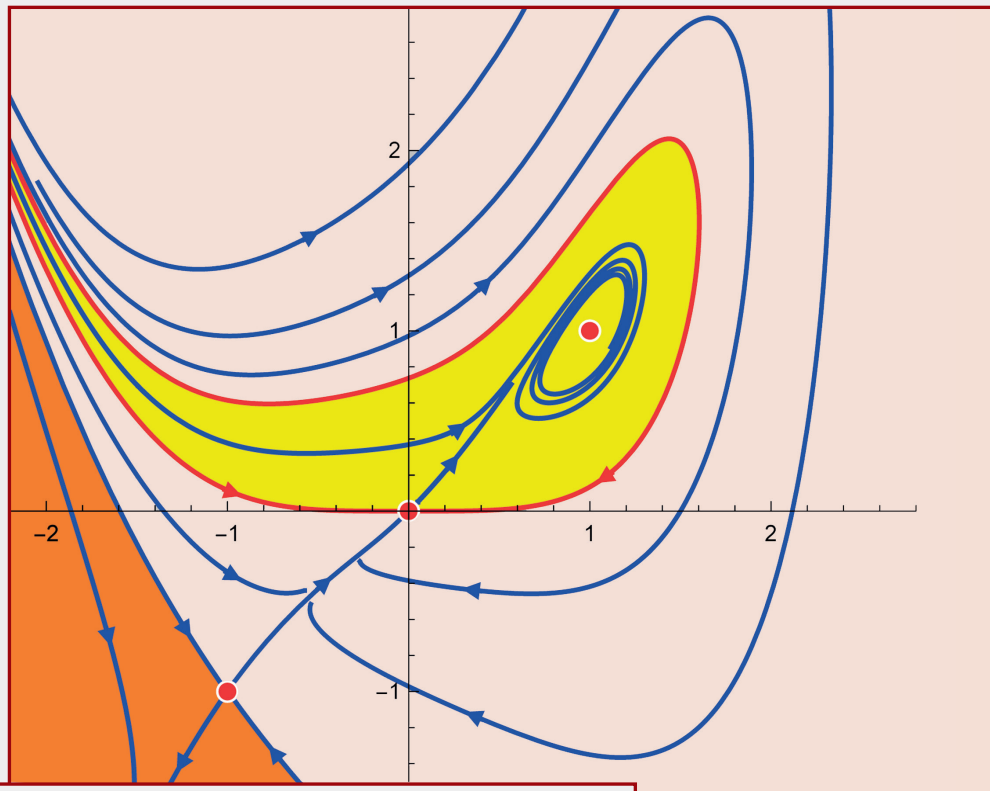
Karlheinz Spindler



HÖHERE MATHEMATIK

Band 3

AUFGABEN UND LÖSUNGEN

Edition Harri Deutsch

EUROPA LEHRMITTEL

Preisgekrönt

Prof. Spindler erhielt für sein Projekt *Holistische Lehre und forschendes Lernen in der Mathematik*, aus dem sein Lehrbuch und die Aufgabenbände hervorgegangen sind, den hochdotierten **Hessischen Hochschulpreis für Exzellenz in der Lehre 2022**.

Pressemitteilung: Hochschulpreis für Exzellenz in der Lehre 2022

Video: Holistische Lehre und forschendes Lernen in der Mathematik

Edition Harri Deutsch

Höhere Mathematik

Aufgaben und Lösungen

Band 3

von

Karlheinz Spindler

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 59567

Autor:

Prof. Dr. Karlheinz Spindler studierte Mathematik, Mechanik und Geschichte an der Technischen Hochschule Darmstadt. Nach Ablegung seines Diploms und des Staatsexamens für das Lehramt an Gymnasien war er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TH Darmstadt tätig und wurde dort über ein Thema aus der Strukturtheorie Liescher Algebren promoviert. Anschließend arbeitete er zunächst zwei Jahre lang als Visiting Assistant Professor an der Louisiana State University in Baton Rouge (USA) und dann fünf Jahre lang bei einem Unternehmen der Raumfahrtindustrie am European Space Operations Centre (ESOC) in Darmstadt. Im Jahr 1997 wurde er zum Professor für Mathematik und Datenverarbeitung an die Fachhochschule Wiesbaden (seit dem 1. September 2009 Hochschule RheinMain) berufen, wo er im Studiengang „Angewandte Mathematik“ tätig ist. Er ist Begründer und Mitorganisator eines seit 2006 jährlich stattfindenden mathematischen Weiterbildungsseminars für Angehörige der hessischen Hochschulen für angewandte Wissenschaften.

1. Auflage 2021

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5956-7

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle erfordert eine schriftliche Genehmigung des Verlags.

© 2021 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagmotiv: Vom Autor erstellte Illustration und bearbeitetes Foto
Druck: CPI books GmbH, 25917 Leck

Vorwort

Das vorliegende Aufgaben- und Lösungsbuch will einen Beitrag zur Förderung der Mathematikausbildung leisten, indem es zur Beschäftigung mit mathematischen Aufgabenstellungen und zur Einübung von Problemlösungsfertigkeiten einlädt. Es ist entstanden aus Aufgabenblättern und Übungsmaterialien, die ich über viele Jahre hinweg in einer ganzen Reihe verschiedenster mathematischer Lehrveranstaltungen an der Hochschule RheinMain verwendet habe.

Wichtig war mir – sowohl beim Stellen der Aufgaben als auch beim Schreiben des Buches – eine große Bandbreite der Aufgabenstellungen. Diese reichen von einfachen Fragen zur Gewöhnung an neue Begriffe und Routineaufgaben zum Einüben und Einschleifen von Rechentechniken über anspruchsvollere Aufgaben, in denen Beispiele und Gegenbeispiele gesucht, Feinheiten von Begriffsbildungen und Aussagen ausgelotet und weiterführende Aspekte erkundet werden, bis hin zu wirklichen Herausforderungen, denen sich zu stellen einige Ausdauer erfordert. Dabei habe ich bewußt hohe Ansprüche nicht vermieden, denn (wie schon der Prediger Salomo wußte) "wo viel Weisheit ist, da ist viel Grämen, und wer viel lernt, der muß viel leiden". Ich bin aber zuversichtlich, daß durch die Aufteilung komplexer Aufgabenstellungen auf mehrere Teilaufgaben und durch die gegebenen Hinweise allzu großen Frustrationen vorgebeugt wird.

Damit das Buch auch zum Selbststudium geeignet ist, habe ich zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen erstellt, deren Formulierung vielleicht auch ein Gefühl dafür vermittelt, wie man mathematische Sachverhalte ausdrückt und zu Papier bringt. Natürlich sollte man aber vor dem Blick in die Lösung immer versuchen, die jeweilige Aufgabe selbst zu bearbeiten: Mathematik ist kein Zuschauersport, sondern eher wie Klavierspielen; man erlernt sie nur durch eigene aktive Beschäftigung. Ich hoffe, daß bei aller Konzentration auf das Lösen von Aufgaben auch etwas von der Schönheit, Klarheit und Eleganz der Mathematik deutlich wird. Von den Inhalten und vom Kapitelaufbau her richtet sich das vorliegende Buch nach dem Lehrbuch

> Karlheinz Spindler: *Höhere Mathematik – Ein Begleiter durch das Studium*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main* 2010.

Immer, wenn in den Lösungen auf "das Buch" verwiesen wird, ist dieses Lehrbuch gemeint. Die Verweise dienen in erster Linie der bequemen Referenzierung; die allermeisten Aufgaben können vollkommen unabhängig von der Verwendung eines bestimmten Lehrbuches oder Manuskriptes bearbeitet werden, und ich hoffe, daß sich geeignete Aufgaben für eine Vielzahl verschiedener Lehrveranstaltungen auswählen lassen. Da das Material des Buches in unterschiedlicher Intensität für unterschiedliche Lehrveranstaltungen entstand, war eine gewisse Unausgewogenheit zwischen den verschiedenen thematischen Bereichen (oder, positiver ausgedrückt, eine gewisse Schwerpunktsetzung) unausweichlich. Der zu erwartende eher geringe Zusatznutzen erschien es mir nicht wert, hier mit entsprechendem Zeitaufwand (und resultierenden Verzögerungen) die Unterschiede nachträglich noch auszugleichen. Um noch einmal den Prediger Salomo zu Wort kommen zu lassen: "Des vielen Büchermachens ist kein Ende, und viel Studieren macht den Leib müde".

Wie schon bei dem genannten Lehrbuch bin ich auch beim Schreiben dieses Aufgaben- und Lösungsbuchs Frau Dr. Renate Schappel zu kaum ermeßlichem Dank verpflichtet. Sie hat sich mit bewundernswerter Energie und Begeisterung, mit großer Akribie und Sorgfalt der Herkulesaufgabe angenommen, das vollständige Manuskript (teilweise in verschiedenen Versionen) kritisch zu lesen und zu kommentieren. Sie deckte eine Unzahl von Fehlern auf, und nichts war vor ihrem kritischen Blick sicher: einfache Tippfehler, Rechenfehler, falsche oder unvollständige Schlüsse, stilistisch verunglückte Formulierungen, falsche Verweise, unschöne Zeilen- oder Seitenumbrüche und vieles mehr. Ohne ihre Hilfe wäre das Erscheinen dieses Buches schlechterdings nicht denkbar. Mein Dank gilt ferner Herrn Klaus Horn vom Verlag Europa-Lehrmittel für die kompetente verlagsseitige Umsetzung des Werkes und die jederzeit angenehme Zusammenarbeit. Ihm danke ich nicht nur für die engagierte und sachkundige Unterstützung des Buchprojekts, sondern auch für den gutmütigen Humor, mit dem er meinen Sonderwünschen begegnete. Schließlich bin ich mehreren Generationen von Studenten zu Dank verpflichtet, mit denen ich über die Jahre hinweg zusammenarbeiten durfte und deren Fragen, Kommentare und Anregungen zu Verbesserungen bei zahlreichen Aufgaben und Lösungen führten.

