarrow\; |P'| \leq |P|$$

setzen. (Es gilt also $(P,Z) \preceq_2 (P',Z')$ genau dann, wenn die Partition P' mindestens die gleiche Feinheit hat wie die Partition P.) Ist nun $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so schreiben wir

$$R(f;P,Z) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

für die zu (P,Z) gehörige Riemannsche Summe von f.

(a) Zeige, daß $\big(R(f;P,Z)\big)_{(P,Z)\in I}$ ein Teilnetz des Netzes $\big(R(f;P,Z)\big)_{(P,Z)\in J}$ ist.
(b) Zeige, daß das Netz $\big(R(f;P,Z\big)_{(P,Z)\in I}$ genau dann gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn das Netz $\big(R(f;P,Z)\big)_{(P,Z)\in J}$ gegen a konvergiert. (Ist dies der Fall, so heißt f Riemann-integrierbar, und der Wert a heißt das Riemann-Integral von f.)

Aufgabe (85.36) Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume, so wird die **Boxtopologie** auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ als diejenige Topologie definiert, die von allen Mengen $\prod_{i\in I} U_i$ mit U_i offen in X_i erzeugt wird. †

Wir betrachten nun auf der Menge $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ aller Funktionen $a : \mathbb{N} \to [0,1]$ bzw. aller Folgen von Elementen aus $[0,1]$ drei Topologien: die Produkttopologie τ_1, die von der Metrik $d(a,b) := \sup_n |a_n - b_n|$ induzierte Topologie τ_2 und die Boxtopologie τ_3.

(a) Beweise die Inklusionen $\tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \tau_3$.
(b) Schreibe $a = (0,0,0,\ldots)$ und definiere

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= (1,\,0,\,0,\,0,\,\ldots),\\ a^{(2)} &= (0,\,1,\,0,\,0,\,\ldots),\\ a^{(3)} &= (0,\,0,\,1,\,0,\,\ldots) \end{aligned}$$

und so weiter. Zeige, daß $a^{(n)} \to a$ bezüglich τ_1, aber nicht bezüglich τ_2 gilt, und schließe daraus, daß die Inklusion $\tau_1 \subseteq \tau_2$ echt ist.

(c) Schreibe wieder $a = (0,0,0,\ldots)$ und definiere diesmal

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= (1,\,0,\,0,\,0,\,\ldots),\\ a^{(2)} &= (1/2,\,1/2,\,0,\,0,\,\ldots),\\ a^{(3)} &= (1/3,\,1/3,\,1/3,\,0,\,\ldots) \end{aligned}$$

und so weiter. Zeige, daß $a^{(n)} \to a$ bezüglich τ_2, aber nicht bezüglich τ_3 gilt, und schließe daraus, daß die Inklusion $\tau_2 \subseteq \tau_3$ echt ist.

Aufgabe (85.37) Es seien X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Punkt in X. Beweise folgende Aussagen!

(1) **Konvergenz konstanter Netze:** Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X mit $x_i = p$ für alle $i \in I$, so gilt $x_i \to p$.
(2) **Konvergenz von Teilnetzen:** Konvergiert ein Netz (x_i) in X gegen p, so konvergiert auch jedes Teilnetz (x_{i_j}) gegen p.
(3) **Nichtkonvergenz:** Konvergiert ein Netz (x_i) in X nicht gegen p, so gibt es ein Teilnetz (x_{i_j}) mit der Eigenschaft, daß kein Teilnetz $(x_{i_{j_k}})$ von (x_{i_j}) gegen p konvergiert.
(4) **Iterierte Konvergenz:** Es sei I eine gerichtete Menge, und für jedes $i \in I$ sei J_i eine gerichtete Menge; wir machen dann $K := I \times \prod_{i\in I} J_i$ zu einer gerichteten Menge, indem wir festsetzen, daß genau dann $(i_1, f) \preceq (i_2, g)$ in K gilt, wenn $i_1 \leq i_2$ in I gilt und wenn für jedes $i \in I$ die Bedingung $f(i) \leq g(i)$ in J_i gilt. Gilt in dieser Situation für jedes feste $i \in I$ die Aussage $x_j^{(i)} \to x^{(i)}$ (bezüglich der gerichteten Menge J_i) und gilt $x^{(i)} \to p$ (bezüglich der gerichteten Menge I), so gilt, wenn wir $x_{(i,f)} := x_{f(i)}^{(i)}$ definieren, auch $x_{(i,f)} \to p$ (bezüglich der gerichteten Menge K).

† Beachte, daß die Produkttopologie von denjenigen Mengen $\prod_{i\in I} U_i$ mit U_i offen in X_i erzeugt wird, bei denen $U_i \neq X_i$ nur für endlich viele Indices $i \in I$ gilt. Die Produkttopologie ist damit gröber als die Boxtopologie. (Die beiden Topologien stimmen überein, wenn I endlich ist, wenn also ein Produkt endlich vieler Faktoren gebildet wird.)

Lösungen zu »Topologische Räume« siehe Seite 431

Aufgabe (85.38) Es sei X eine beliebige Menge. Eine **Konvergenzstruktur** auf X ist eine Relation $\to$ von der Familie aller Netze (x_i) in X nach der Menge aller Punkte $p \in X$, die die Eigenschaften (1) bis (4) der vorigen Aufgabe hat. Zeige, daß es genau eine Topologie τ auf X gibt mit der Eigenschaft, daß genau dann $(x_i) \to p$ im Sinne der betrachteten Relation gilt, wenn $x_i \to p$ im Sinne der Topologie τ gilt.

Hinweis: Definiere für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq X$ die Menge $c(A)$ als die Menge aller derjenigen Punkte $p \in X$, für die es ein Netz $(a_i)_{i\in I}$ in A gibt mit $(a_i) \to p$ im Sinne der betrachteten Relation. Zeige, daß c ein Hülloperator im Sinne von Aufgabe (85.25) ist!

Bemerkung: Wir wissen aus den Aufgaben (85.23) bis (85.26), daß wir jeden der Begriffe Offenheit, Abgeschlossenheit, Umgebungssystem, Abschlußbildung, Bilden des inneren Kerns als Grundbegriff wählen können, um eine topologische Struktur auf einer Menge zu definieren. (Die anderen Begriffe lassen sich dann jeweils aus dem gewählten Grundbegriff ableiten.) Diese Aufgabe zeigt nun, daß wir auch den Begriff Konvergenz als Grundbegriff wählen können; d.h., wir können eine Topologie auf einer Menge X dadurch definieren, daß wir festlegen, welche Netze in X gegen welche Grenzwerte konvergieren sollen.

Aufgabe (85.39) Es sei $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge eines topologischen Raums X. Zeige, daß durch

$$A \leq B \;:\Leftrightarrow\; A \subseteq \overline{B}$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{P}(X)$ definiert wird. Ist diese Relation identitiv?

Aufgabe (85.40) Es sei τ die Familie aller Teilmengen $U \subseteq \mathbb{Z}$ mit folgender Eigenschaft:

($\star$) zu jedem Element $a \in U$ existiert eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $a + m\mathbb{Z} \subseteq U$.

(Das bedeutet, daß jedes Element von U Glied einer arithmetischen Folge ist, die ganz in U liegt.) Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Die Familie τ ist eine Topologie auf $\mathbb{Z}$.
(b) Jede nichtleere τ-offene Menge ist unendlich.
(c) Jede arithmetische Progression $x + m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist sowohl τ-offen als auch τ-abgeschlossen.
(d) Ist P die Menge aller Primzahlen, so gilt

$$\bigcup_{p\in P} p\mathbb{Z} \;=\; \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}.$$

(e) Die Menge P ist unendlich.

Bemerkung: Dieser topologische Beweis für die Tatsache, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, entstammt der folgenden Arbeit: Hillel Furstenberg, *On the Infinitude of Primes*, American Mathematical Monthly **62** (1955), Seite 353.

Aufgabe (85.41) Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, daß eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann nirgends dicht ist, wenn $X \setminus \overline{A}$ dicht in X ist.

Aufgabe (85.42) Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, daß für eine Teilmenge $A \subseteq X$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(1) A ist nirgends dicht;
(2) jede offene Menge $U \neq \emptyset$ umfaßt eine offene Menge $V \neq \emptyset$ mit $A \cap V = \emptyset$.

Aufgabe (85.43) Zeige, daß die Vereinigung zweier nirgends dichter Mengen selbst wieder nirgends dicht ist.

Bemerkung: Hieraus folgt mit vollständiger Induktion sofort, daß die Vereinigung endlich vieler nirgends dichter Mengen selbst wieder nirgends dicht ist. Die entsprechende Aussage für abzählbare Vereinigungen ist falsch, wie man etwa sieht, wenn man eine Abzählung $r_1, r_2, r_3, \ldots$ der rationalen Zahlen betrachtet und dann die in $\mathbb{R}$ nirgends dichten Mengen $\{r_i\}$ betrachtet.

Aufgabe (85.44) Es sei $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq \pi\}$ die abgeschlossene Kugel um den Nullpunkt von $\mathbb{R}^3$ mit dem Radius π. Diese Aufgabe beschäftigt sich damit, inwiefern Drehungen durch Elemente von B dargestellt werden können, indem man für einen Vektor $x \in B$ die Richtung von x als Richtung der Drehachse und die Länge von x als Drehwinkel interpretiert.

(a) Wir wollen Randpunkte von B, die einander direkt gegenüberliegen, miteinander verifizieren, definieren also

$$y \sim x \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} y = x, & \text{falls } \|x\| = \|y\| < \pi, \\ y = \pm x, & \text{falls } \|x\| = \|y\| = \pi. \end{cases}$$

Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf B ist.

(b) Für $\varphi \in (0, \pi]$ und $n \in \mathbb{S}^2$ sei $D(n, \varphi)$ die Drehung um die Achse $\mathbb{R}n$ und um den Winkel φ (von der Spitze von n aus gegen den Uhrzeigersinn gezählt). Wir definieren $f : B \to \mathrm{SO}(3)$ durch $f(0) := \mathbf{1}$ und $f(x) := D(x/\|x\|, \|x\|)$ für $x \neq 0$. Zeige, daß f surjektiv ist und daß genau dann $f(x) = f(y)$ gilt, wenn $y \sim x$ gilt.

(c) Insbesondere induziert f also eine Bijektion $F : (B/\sim) \to \mathrm{SO}(3)$, wenn $B/\sim$ den Raum aller Äquivalenzklassen modulo $\sim$ bezeichnet. Wie lautet die Umkehrabbildung von F?

(d) Wir versehen $B/\sim$ mit der von B geerbten Quotiententopologie. Zeige, daß dann F nicht nur eine Bijektion, sondern sogar ein Homöomorphismus ist.