Alle noch verbliebenen Fehler und Unstimmigkeiten gehen natürlich einzig und allein zu meinen Lasten als Autor. Autor und Verlag sind für Hinweise auf Fehler und Ungenauigkeiten sowie für konstruktive Kritik jederzeit dankbar.

A. D. 2021 Karlheinz Spindler

* Inzwischen Edition Harri Deutsch, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Inhaltsverzeichnis

Aufgaben 7

Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten . 9
97. Mannigfaltigkeiten 9
98. Optimierung auf Mannigfaltigkeiten 15
99. Kurven 19
100. Hyperflächen 22

Inhaltsbestimmung von Mengen 29
101. Die Jordan-Peanosche Inhaltstheorie 29
102. Inhalte elementargeometrischer Figuren 31
103. Die Borel-Lebesguesche Maßtheorie 35
104. Abstrakte Maßtheorie 37

Der Begriff des Integrals 39
105. Der Riemannsche Integralbegriff 39
106. Strukturelle Eigenschaften des Integrals 41
107. Der Lebesguesche Integralbegriff 42
108. Abstrakte Integration 43

Berechnung von Integralen 45
109. Berechnung von Einfachintegralen 45
110. Numerische Integration 50
111. Berechnung von Mehrfachintegralen 52
112. Anwendungen der Integralrechnung 56

Integration auf Mannigfaltigkeiten 59
113. Integration skalarer Funktionen 59
114. Integration von Differentialformen 60
115. Äußere Ableitung einer Differentialform 61
116. Der Stokessche Integralsatz 63

Gewöhnliche Differentialgleichungen 67
117. Grundlegende Begriffe und elementare Lösungsmethoden 67
118. Existenz- und Eindeutigkeitssätze 72
119. Lineare Differentialgleichungssysteme 78
120. Beispiele aus der Mechanik 88

Dynamische Systeme 103
121. Qualitative Untersuchung von Differentialgleichungen 103
122. Lineare und linearisierte Systeme 105
123. Stabilität von Gleichgewichtslagen 106
124. Populationsmodelle 112

Integraltransformationen 115
125. Faltungen 115
126. Fourierreihen 117
127. Fourier-Integrale 119
128. Laplace-Transformation 122

Grundlagen der Stochastik 125
129. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung 125
130. Zufallsvariablen 129
131. Neue Zufallsvariablen aus alten 131
132. Kenngrößen für Zufallsvariablen 132

Anwendung stochastischer Methoden 135
133. Statistische Schätztheorie 135
134. Schätzung von System- und Meßparametern . 137
135. Hypothesentests 141
136. Markovsche Ketten 144

Funktionentheorie 147
137. Beispiele komplexer Funktionen 147
138. Komplexe Differentiierbarkeit 149
139. Der Residuenkalkül 153
140. Einfach zusammenhängende Gebiete 157

Lösungen 159

Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten . 161
97. Mannigfaltigkeiten 161
98. Optimierung auf Mannigfaltigkeiten 188
99. Kurven 208
100. Hyperflächen 220

Inhaltsbestimmung von Mengen 243
101. Die Jordan-Peanosche Inhaltstheorie 243
102. Inhalte elementargeometrischer Figuren 247
103. Die Borel-Lebesguesche Maßtheorie 254
104. Abstrakte Maßtheorie 258

Der Begriff des Integrals 261
105. Der Riemannsche Integralbegriff 261
106. Strukturelle Eigenschaften des Integrals 266
107. Der Lebesguesche Integralbegriff 268
108. Abstrakte Integration 270
Berechnung von Integralen 275
109. Berechnung von Einfachintegralen 275
110. Numerische Integration 296
111. Berechnung von Mehrfachintegralen 306
112. Anwendungen der Integralrechnung 320
Integration auf Mannigfaltigkeiten 331
113. Integration skalarer Funktionen 331
114. Integration von Differentialformen 334
115. Äußere Ableitung einer Differentialform 337
116. Der Stokessche Integralsatz 343
Gewöhnliche Differentialgleichungen 353
117. Grundlegende Begriffe und elementare Lösungsmethoden 353
118. Existenz- und Eindeutigkeitssätze 370
119. Lineare Differentialgleichungssysteme 391
120. Beispiele aus der Mechanik 432
Dynamische Systeme 469
121. Qualitative Untersuchung von Differentialgleichungen 469
122. Lineare und linearisierte Systeme 475
123. Stabilität von Gleichgewichtslagen 481
124. Populationsmodelle 506
Integraltransformationen 513
125. Faltungen 513
126. Fourierreihen 517
127. Fourier-Integrale 522
128. Laplace-Transformation 529
Grundlagen der Stochastik 537
129. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung 537
130. Zufallsvariablen 546
131. Neue Zufallsvariablen aus alten 554
132. Kenngrößen für Zufallsvariablen 558
Anwendung stochastischer Methoden 565
133. Statistische Schätztheorie 565
134. Schätzung von System- und Meßparametern . 569
135. Hypothesentests 576
136. Markovsche Ketten 581
Funktionentheorie 587
137. Beispiele komplexer Funktionen 587
138. Komplexe Differentiierbarkeit 595
139. Der Residuenkalkül 610
140. Einfach zusammenhängende Gebiete 631
Nachwort 635
Index 637

A98: Optimierung auf Mannigfaltigkeiten

Aufgabe (98.1) Bestimme

(a) mit Hilfe der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y) des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ der Ausdruck xy minimal bzw. maximal wird.

Aufgabe (98.2) Bestimme

(a) mit Hilfe der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y) der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ der Ausdruck xy^2 minimal bzw. maximal wird.

Aufgabe (98.3) Bestimme

(a) mit der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

welcher Punkt (x, y) der Kurve $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ und welcher Punkt (ξ, η) der Kurve $\xi^2 + 4\eta^2 = 4$ am dichtesten beisammen liegen. **Hinweis** zu (b): es gilt $3x^2 + 2xy + 3y^2 = (x - y)^2 + 2(x + y)^2$.

Aufgabe (98.4) Bestimme

(a) mit der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

an welcher Stelle (x, y, ξ, η) die Funktion

$$f(x, y, \xi, \eta) \;:=\; \frac{1}{2}\big((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\big)$$

unter den Nebenbedingungen $x + y^2 = 0$ und $\xi\eta = 1$ minimal wird. (Wie kann man diese Aufgabe geometrisch deuten?)

Aufgabe (98.5) Bestimme

(a) mit der Methode von Lagrange,
(b) durch Zurückführung auf ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen,

welcher Punkt des Rotationsparaboloids $z = x^2 + y^2$ den kleinsten Abstand vom Punkt $(1, 3, 2)$ hat. (Vgl. Aufgabe (95.15).)

Aufgabe (98.6) Ermittle mit der Methode von Lagrange, welcher Punkt auf der Parabel $y = x^2 + 1$ und welcher Punkt auf der Geraden $y = x/2$ am dichtesten beisammen liegen. (Diese Aufgabe wurde in (95.12) bereits auf anderem Wege gelöst.)

Aufgabe (98.7) Finde alle Extrema der Funktion $f(x, y, z) := xyz^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Aufgabe (98.8) Bestimme das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y) := x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $x^4 + y^4 = 1$.

Aufgabe (98.9) Finde alle Minima und Maxima der Funktion $f(x, y) := x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = 1$.

Aufgabe (98.10) Welcher Punkt auf der Kurve $x^3 + y^3 = 1$ liegt am dichtesten am Nullpunkt?

Aufgabe (98.11) Die Ellipse E sei definiert als der Schnittpunkt des Ellipsoids $(x/2)^2 + (y/\sqrt{5})^2 + (z/5)^2 = 1$ mit der Ebene $z = x + y$. Bestimme die kleine und die große Halbachse von E!

Aufgabe (98.12) Finde die Minima und Maxima der Funktion $f(a, b, c, d, e) := a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$ unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c + d + e, \\ 4 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2, \\ 0 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3. \end{aligned}$$

Hinweis: Es sei $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ ein Punkt, an dem f unter den angegebenen Nebenbedingungen ein lokales Minimum oder Maximum annimmt. Benutze die Methode von Lagrange, um zu zeigen, daß die fünf Zahlen a, b, c, d, e eine gemeinsame Polynomgleichung dritten Grades erfüllen.

Aufgabe (98.13) Eine 2×2-Matrix soll so gebildet werden, daß die erste Spalte von A die Länge 1 und die zweite Spalte von A die Länge 2 hat. Welchen maximalen bzw. minimalen Wert kann die Determinante einer solchen Matrix annehmen?

Aufgabe (98.14) Es seien M und N Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. (Man denke etwa an zwei Kurven, eine Kurve und eine Fläche oder zwei Flächen im Raum.) Zeige: Wird der minimale Abstand eines Punktes $x \in M$ und eines Punktes $y \in N$ in den Punkten x_0 und y_0 angenommen, so schneidet die Verbindungsgerade $\overline{x_0 y_0}$ sowohl M als auch N unter einem rechten Winkel.

Aufgabe (98.15) Es seien $c_1, \ldots, c_n > 0$ positive Zahlen. Bestimme den maximalen Abstand, den zwei Punkte in der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid c_1x_1^4 + c_2x_2^4 + \cdots + c_nx_n^4 = 1\}$$

voneinander haben können.