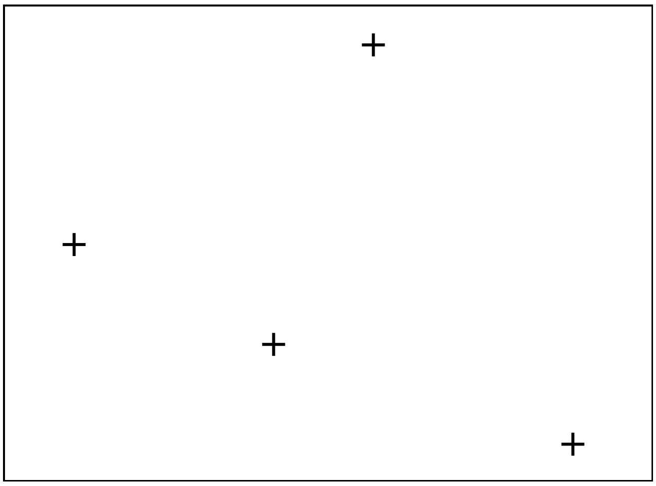
Lösungen zu »Topologische Räume« siehe Seite 431

Aufgabe (88.13) Zeige, daß ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum auch wegzusammenhängend ist.

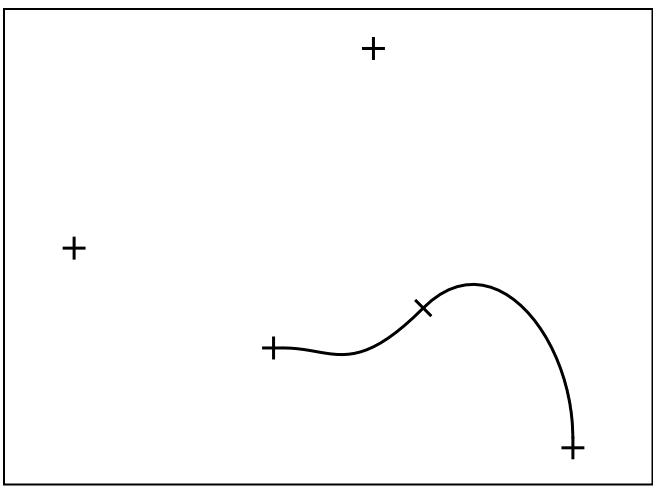
Aufgabe (88.14) Zeige, daß in einem lokal zusammenhängenden Raum alle Zusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Aufgabe (88.15) Zeige, daß ein Produktraum $X = \prod_{i\in I} X_i$ genau dann lokal zusammenhängend ist, wenn alle Faktoren X_i lokal zusammenhängend und mit höchstens endlich vielen Ausnahmen auch zusammenhängend sind.

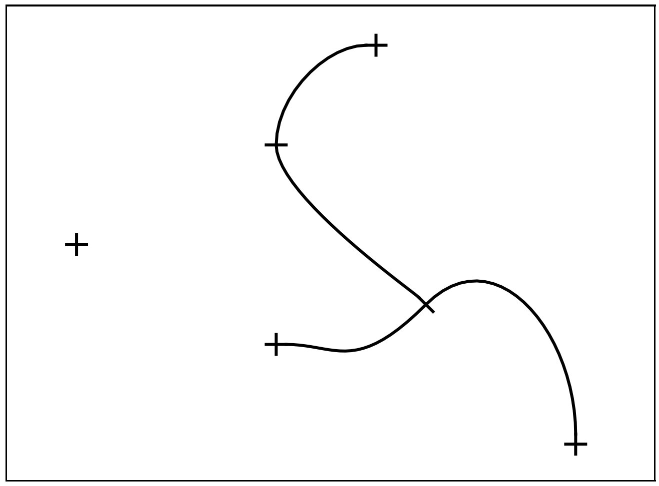
Aufgabe (88.16) Das 1967 von den englischen Mathematikern John Horton Conway und Michael S. Paterson vorgestellte Spiel “Brussels Sprouts” (deutsch “Rosenkohl”) ist ein Zeichenspiel für Personen A und B, das nach den folgenden Regeln gespielt wird. Zunächst wird eine beliebige Anzahl von Kreuzen auf einem Blatt Papier eingetragen.



Nun verbindet A zwei beliebige freie Arme (egal, ob zwei Arme des gleichen Kreuzes oder zwei Arme an verschiedenen Kreuzen) mit einer durchgezogenen Linie und zeichnet irgendwo auf dieser Verbindungslinie einen Querstrich ein. Durch diesen Querstrich entstehen zwei neue freie Arme.



Anschließend ist B an der Reihe, wieder zwei beliebige freie Arme zu verbinden und auf der Verbindungslinie einen Querstrich einzuzeichnen. Einzige Bedingung: eine neu eingezeichnete Verbindungslinie darf weder sich selbst noch bereits bestehende andere Verbindungslinien kreuzen.



Das Spiel geht nun immer so weiter. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Zug mehr machen kann, hat verloren. Welche Strategie sollte man verfolgen, um das Spiel zu gewinnen?

Hinweis: Zu jedem Zeitpunkt besteht die gezeichnete Figur aus einer Anzahl von Zusammenhangskomponenten, wobei am Anfang jede Komponente genau aus einem der Kreuze der Anfangskonfiguration besteht. Es gibt dann jeweils genau zwei Arten von Zügen:

(1) Züge, die zwei verschiedene Komponenten miteinander verbinden;
(2) Züge, die zwei freie Arme der gleichen Komponente miteinander verbinden.