Lösungen zu »Optimierung auf Mannigfaltigkeiten« siehe Seite 188

A99: Kurven

Aufgabe (99.1) (a) Ein Kreis vom Radius r rolle entlang einer Geraden g ab. Es sei P ein fest am Kreisrand markierter Punkt. Gib eine Parameterdarstellung der von P durchlaufenen Kurve an. (Eine solche Kurve heißt eine **Zykloide**.)

(b) Es sei B der Teil der Kurve zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten, an denen P die Gerade g berührt. Berechne die Länge des Bogens B und die Fläche zwischen B und g.

Aufgabe (99.2) Die **Kissoide** des Diocles (etwa 240-180 v. Chr.) ist eine Kurve, die auf folgende Art entsteht. Wir betrachten einen Kreis, einen Punkt O auf dem Kreisrand und eine Gerade g durch den Kreismittelpunkt, die parallel zu der Kreistangente durch O verläuft. Für je zwei Geraden g_1 und g_2, die in gleichem Abstand parallel zu g verlaufen und den Kreis in vier Punkten $A_1, B_1 \in g_1$ und $A_2, B_2 \in g_2$ schneiden, gehören die Schnittpunkte der Geraden $\overline{OA_2}$ und $\overline{OB_2}$ mit g_1 sowie die Schnittpunkte der Geraden $\overline{OA_1}$ und $\overline{OB_1}$ mit g_2 zur Kissoide. Führen wir diese Konstruktion für alle Geradenpaare (g_1, g_2) durch, so ergibt sich die punktweise Konstruktion der Kissoide.

Wähle ein Koordinatensystem so, daß O der Punkt $(0,0)$ und g die Gerade $x = r$ ist, wobei r den Kreisradius bezeichnet. Bestimme die Gleichung der Kissoide in diesem Koordinatensystem sowie eine Parameterdarstellung dieser Kurve!

Aufgabe (99.3) Die **Konchoide** des Nicomedes (etwa 280-210 v. Chr.) ist eine Kurve, die auf folgende Art entsteht. Wir geben uns eine Gerade g, einen Punkt $O \notin g$ sowie einen Abstand a vor. Jede Gerade durch O, die nicht parallel zu g verläuft, schneidet g in einem Punkt S, und es seien P, Q diejenigen Punkte auf der Geraden $\overline{OS}$, die von S den Abstand a haben. Die Menge aller so konstruierten Punkte P und Q ist dann die gesuchte Konchoide.

Wähle ein Koordinatensystem so, daß O der Punkt $(0,0)$ und g die Gerade $x = d$ ist, wobei d den Abstand des Punktes O von der Geraden g bezeichnet. Bestimme die Gleichung der Konchoide in diesem Koordinatensystem sowie je eine Parameterdarstellung für die beiden Zweige der Kurve! (Deren Aussehen hängt davon ab, ob $a < d$, $a = d$ oder $a > d$ gilt.)

Aufgabe (99.4) (a) Es sei $t \mapsto P(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ eine parametrisierte ebene Kurve C, deren Krümmung nirgends Null ist, und es sei $Q(t) = \big(X(t), Y(t)\big)$ der Krümmungsmittelpunkt von C bezüglich des Punktes $P(t)$. Finde eine Parameterdarstellung der Kurve $t \mapsto Q(t)$. (Man nennt diese die **Evolute** von C.)

(b) Bestimme die Evolute der Normalparabel $y = x^2$.

(c) Bestimme die Evolute einer Zykloide.

Aufgabe (99.5) Es sei E die Evolute einer ebenen Kurve C. (Es gilt also $E = \{M_p \mid p \in C\}$, wenn M_p der Krümmungsmittelpunkt von C an der Stelle p ist.)

(a) Zeige, daß für $p \in C$ die Gerade $\overline{pM_p}$ gleichzeitig die Kurve C in p senkrecht und die Kurve E in M_p tangential trifft. (Ist also $N_C(p)$ die Normale zu C an der Stelle p, so ist E gerade die Enveloppe der Geradenschar $\{N_C(p) \mid p \in C\}$.)

(b) Wir halten einen Punkt $p_0 \in C$ fest. Zeige, daß die Länge des Evolutenbogens $M_{p_0}M_p$ und der Krümmungsradius r_p die gleiche Änderungsrate bezüglich p haben.

Aufgabe (99.6) Es seien $R > r > 0$ und $u, v \neq 0$ vorgegebene Zahlen. Welche Art von Kurve ist durch die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) \;=\; \begin{bmatrix} \cos(ut)\big(R + r\cos(vt)\big) \\ \sin(ut)\big(R + r\cos(vt)\big) \\ r\sin(vt) \end{bmatrix}$$

gegeben? Unter welchen Bedingungen handelt es sich um eine geschlossene Kurve?

Aufgabe (99.7) Bestimme für die folgenden Kurven jeweils Krümmung und Torsion sowie das Serret-Frenet-Dreibein!

(a) $\alpha(t) = \big(r\cos t, r\sin t, ht/(2\pi)\big)$

(b) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

Aufgabe (99.8) Ein Intervall I, eine Funktion $\kappa : I \to (0,\infty)$ und eine Funktion $\tau : I \to \mathbb{R}$ seien vorgegeben.

(a) Zeige, daß es eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ gibt, deren Krümmung κ und deren Torsion τ ist!

(b) Zeige, daß eine andere Kurve $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ genau dann ebenfalls die Krümmung κ und die Torsion τ hat, wenn es eine feste Drehung D und einen festen Vektor v gibt mit $\beta(t) = D\alpha(t) + v$ für alle $t \in I$.

Aufgabe (99.9) Es sei $s \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, für die $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ stets linear unabhängig sind. Drücke die ersten vier Ableitungen von α in Koordinaten bezüglich des Serret-Frenet-Dreibeins (T, N, B) aus!

Aufgabe (99.10) Es sei $s \mapsto \alpha(s)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve derart, daß $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ für jeden Wert s linear unabhängig sind. Zeige, daß es zu jedem Wert s_0 eine eindeutig bestimmte Kugel $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - m\| \leq R\}$ derart gibt, daß für die Funktion

$$a(s) \;:=\; \|\alpha(s) - m\|^2 - R^2$$

(die beschreibt, wie sich die Kurve von der Kugeloberfläche entfernt) die Gleichungen $\alpha^{(k)}(s_0) = 0$ für $0 \leq k \leq 3$ gelten. (Man nennt diese Kugel die **Schmiegkugel** an die Kurve α im Punkt $\alpha(s_0)$.)

Lösungen zu »Kurven« siehe Seite 208

Hinweis: Mache den Ansatz $\alpha(s_0) - m = v_1 T(s_0) + v_2 N(s_0) + v_3 B(s_0)$, wenn (T, N, B) das Serret-Frenet-Dreibein der Kurve bezeichnet.

Aufgabe (99.11) Es sei $s \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve, für die $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ stets linear unabhängig sind. Welche Bedingung müssen die Krümmung κ und die Torsion τ der Kurve erfüllen, damit α eine sphärische Kurve ist, also ganz innerhalb einer Kugeloberfläche verläuft?

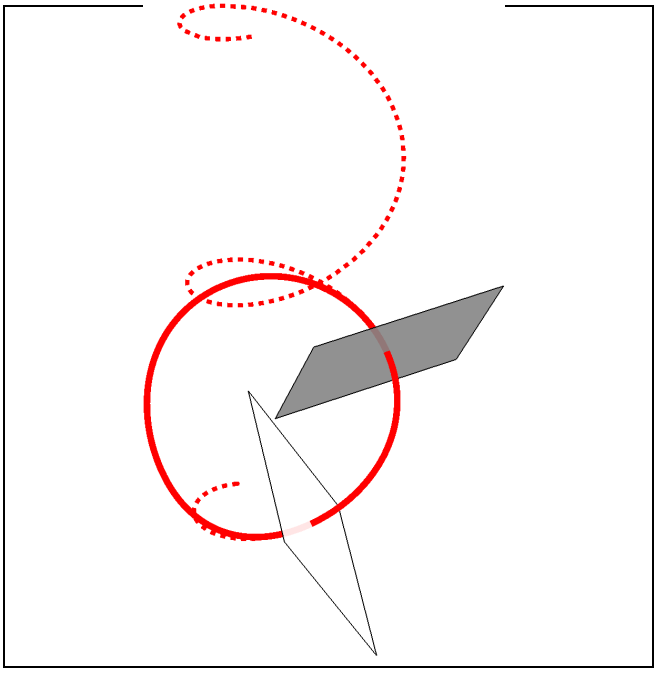
Aufgabe (99.12) Gegeben seien eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine reguläre C^2-Kurve, die auf einer Seite von E verläuft und die Ebene E senkrecht trifft. Zeige: Setzt man α durch Spiegelung an der Ebene E fort, so ist die fortgesetzte Kurve immer noch eine reguläre C^2-Kurve.

Aufgabe (99.13) Für gegebene Zahlen $0 < d < r$ betrachten wir die Schraubenlinie

$$\alpha(t) \;:=\; \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ d\cdot t \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, daß es $t_1 < t_2$ derart gibt, daß die Tangentialvektoren $\dot\alpha(t_1)$ und $\dot\alpha(t_2)$ aufeinander senkrecht stehen.

(b) Wir bezeichnen mit E_1 die Ebene durch $\alpha(t_1)$ mit Normalenvektor $\dot\alpha(t_1)$ und mit E_2 die Ebene durch $\alpha(t_2)$ mit Normalenvektor $\dot\alpha(t_2)$. Zeige: Spiegelt man das Kurvenstück $\alpha([t_1, t_2])$ an E_2 und die so verlängerte Kurve an E_1, so ergibt sich eine geschlossene C^2-Kurve konstanter Krümmung, die kein Kreis ist.