Überlege, wie sich bei jedem Zug die Anzahl der freien Arme, die Gesamtzahl der Komponenten, die Anzahl der Gebiete, in die die Ebene zerlegt wird, sowie die Anzahl der Zugmöglichkeiten ändert.

Aufgabe (88.17) Es seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $\Gamma_f := \{(x,f(x)) \mid x\in\mathbb{R}\}$ der Graph von f. Zeige, daß die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) f ist stetig;
(2) Γ_f ist zusammenhängend und abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$.

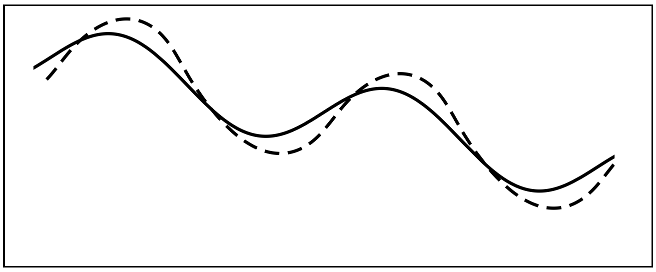
Bemerkung: Diese Aufgabe präzisiert die intuitive Vorstellung, daß die Stetigkeit einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gerade bedeutet, daß sich der Graph von f in einem Stück zeichnen läßt, ohne den Stift absetzen zu müssen.

Aufgabe (88.18) Es seien X ein topologischer Raum, Y ein kompakter Hausdorffraum und $f:X\to Y$ eine Abbildung. Zeige, daß f genau dann stetig ist, wenn der Graph $\Gamma := \{(x,f(x)) \mid x\in X\}$ abgeschlossen in $X\times Y$ ist.

Lösungen zu »Zusammenhangseigenschaften« siehe Seite 453

A90: Differentiation vektorwertiger Funktionen

Aufgabe (90.1) Die folgende Abbildung zeigt die Spuren eines Fahrrades. Welche der beiden Spuren stammt vom Vorderrad, welche vom Hinterrad? In welche Richtung bewegte sich das Fahrrad, das die Spur hinterließ?



Hinweis: Zu jedem Zeitpunkt t sei $u(t) \in \mathbb{R}^2$ der Punkt, in dem das Hinterrad den Boden berührt, während $v(t) \in \mathbb{R}^2$ der Punkt sei, in dem das Vorderrad den Boden berührt; ferner sei ℓ die Länge des Fahrradrahmens. Wir machen die (vereinfachende, aber näherungsweise erfüllte) Annahme, die Lenkergabel befinde sich immer senkrecht oberhalb des Berührpunktes von Vorderrad und Boden. Zeige, daß unter dieser Annahme die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$v(t) \;=\; u(t) + \ell \cdot \frac{\dot u(t)}{\|\dot u(t)\|}\,.$$

Aufgabe (90.2) Überprüfe die Gültigkeit der Ableitungsregeln $\langle u,v\rangle^{\cdot} = \langle \dot u, v\rangle + \langle u, \dot v\rangle$ und $(u \times v)^{\cdot} = \dot u \times v + u \times \dot v$ für die Vektorfunktionen

$$u(t) \;=\; \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v(t) \;=\; \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Aufgabe (90.3) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $W = \mathrm{End}(V)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $A : V \to V$. (Nach Wahl einer Basis können wir V mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ aller Spaltenvektoren der Länge n und W mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ aller $(n \times n)$-Matrizen identifizieren.) Die Abbildungen $A, B : I \to W$ seien differentiierbar an der Stelle $t_0 \in I$. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\lambda A + \mu B$ an der Stelle x_0 differentiierbar, und es gilt

$$(\lambda A + \mu B)'(x_0) \;=\; \lambda\, A'(x_0) + \mu\, B'(x_0)\,,$$

(b) Die Abbildung $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ ist an der Stelle t_0 differentiierbar, und es gilt

$$(AB)'(t_0) \;=\; A'(t_0)B(t_0) + A(t_0)B'(t_0).$$

(c) Ist $A(t_0)$ invertierbar, so ist auf einer Umgebung von t_0 die Abbildung $A^{-1} : t \mapsto A(t)^{-1}$ wohldefiniert und an der Stelle t_0 differentiierbar mit

$$(A^{-1})'(t_0) \;=\; -A(t_0)^{-1}A'(t_0)A(t_0)^{-1}\,.$$

Aufgabe (90.4) Überprüfe die Gültigkeit der Ableitungsregel

$$(A^{-1})^{\cdot} \;=\; -A^{-1}\dot A A^{-1}$$

für die matrixwertigen Funktionen

$$A(t) \;=\; \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A(t) \;=\; \begin{bmatrix} e^t & t^2 e^t \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

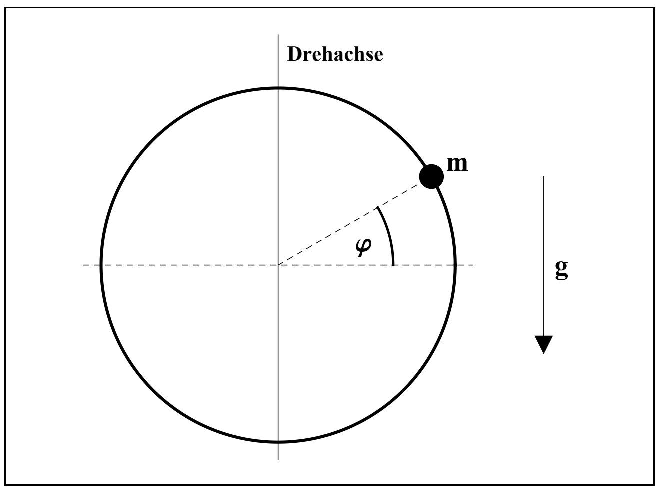
Aufgabe (90.5) Es seien $t \mapsto a_i(t) \in \mathbb{R}^n$ die Spalten der matrixwertigen Funktion $t \mapsto A(t) = \big(a_1(t) \mid \cdots \mid a_n(t)\big) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Überprüfe die Ableitungsregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\det A(t)] \;=\; \sum_{i=1}^{n} \det\big(a_1(t), \ldots, \dot a_i(t), \ldots, a_n(t)\big)$$

für die Funktionen $A(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{bmatrix}$ und $A(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^4 & t^7 \end{bmatrix}$.

Aufgabe (90.6) Die Reihe $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ sei konvergent für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| < \rho$. Für eine feste Matrix A mit $\|A\| < \rho$ definieren wir $\varphi(t) := f(tA)$ (für $|t| < \rho/\|A\|$). Zeige, daß φ differentiierbar ist mit $\varphi'(t) = f'(tA) \cdot A$.

Aufgabe (90.7) Eine Perle gleite reibungsfrei auf einem senkrecht aufgehängten Drahtring. Dieser Drahtring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die in der folgenden Seitenansicht eingezeichnete Achse.



(a) Drücke die Absolutgeschwindigkeit und die Absolutbeschleunigung der Perle im rotierenden System durch die Funktion $t \mapsto \varphi(t)$ aus!

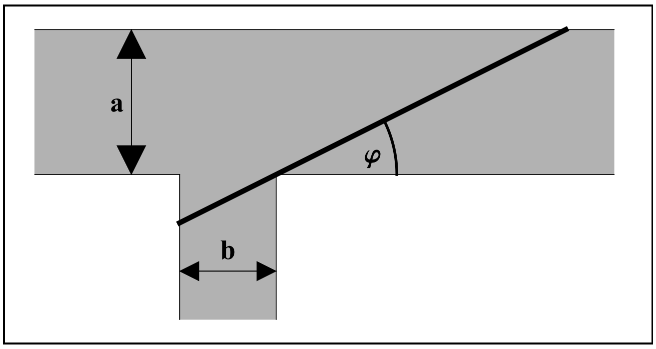
(b) Stelle die Bewegungsgleichung für die Funktion $t \mapsto \varphi(t)$ auf!

(c) Welche Gleichgewichtslagen hat das System?

Lösungen zu »Differentiation vektorwertiger Funktionen« siehe Seite 470

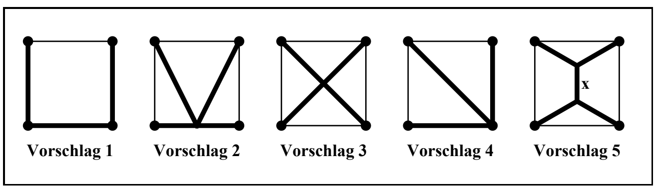
Aufgabe (91.66) Die Abbildung zeigt einen Seitenkanal der Breite b, der rechtwinklig in einen Hauptkanal der Breite a mündet. Das Verhältnis der Breiten sei dabei $a : b = 3\sqrt{3}$.

(a) Gib die Länge ℓ der eingezeichneten Verbindungslinie zwischen den Kanalufern als Funktion des Winkels φ an. Für welchen Wert von φ wird ℓ minimal?



(b) Ein im Wasser schwimmender Baumstamm von vernachlässigbarer Dicke soll vom Seitenkanal in den Hauptkanal manövriert werden. Wie lang darf der Baumstamm höchstens sein, damit dies möglich ist?

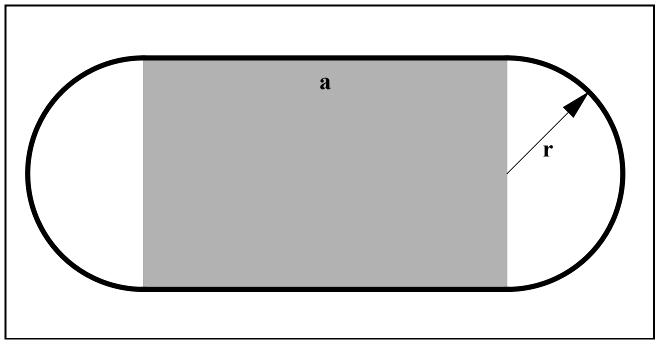
Aufgabe (91.67) Vier Orte bilden die Ecken eines Quadrates mit einer Kantenlänge von einem Kilometer. Diese Orte sollen so durch Straßen miteinander verbunden werden, daß jeder Ort von jedem anderen aus erreicht werden kann. Von 5 verschiedenen Bauingenieurbüros liegen die folgenden Vorschläge für die Anlage der Straßen vor.