Geschlossene Raumkurve konstanter Krümmung.

Aufgabe (99.14) Es seien $x, y : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $y(t)^2 = x(t)^3$ für alle t sowie $x(0) = y(0) = 0$. Zeige unter den folgenden Voraussetzungen, daß dann zwangsläufig $\dot x(0) = \dot y(0) = 0$ gelten muß!

(a) x und y sind von der Klasse C^ω
(b) x und y sind von der Klasse C^3
(c) x und y sind stetig und an der Stelle 0 differentiierbar

Aufgabe (99.15) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Auf der Menge $I_0 := \{t \in I \mid \dot\gamma(t) \neq 0\}$ ist dann eine Einheitstangentenabbildung

$$T(t) \;:=\; \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}$$

definiert. Beweise die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(1) es gibt eine Umparametrisierung $\tau : J \to I$ derart, daß $\alpha := \gamma \circ \tau$ eine reguläre C^1-Abbildung ist;
(2) die Abbildung $T : I_0 \to \mathbb{R}^n$ läßt sich stetig auf ganz I fortsetzen.

Anschaulich bedeutet diese Aussage, daß man eine Kurve genau dann ohne anzuhalten durchlaufen kann, wenn man sie mit konstanter Einheitsgeschwindigkeit durchlaufen kann. (Wie die folgenden Beispiele zeigen, kann man diese Aussage anwenden, um die Existenz oder Nichtexistenz einer regulären Parametrisierung einer Kurve nachzuweisen.)

Aufgabe (99.16) (a) Die Normalparabel $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ wird durch die C^1-Abbildung $\gamma(t) := (t^3, t^6)$ parametrisiert, die aber an der Stelle $t = 0$ nicht regulär ist. Benutze die vorhergehende Aufgabe, um aus γ eine reguläre Parametrisierung von C zu gewinnen.

(b) Die Neilsche Parabel $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$ wird durch die C^1-Abbildung $\gamma(t) := (t^2, t^3)$ parametrisiert, die aber an der Stelle $t = 0$ nicht regulär ist. Benutze die vorhergehende Aufgabe zum Nachweis, daß diese Nichtregularität nicht korrigiert werden kann!

Bemerkung: Beim Auftreten singulärer Punkte einer Parametrisierung muß man also unterscheiden, ob diese nur in der ungeschickten Wahl der Parametrisierung begründet sind oder in einem wirklichen geometrischen Defekt der zugrundeliegenden Punktmenge. (Vgl. Aufgabe (97.2).) Diese Unterscheidung ist wesentlich bei der Herausbildung des Mannigfaltigkeitsbegriffs.

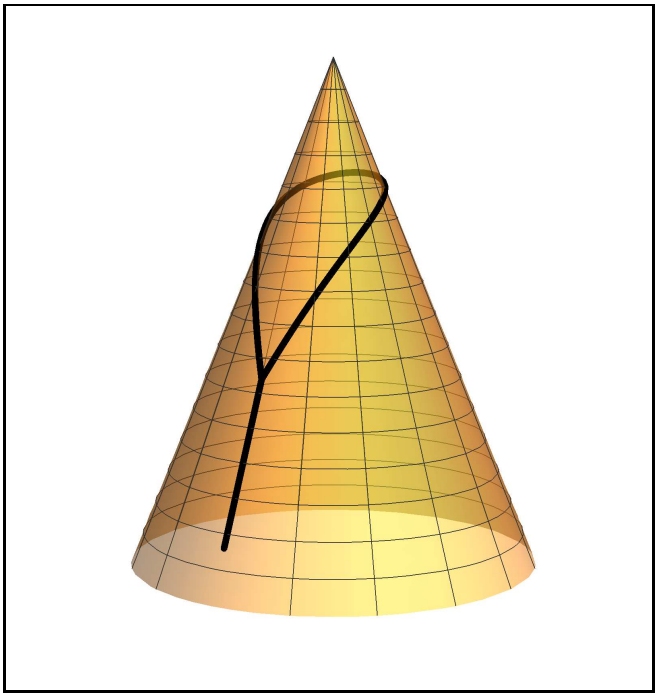
Aufgabe (99.17) Für eine fest vorgegebene Zahl $a \neq 0$ betrachten wir die Kurve $ay^2 = x^3$. Zeige, daß jeder Punkt P dieser Kurve bis auf einen die Eigenschaft hat, daß die Tangente an die Kurve im Punkt P die Kurve in genau einem weiteren Punkt Q schneidet. Welches ist der Ausnahmepunkt?

Aufgabe (99.18) Es sei $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$.
(a) Besitzt C eine C^∞-Parametrisierung?
(b) Besitzt C eine C^ω-Parametrisierung?

Lösungen zu »Kurven« siehe Seite 208

Aufgabe (100.22) Wir betrachten einen senkrechten Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel α zwischen der Symmetrieachse und jeder Leitlinie. Dieser Kegel stehe mit der Spitze nach oben auf dem Boden und habe eine glatte Oberfläche.

(a) Wir werfen eine Lassoschlinge über den Kegel und ziehen das Seil straff. Welche Form hat die Kurve, entlang der sich die Schlinge um den Kegel legt? Handelt es sich um eine ebene Kurve?



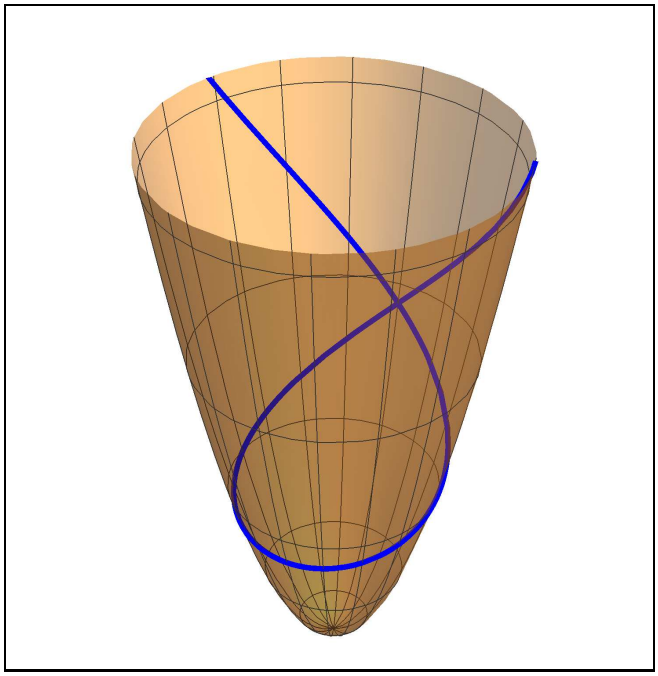
(b) Wenn der Winkel α zu groß (der Kegel also zu flach) ist, legt sich die Lassoschlinge nicht straff um den Kegel, sondern rutscht beim Straffziehen über die Kegelspitze weg. Ab welchem Wert für α ist dies der Fall?

Aufgabe (100.23) Eine Geodätische auf dem Torus mit der Parametrisierung

$$x(\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$$

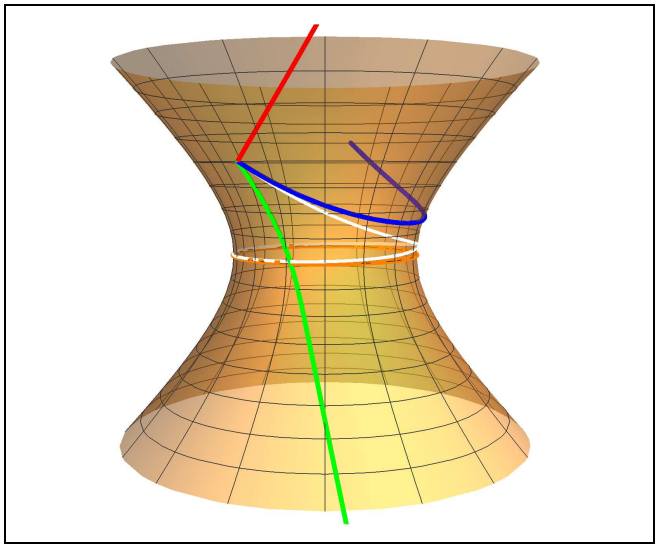
beginne an einem Punkt des oberen Kreises $\theta = \pi/2$, und zwar in einer Richtung tangential zu diesem Kreis. Beschreibe den weiteren Verlauf dieser Geodätischen!

Aufgabe (100.24) Es sei α eine Geodätische auf dem Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$, die kein Meridian ist. Zeige, daß α sich unendlich oft um das Paraboloid herumwindet und sich dabei unendlich oft selbst schneidet.



Geodätische auf einem Rotationsparaboloid.

Aufgabe (100.25) Es sei α eine Geodätische auf dem Rotationshyperboloid $x^2+y^2-z^2 = 1$, die kein Meridian ist. Es sei B der Breitenkreis, der durch die Gleichungen $x^2 + y^2 = 1$ bzw. $z = 0$ gegeben ist. Die Geodätische α starte in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) mit $z_0 > 0$. Zeige, daß es genau die folgenden Möglichkeiten gibt:



Geodätische auf einem Rotationshyperboloid.

(a) α bewegt sich ständig nach oben, erreicht beliebig große Höhen und schmiegt sich asymptotisch an einen Meridian an;

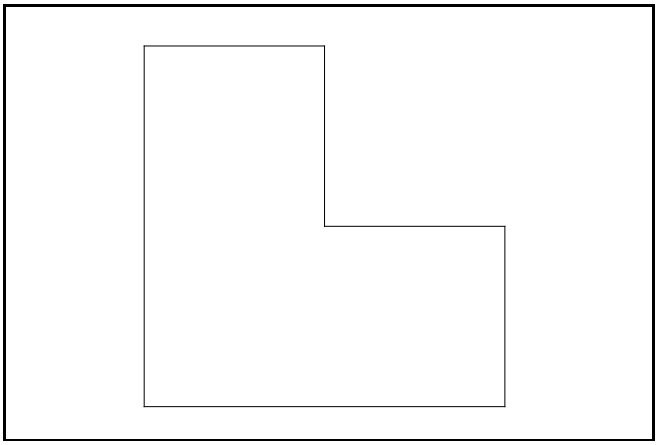
(b) α bewegt sich zunächst nach unten, erreicht einen tiefsten Punkt und bewegt sich von diesem aus ständig nach oben wie in (a);

(c) α bewegt sich ständig nach unten und nähert sich asymptotisch an den Breitenkreis B an;

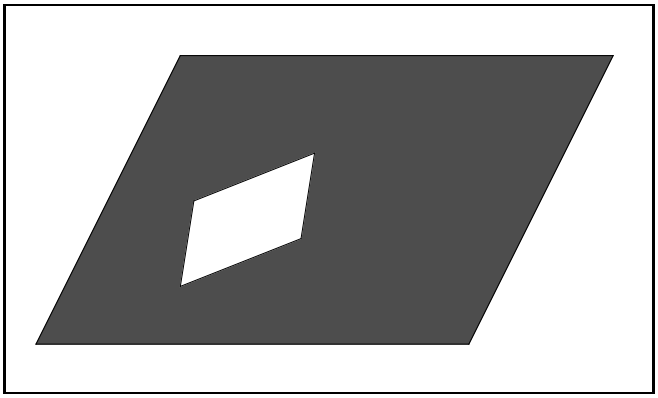
Lösungen zu »Hyperflächen« siehe Seite 220

A101: Die Jordan-Peanosche Inhaltstheorie

Aufgabe (101.1) Gib jeweils zwei verschiedene Möglichkeiten an, die folgende Figur in drei bzw. vier inhaltsgleiche Teile zu zerlegen!

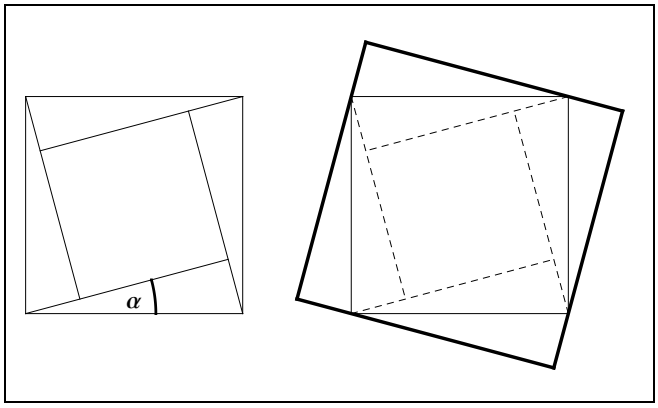


Aufgabe (101.2) Aus einem parallelogrammförmigen Brett wurde ein kleineres Parallelogramm entfernt. Der verbleibende Rest soll mit einem geraden Schnitt in zwei Teile mit gleichem Flächeninhalt zerlegt werden. Wie ist der Schnitt zu legen?

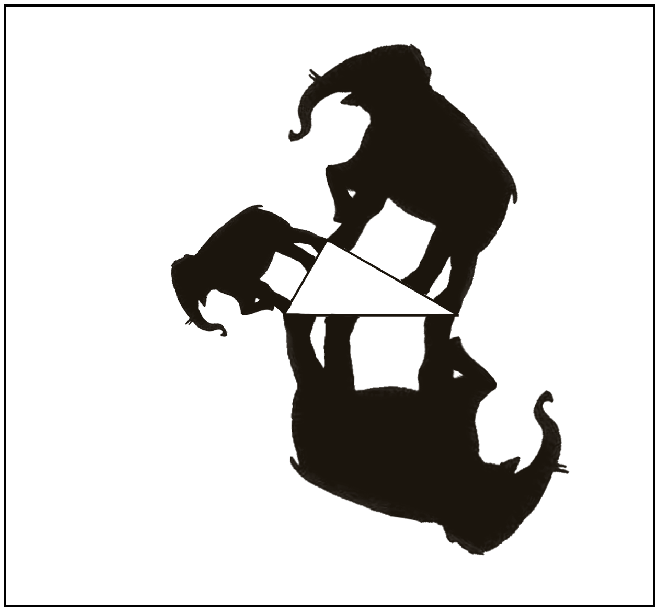


Aufgabe (101.3) (a) Von den vier Ecken eines Quadrates mit der Kantenlänge 1 wird jeweils der Winkel α gegenüber der von der jeweiligen Ecke ausgehenden Kante abgetragen; die vier entstehenden Geraden umschließen dann ein kleineres Quadrat, das in dem ursprünglichen enthalten ist. Welchen Flächeninhalt hat dieses Quadrat?

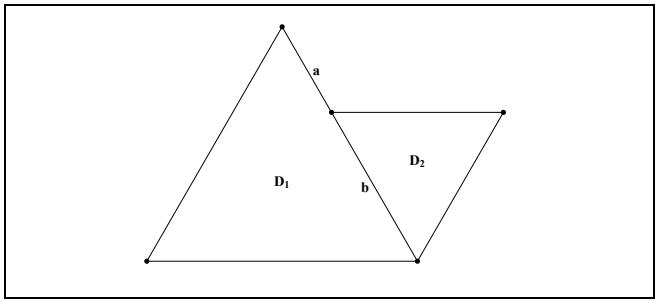
(b) Bei der Konstruktion in (a) entstehen neben dem inneren Quadrat vier kongruente Dreiecke; werden diese nach außen geklappt (also an der jeweils außenseitigen Begrenzungslinie gespiegelt), so entsteht ein größeres Quadrat, welches das ursprüngliche enthält. Welchen Flächeninhalt hat dieses Quadrat?



Aufgabe (101.4) Über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sei die gleiche Jordan-meßbare Menge eingezeichnet, jeweils skaliert im Verhältnis der Seiten. Zeige, daß die Flächensumme der Figuren über den beiden Katheten übereinstimmt mit dem Flächeninhalt der Figur über der Hypotenuse.



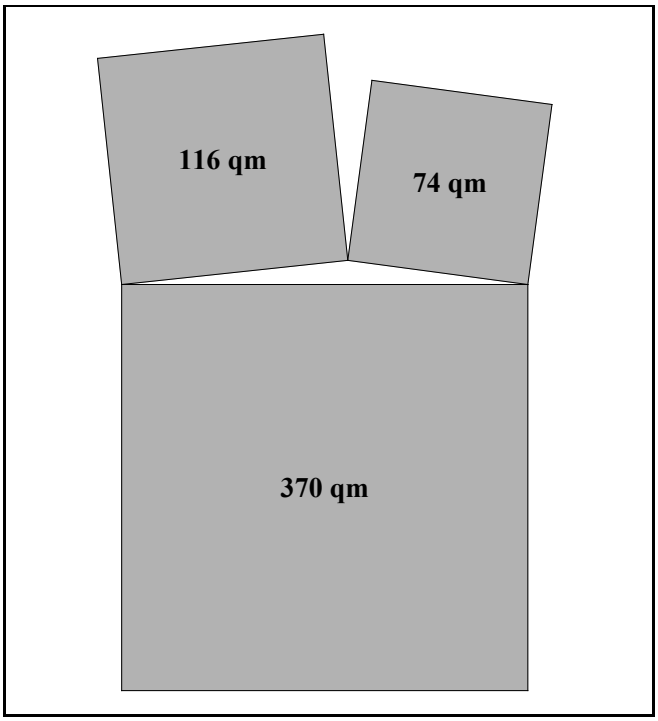
Aufgabe (101.5) Drücke das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden gleichseitigen Dreiecke D_1 und D_2 durch die angegebenen Längen a und b aus!



Lösungen zu »Die Jordan-Peanosche Inhaltstheorie« siehe Seite 243

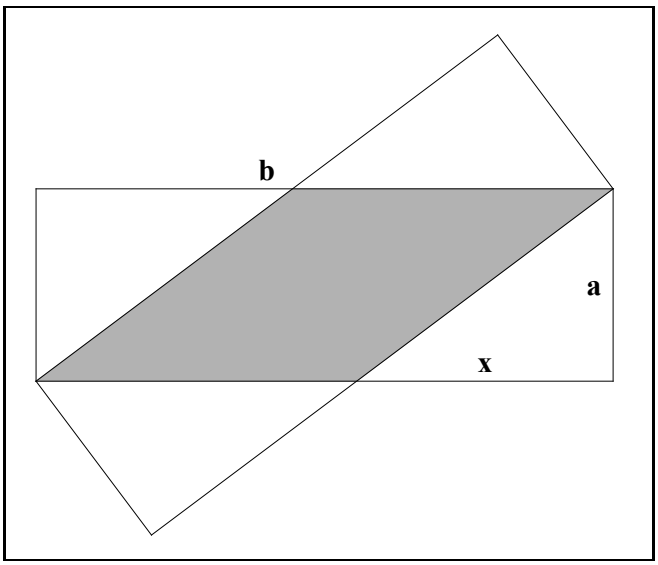
A102: Inhalte elementargeometrischer Figuren

Aufgabe (102.1) Die Flächeninhalte der drei Quadrate seien wie in der Zeichnung angegeben (jeweils in Quadratmetern). Welchen Flächeninhalt hat das von ihnen eingeschlossene Dreieck?