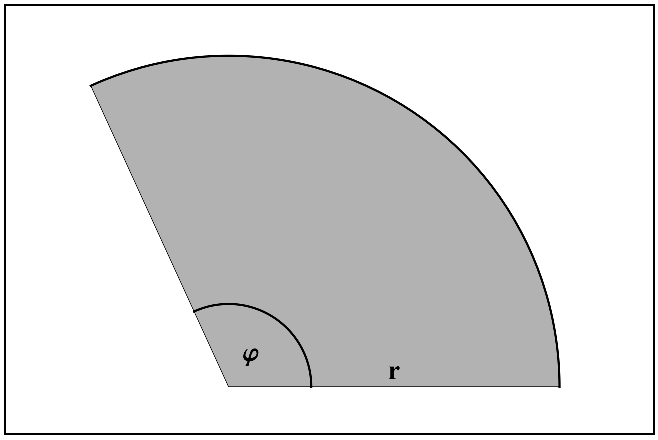
(a) Gib für jeden der fünf Vorschläge die entstehende Gesamtstraßenlänge an!

(b) Wie muß in Vorschlag 5 die Strecke x gewählt werden, damit die Gesamtstraßenlänge minimal wird? Ist für diese optimale Wahl von x der fünfte Vorschlag besser als die ersten vier Vorschläge?

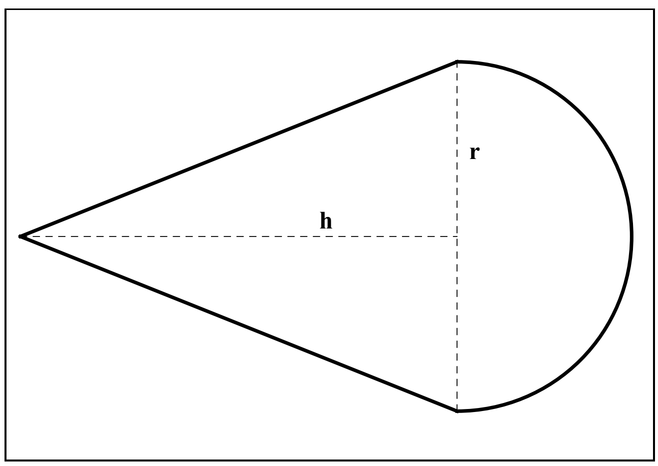
Aufgabe (91.68) Eine Laufbahn der vorgegebenen Länge $\ell = 400$ m soll aus zwei geraden Strecken und zwei Halbkreisbögen gebildet werden, und zwar so, daß das eingeschlossene rechteckige Sportfeld (in der Skizze grau markiert) eine möglichst große Fläche bekommt. Wie sind die Abmessungen der Laufbahn zu wählen?



Aufgabe (91.69) Mit einem Zaun der vorgegebenen Länge ℓ soll ein Kreissektor eingezäunt werden. Wie müssen dessen Radius r und Zentriwinkel φ gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Kreissektors maximal wird?



Aufgabe (91.70) Auf einem Sportgelände soll ein Hammerwurfbereich eingezäunt werden, und zwar mit einem Zaun der vorgegebenen Länge ℓ. Der Bereich soll die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem aufgesetzten Halbkreis haben. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit der eingezäunte Bereich einen möglichst großen Flächeninhalt hat?



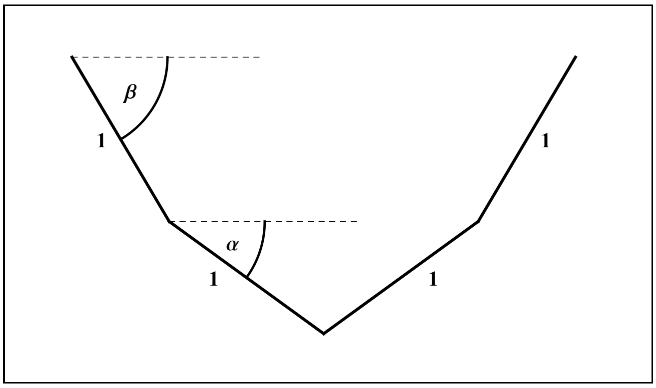
Lösungen zu »Ableitungswerte und lokales Verhalten« siehe Seite 478

Aufgabe (95.8) (a) Es soll eine nach oben geöffnete Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt so gebaut werden, daß bei gegebener Gesamtfläche des Bodens und der Seitenwände die Querschnittsfläche möglichst groß wird. Wie sind die Abmessungen zu wählen?

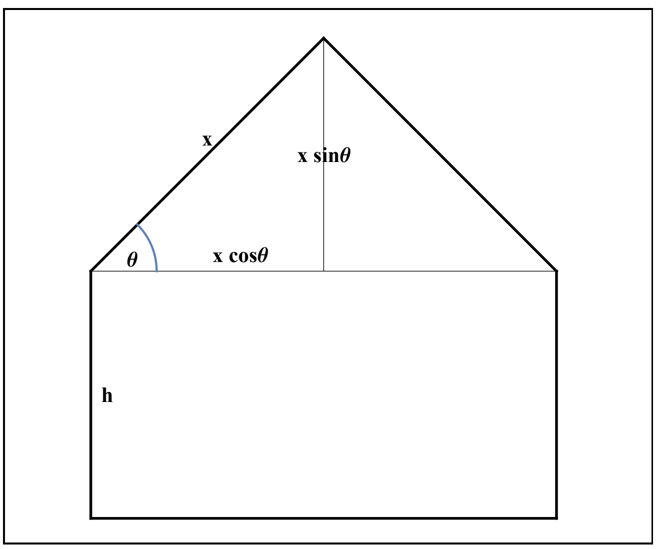
(b) Wie ändert sich die Lösung, wenn es sich statt einer offenen Wasserrinne um einen unterirdischen Kanal handelt, wenn also auch eine Deckenfläche benötigt wird?