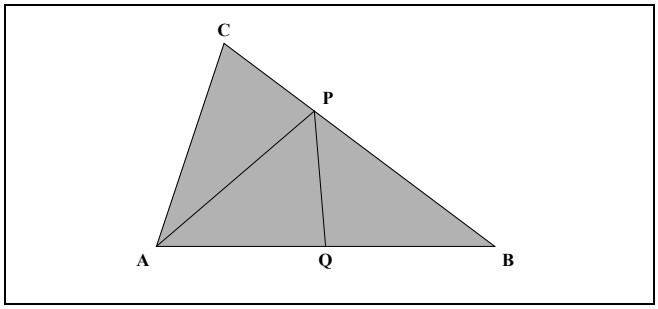


Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck in der Mitte?

Aufgabe (102.2) Zwei identische Rechtecke mit den Seitenlängen $a = 1\,\mathrm{m}$ und $b = 3\,\mathrm{m}$ werden wie abgebildet aufeinandergelegt. Welchen Flächeninhalt hat der grau markierte Überlappungsbereich?



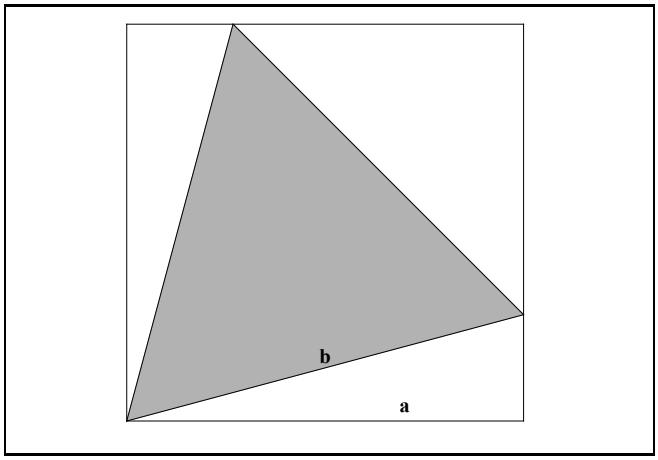
Aufgabe (102.3) Auf den Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC sollen wie skizziert Punkte P und Q gewählt werden, für die die entstehenden Dreiecke CAP, APQ und PQB flächengleich sind. Wie kann man die Punkte P und Q konstruieren?



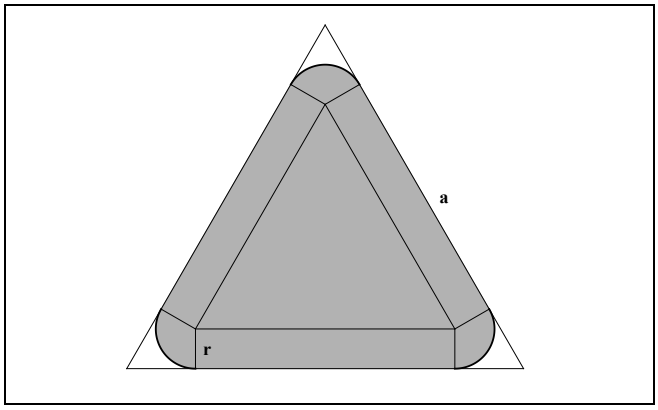
Aufgabe (102.4) Einem Quadrat mit der Kantenlänge a werde wie skizziert ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben.

(a) Welche Seitenlänge b hat dieses Dreieck?

(b) Wieviel Prozent der Quadratfläche macht die Dreiecksfläche aus?



Aufgabe (102.5) Bei einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a werden die Ecken durch Kreise mit Radius r abgerundet. Welche Fläche geht dabei verloren?

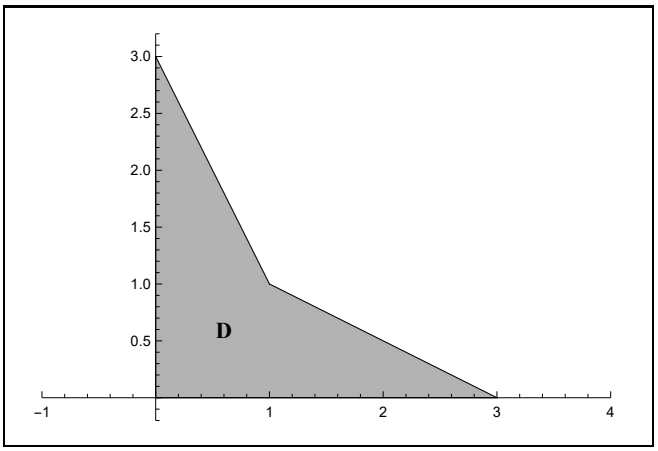


Lösungen zu »Inhalte elementargeometrischer Figuren« siehe Seite 247

Aufgabe (111.15) Berechne das Integral

$$\iint\limits_D x^3 y \,\mathrm{d}(x,y),$$

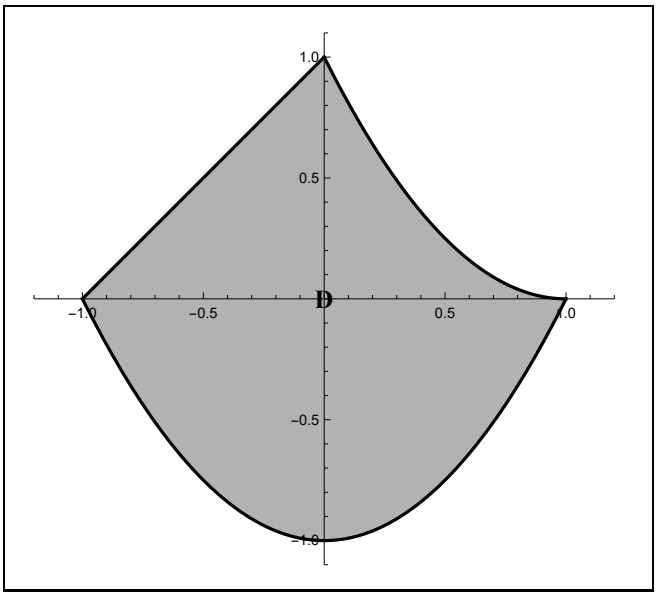
wobei D das in der Skizze angegebene Viereck mit den Ecken $(0,0)$, $(3,0)$, $(1,1)$ und $(0,3)$ bezeichnet.



Aufgabe (111.16) Berechne das Integral

$$\iint\limits_D 2x^2 y \,\mathrm{d}(x,y),$$

wobei D der in der Skizze angegebene Bereich ist, der von der Geraden $y = x+1$ sowie den Parabelbögen $y = (x-1)^2$ und $y = x^2 - 1$ begrenzt wird.

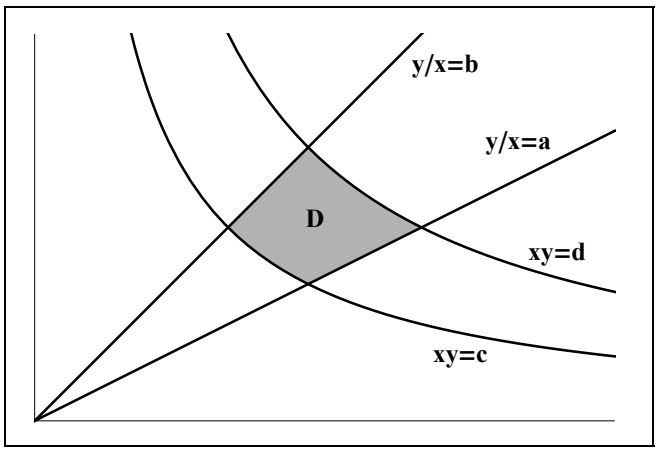


Aufgabe (111.17) Wir betrachten für $x, y > 0$ die Funktion

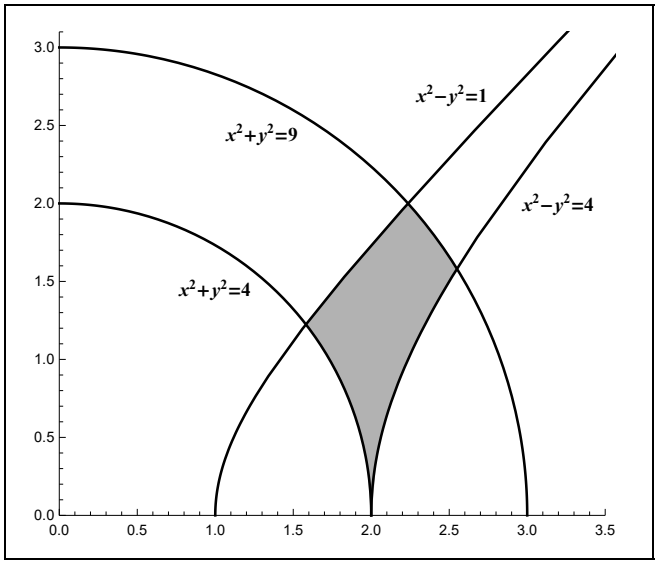
$$f(x,y) \;:=\; \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Zeige, daß die iterierten Integrale $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$ beide existieren, aber verschieden sind. Erkläre dieses Phänomen!

Aufgabe (111.18) Es seien $0 < a < b$ und $0 < c < d$ fest vorgegebene Zahlen. Berechne den Flächeninhalt des Bereichs B, der zwischen den Geraden $y = ax$ und $y = bx$ sowie zwischen den Hyperbeln $y = c/x$ und $y = d/x$ liegt!



Aufgabe (111.19) Drücke den Flächeninhalt des grau markierten Bereichs durch Integrale aus, und zwar sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in den Koordinaten $u = x^2 + y^2$ und $v = x^2 - y^2$. Berechne dann diesen Flächeninhalt!



Aufgabe (111.20) Es sei D das Parallelogramm, das durch die Geraden $x + y = 0$, $x + y = 1$, $2x - y = 0$ und $2x - y = 3$ begrenzt wird. Fertige eine Skizze von D an und berechne dann das Integral $\iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}(x,y)$ mittels einer geeigneten Substitution!

Aufgabe (111.21) Es sei D das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Berechne des Integral

$$\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \,\mathrm{d}(x,y).$$

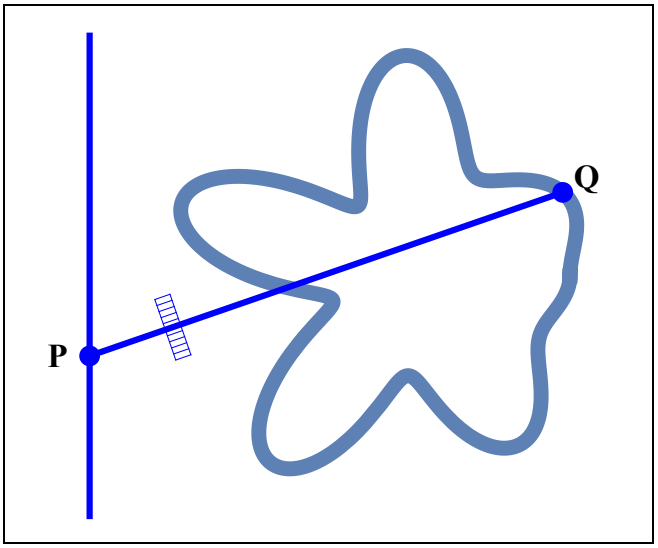
Hinweis: Substituiere $u = x - y$ und $v = x + y$.

Lösungen zu »Berechnung von Mehrfachintegralen« siehe Seite 306

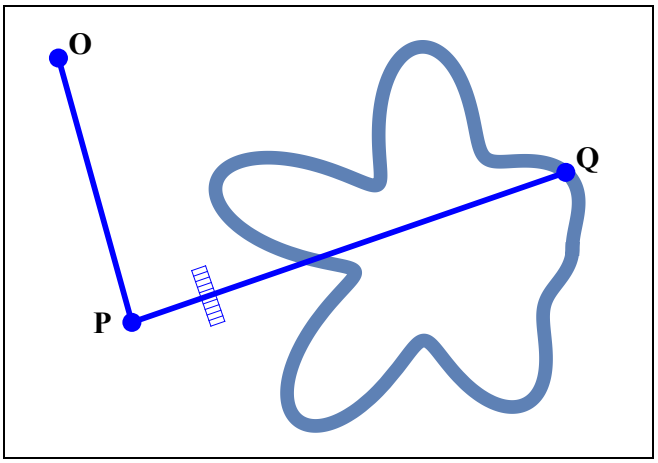
aus endlich vielen überlappungsfreien ebenen Flächenstücken zusammensetzen. Wie läßt sich der Satz dann auf allgemeinere Flächen übertragen?

Aufgabe (116.8) Verifiziere die Gültigkeit des Satzes von Stokes für $F(x,y,z) = (-3y, 3x, z^4)^T$, wenn Ω den Teil des Ellipsoids $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ oberhalb der Ebene $z = 1/\sqrt{2}$ bezeichnet.

Aufgabe (116.9) Ein **Planimeter** ist ein Gerät, das einen von einer gegebenen Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt berechnet. Ein **Linearplanimeter** besitzt dabei einen beweglichen Arm $\overline{PQ}$, dessen einer Endpunkt P sich nur entlang einer festen Geraden bewegen kann und an dessen anderem Endpunkt Q ein Stift sitzt, mit dem die fragliche Kurve durchlaufen wird. Der Arm $\overline{PQ}$ ist dabei im Punkt P frei drehbar.



Ein **Polarplanimeter** besitzt demgegenüber zwei bewegliche Arme $\overline{OP}$ und $\overline{PQ}$, wobei der Punkt O unbeweglich ist (so daß sich der Punkt P nur auf einer Kreislinie um O bewegen kann), während der Arm $\overline{PQ}$ die gleiche Funktionsweise hat wie beim Linearplanimeter.



Am Arm $\overline{PQ}$ befindet sich ein Rädchen, das während der Bewegung des Arms am Boden rollen und gleiten kann. (In der Praxis ist das Rädchen meist an einer Achse befestigt, die parallel zu $\overline{PQ}$ verläuft und fest mit dem Arm $\overline{PQ}$ verbunden ist, aber das spielt für unsere Überlegungen keine Rolle.) Zeige: Ist ℓ die Länge des Arms $\overline{PQ}$ und ist s die vom Rad abgerollte orientierte Strecke, so ist $s\ell$ gerade der von der fraglichen Kurve eingeschlossene Flächeninhalt. (In der Praxis ist das rollende Rädchen mit einem Zählwerk kombiniert, an dem man die Zahl der Umdrehungen des Rädchens bzw. der abgerollten Strecke ablesen kann.)

Aufgabe (116.10) Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Genau dann gilt $\operatorname{rot} F = 0$, wenn für alle Kurven $C \subseteq \Omega$, die zwei fest vorgegebene Punkte $x, y \in \Omega$ verbinden, die Kurvenintegrale $\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle$ den gleichen Wert liefern.

(b) Genau dann gilt $\operatorname{div} F = 0$, wenn für alle Flächen $A \subseteq \Omega$, die von einer fest vorgegebenen Kurve C berandet werden, die Oberflächenintegrale $\int_A \langle F, n\rangle \mathrm{d}\sigma$ den gleichen Wert liefern.

Aufgabe (116.11) Es sei $K := \{(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}$ der Einheitskreis um den Nullpunkt in der xy-Ebene. Wir definieren $F : \mathbb{R}^3 \setminus K \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x,y,z) \;:=\; \frac{1}{(x^2+y^2-1)^2 + z^2} \begin{bmatrix} -2xz \\ -2yz \\ x^2+y^2-1 \end{bmatrix}.$$

(a) Rechne nach, daß $\operatorname{rot}(F) = 0$ gilt!

(b) Es sei C der Streckenzug, der nacheinander die Punkte $(2,0,-1)$, $(2,0,1)$, $(0,0,1)$ und $(0,0,-1)$ verbindet. Berechne das Kurvenintegral $\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle$.

(c) Begründe, warum es keine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus K \to \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad}(\varphi)$ geben kann!

(d) Es sei $U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\}$, und es sei $\varphi : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x,y,z) \;:=\; \arctan\left(\frac{1-x^2-y^2}{z}\right).$$

Rechne nach, daß $F = \operatorname{grad}(\varphi)$ auf U gilt.

Aufgabe (116.12) Es sei $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Ferner bezeichnen wir mit $S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre und mit $L := \mathbb{R}(0,0,1)^T$ die z-Achse. Wir definieren $F : U \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x,y,z) \;:=\; \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Rechne nach, daß $\operatorname{div}(F) = 0$ gilt!

(b) Berechne das Integral $\iint_S \langle F, n\rangle \mathrm{d}\sigma$.

Lösungen zu »Der Stokessche Integralsatz« siehe Seite 343

(c) Begründe, warum es kein Vektorfeld $G : U \to \mathbb{R}^3$ mit $F = \operatorname{rot}(G)$ geben kann!

(d) Definiere $G : \mathbb{R}^3 \setminus L \to \mathbb{R}^3$ durch

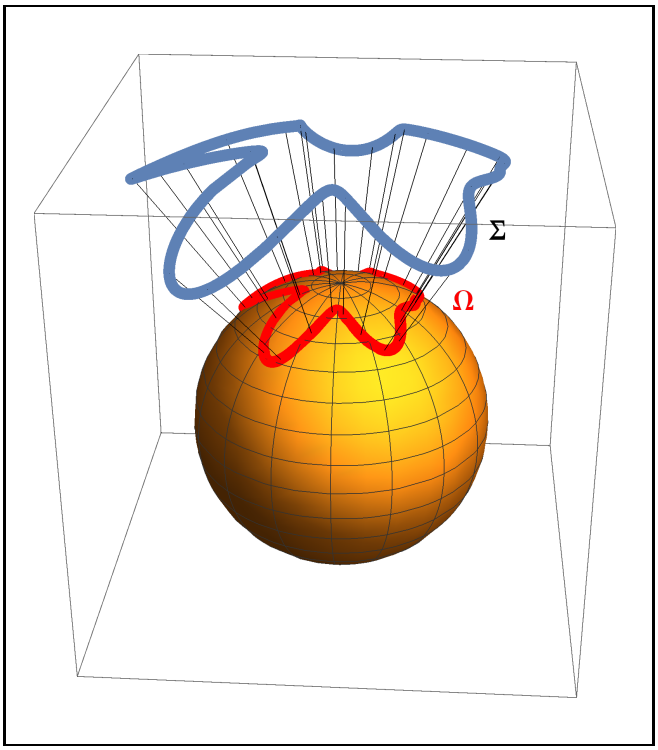
$$G(x,y,z) \;:=\; \frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Zeige, daß $F = \operatorname{rot} G$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus L$ gilt.

Aufgabe (116.13) Der **Raumwinkel** Ω, unter dem eine Fläche Σ von einem Punkt p aus gesehen wird, ist definiert als das Integral

$$\Omega \;=\; \iint\limits_{x\in\Sigma} \frac{\langle x-p, n\rangle}{\|x-p\|^3}\, \mathrm{d}\sigma(x) .$$

Erläutere diese Begriffsbildung (etwa auch durch Vergleich mit der analogen Begriffsbildung für ebene Winkel) und erkläre ihren Zusammenhang mit der vorhergehenden Aufgabe!