Bemerkung: In der vorigen Aufgabe war bei gegebenem Querschnitt der benetzbare Umfang zu minimieren; in dieser Aufgabe ist bei gegebenem benetzbarem Umfang die Querschnittsfläche zu maximieren.

Aufgabe (95.9) Aus vier Brettern der Breite 1 soll eine Rinne gebildet werden, deren Querschnittsfläche möglichst groß ist. Wie sind dazu die Winkel α und β zu wählen?



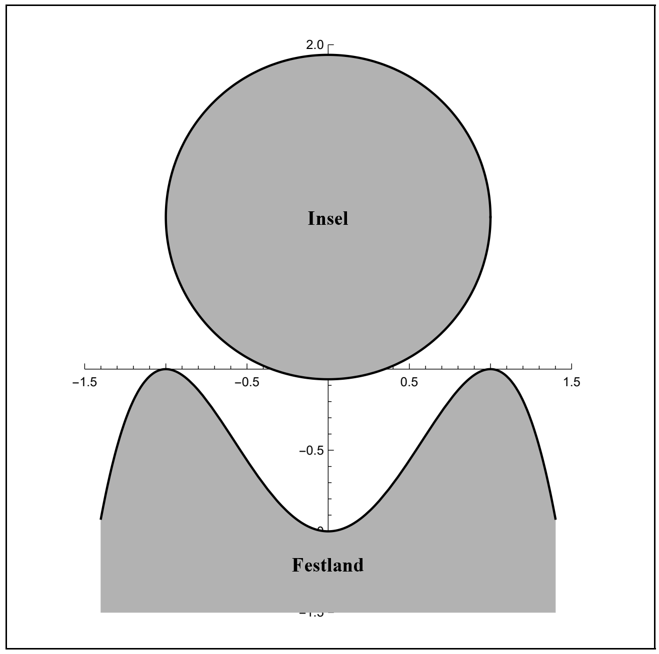
Aufgabe (95.10) Eine Fassade habe die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten gleichschenkligen Dreieck. Wie sind die Abmessungen x, θ und h zu wählen, damit die Fassade einerseits einen vorgegebenen Umfang U hat, andererseits eine möglichst große Fläche besitzt?



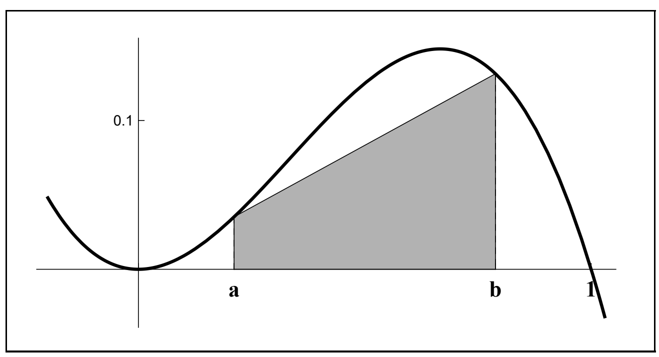
Aufgabe (95.11) Entlang einer geradlinigen Straße der Länge ℓ soll eine gegebene Zahl n von Notrufsäulen derart angebracht werden, daß der durchschnittliche Weg von irgendeinem Punkt der Straße aus zur jeweils nächsten Notrufsäule möglichst kurz wird. Wo sind die Notrufsäulen zu postieren?

Aufgabe (95.12) Wir betrachten die Parabel P mit der Gleichung $y = x^2 + 1$ und die Gerade G mit der Gleichung $y = x/2$. Welche Punkte auf P und auf G liegen am dichtesten beisammen?

Aufgabe (95.13) Es sei $\eta = 15/16$. Zwischen dem Festland $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le -(x^2 - 1)^2\}$ und der Insel $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - \eta)^2 \le 1\}$ soll eine geradlinig verlaufende Brücke minimaler Länge gelegt werden. Zwischen welchen Punkten muß eine solche Brücke verlaufen?



Aufgabe (95.14) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - x^3$ für $0 \le x \le 1$. Wie müssen zwei Zahlen $a, b \in [0, 1]$ gewählt werden, damit das Trapez mit den Ecken $(a, 0)$, $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ und $(b, 0)$ maximale Fläche hat?



Lösungen zu »Optimierungsaufgaben« siehe Seite 541

Index

Im Index sind die Einträge zu allen drei Aufgabenbänden enthalten. Hervorgehoben sind diejenigen Begriffe, zu denen es Aufgaben im vorliegendem Band gibt.

G

H

I

J

K

L

M

Karlheinz Spindler

Höhere Mathematik – Ein Begleiter durch das Studium

1. Aufl. 2010, 893 Seiten, 22 cm × 28,5 cm, gebunden,
über 600 Abbildungen, wo sinnvoll vierfarbig,
ISBN 978-3-8085-5550-7
Bestell-Nr. 55507

Dieses einzigartige Buch, das mit der Einführung des Mengenbegriffs beginnt und mit dem Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes endet, spannt einen riesigen Bogen über verschiedene grundlegende mathematische Disziplinen: Lineare und multilineare Algebra, Topologie, Analysis, Differentialgleichungen, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Funktionentheorie und vieles mehr.

Dabei ist das Ziel nicht, eine möglichst große Stoffmenge enzyklopädisch abzuhandeln, sondern ein solides und tragfähiges Grundlagenwissen in mathematischen Schlüsseldisziplinen zu vermitteln, auf dem eine spätere Einarbeitung in mathematische Spezialfächer und Anwendungsgebiete problemlos aufbauen kann. Es wird gleichermaßen Wert auf die Förderung begrifflichen Verständnisses und auf die Vermittlung von Rechentechniken gelegt. Allgegenwärtige algebraische, ordnungstheoretische und topologische Strukturen werden systematisch herausgearbeitet, und numerische Aspekte sind durchgängig in die Darstellung integriert. Auch der physikalische Gehalt mathematischer Begriffsbildungen und Sätze wird erläutert.

Propädeutisches Material (mengentheoretische und aussagenlogische Grundlagen, Zahlbereiche, elementare Kombinatorik, Elementargeometrie) ist in separate Kapitel ausgegliedert. Der Schulstoff wird behutsam, aber von einer höheren Warte aus rekapituliert, was den Übergang von der Schule zur Hochschule erleichtert und anhand bekannten Materials an die Strenge mathematischer Begriffsbildungen gewöhnt. Auf dieser Grundlage werden dann die Lineare Algebra und die Analysis unter Berücksichtigung sowohl arithmetischer als auch geometrischer Aspekte entwickelt. Die Kraft dieser Theorien wird anschließend in diversen Kapiteln über speziellere mathematische Disziplinen entfaltet. Das Buch führt frühzeitig an abstrakte Sichtweisen und weitgehende Verallgemeinerungen heran, wenn dadurch das begriffliche Verständnis erleichtert wird (frühe Einführung topologischer Grundbegriffe, weitgehend koordinatenfreie Behandlung von Funktionen in mehreren Variablen, Bereitstellung differentialgeometrischer und maßtheoretischer Grundlagen).

Das Buch macht keinerlei Kompromisse hinsichtlich mathematischer Strenge; sämtliche Aussagen werden bewiesen, und der Verfasser scheut sich auch nicht, „unbequeme“ Begriffe einzuführen und „schwierige“ Sätze zu behandeln. Durch seinen didaktisch geschickten Aufbau ist das Buch dennoch gut lesbar. Viele motivierende Erläuterungen, durchgerechnete Beispiele sowie aussagekräftige Abbildungen, Diagramme, Tabellen und eingerahmte Formeln erleichtern das Verständnis. Das Buch eignet sich daher auch gut zum Selbststudium und als weiterführende Lektüre, die über die Grundvorlesungen weit hinausgeht und daher nicht nach einem oder zwei Semestern ausgedient hat, sondern als Begleiter durch das gesamte Studium dienen kann. Dem trägt die Ausstattung des Buches mit festem Einband und stabiler Bindung Rechnung.

Karlheinz Spindler

Höhere Mathematik – Aufgaben und Lösungen

Die Aufgabensammlung enthält insgesamt über 3000 Aufgaben und ist bis auf wenige Verweise unabhängig vom zugehörigen Lehrbuch nutzbar.

Die Aufgabenstellungen reichen von einfachen Fragen zur Gewöhnung an neue Begriffe und Routineaufgaben zum Einüben und Einschleifen von Rechentechniken über anspruchsvollere Aufgaben, in denen Beispiele und Gegenbeispiele gesucht, Feinheiten von Begriffsbildungen und Aussagen ausgelotet und weiterführende Aspekte erkundet werden, bis hin zu wirklichen Herausforderungen, denen sich zu stellen einige Ausdauer erfordert.

Durch die ausführlichen Lösungen sind die Bände auch zum Selbststudium geeignet.

Band 1

1. Aufl. 2021, 574 Seiten, 21 cm × 28,5 cm, gebunden
ISBN 978-3 8085-5952-9
Bestell-Nr. 59529

1149 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zu den Themen:

- Mengentheoretische Grundlagen
- Grundlegende Strukturen
- Kardinalzahlen
- Ordinalzahlen
- Zahlentheoretische Grundlagen
- Arithmetische Grundlagen
- Algebraische Grundlagen
- Kombinatorische Grundlagen
- Lineare Gleichungssysteme
- Geometrische Grundlagen
- Reelle und komplexe Zahlen
- Geometrie und Vektorrechnung
- Lineare Algebra
- Lineare Abbildungen und Matrizen
- Multilineare Abbildungen.

Band 2

1. Aufl. 2021, 582 Seiten, 21 cm × 28,5 cm, gebunden
ISBN 978-3 8085-5954-3
Bestell-Nr. 59543

1029 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zu den Themen:

- Multilineare Algebra
- Metrische Vektorräume
- Geometrie in Vektorräumen
- Rechnen mit Grenzwerten
- Elementare Funktionen
- Metrische Strukturen
- Topologische Strukturen
- Differentialrechnung in einer Variablen
- Differentialrechnung in Banachräumen.

Band 3

1. Aufl. 2021, 646 Seiten, 21 cm × 28,5 cm, gebunden
ISBN 978-3 8085-5956-7
Bestell-Nr. 59567

1017 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zu den Themen:

- Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten
- Inhaltsbestimmung von Mengen
- Begriff des Integrals
- Berechnung von Integralen
- Integration auf Mannigfaltigkeiten
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Dynamische Systeme
- Integraltransformationen
- Grundlagen der Stochastik
- Anwendung stochastischer Methoden
- Funktionentheorie.

Karlheinz Spindler: Höhere Mathematik