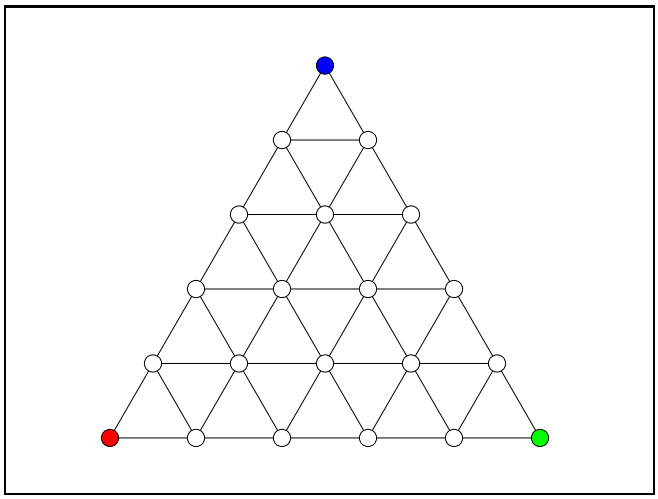
Raumwinkel Ω, unter dem ein Flächenstück Σ von einem Punkt p aus gesehen wird; dieser Punkt ist der Mittelpunkt der eingezeichneten Kugel.

Aufgabe (116.14) Eine Rechtecksfläche (Breite b, Höhe h) werde von einem Augpunkt A aus betrachtet, der sich im Abstand a von der Rechtecksebene befindet und von dem aus das Lot direkt auf den Mittelpunkt des Rechtecks fällt. Unter welchem räumlichen Winkel wird die Rechtecksfläche von A aus gesehen?

Aufgabe (116.15) Gib die im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes benutzte Abbildung g direkt an!

Aufgabe (116.16) Zeige: Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge mit nichtleerem Inneren, so ist C homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$. **Hinweis:** Ist $B_\varepsilon(x_0) \subseteq C$, so schneidet jeder von x_0 ausgehende Strahl sowohl den Rand von $B_\varepsilon(x_0)$ als auch den von K in einem eindeutig bestimmten Punkt.

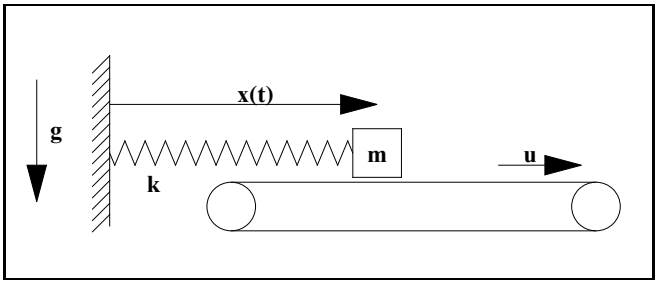
Aufgabe (116.17) Die drei Ecken eines Dreiecks seien rot, grün und blau gefärbt. Dieses Dreieck werde trianguliert, also in kleinere Dreiecke unterteilt, und alle Ecken der auftretenden kleineren Dreiecke sollen unter Benutzung der drei Farben rot, grün und blau gefärbt werden. Dabei ist die Farbwahl für die im Innern des ursprünglichen Dreiecks liegenden Ecken völlig beliebig. Dagegen muß eine in der Triangulierung auftretende Ecke, die auf einer Kante des ursprünglichen Dreiecks liegt, die gleiche Farbe tragen wie einer der beiden Endpunkte dieser Kante. Zeige, daß dann innerhalb der Triangulierung mindestens ein Dreieck auftritt, dessen Ecken drei verschiedene Farben haben.



Dreieck mit zu färbenden Ecken einer Triangulierung.

Lösungen zu »Der Stokessche Integralsatz« siehe Seite 343

Aufgabe (120.35) Auf einem mit konstanter Geschwindigkeit u umlaufenden Band bewege sich eine Masse m (Haftreibungskoeffizient μ_0, Gleitreibungskoeffizient μ). Diese Masse sei mit einer Feder der Steifigkeit k und der ungedehnten Federlänge x_0 an der Wand befestigt.

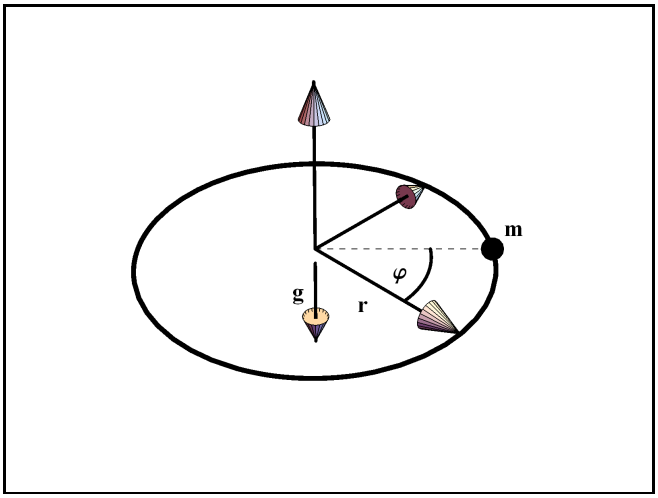


Federgehaltene Masse auf rauhem Band.

(a) Bei welcher Koordinate x_1 kann die Masse auf dem umlaufenden Band in Ruhe bleiben?
(b) Aus der Lage $x = x_1$ heraus werde zur Zeit $t = 0$ der Masse m die Absolutgeschwindigkeit u erteilt. Beschreibe die nachfolgende Bewegung der Masse! (Es ist sinnvoll, statt der Funktion $t \mapsto x(t)$ die Funktion $t \mapsto \xi(t) := x(t) - x_1$ zu beschreiben.)

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe beschriebene System kann als ein grobes Modell für die Erregung von Schwingungen einer Bratschensaite interpretiert werden.

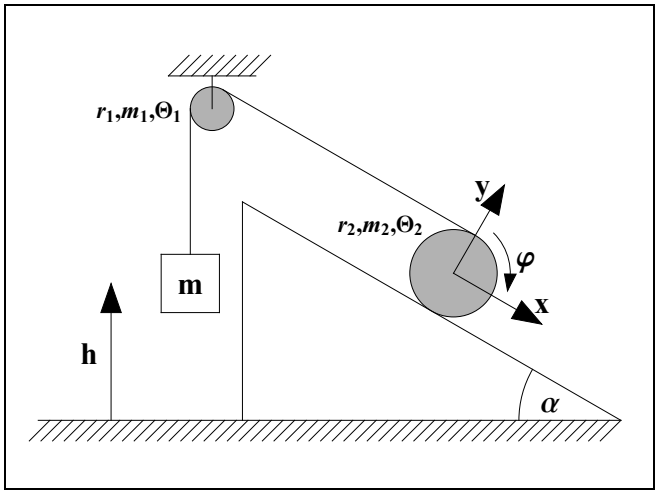
Aufgabe (120.36) Eine durchbohrte Glasperle gleite auf einem kreisförmigen Ring (Radius r, Gleitreibungszahl μ), der in einer horizontalen Ebene senkrecht zur Schwerkraftrichtung liegt. In der Lage $\varphi = 0$ habe die Perle die Anfangsgeschwindigkeit v_0.



Perle auf rauhem Ring.

(a) Stelle die Bewegungsgleichung auf!
(b) Drücke $\dot{\varphi}^2$ als Funktion von φ aus!
(c) Wir groß muß v_0 mindestens sein, damit die Perle einen vollen Umlauf vollendet?
(d) Wie groß ist der Energieverlust bei einem Umlauf?

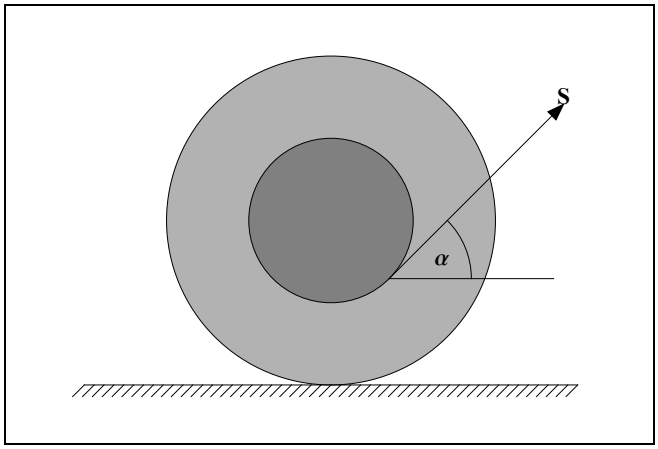
Aufgabe (120.37) Eine Masse m sei mit einem Seil über eine fest an der Decke befestigte Rolle (Radius r_1, Masse m_1, Trägheitsmoment $\Theta_1 = m_1 r_1^2/2$ um die Symmetrieachse) mit einer zylindrischen Walze verbunden (Radius r_2, Masse m_2, Trägheitsmoment $\Theta_2 = m_2 r_2^2/2$ um die Symmetrieachse), die eine schiefe Ebene (Neigungswinkel α) hinabrolle. Bestimme die Beschleunigung der am Seil hängenden Masse!



Abrollende Walze, die eine Masse nach oben zieht.

Aufgabe (120.38) Wir betrachten eine Garnrolle mit dem Gewicht G und dem Trägheitsmoment Θ um ihre Symmetrieachse. Der Radius des Kerns sei r, der Außenradius der Rolle sei R; der Haftreibungskoeffizient zwischen der Rolle und ihrer Unterlage sei μ_0. Wir ziehen mit der konstanten Kraft S an dem Faden der Garnrolle, und zwar unter dem Winkel α gegenüber der Horizontalrichtung.

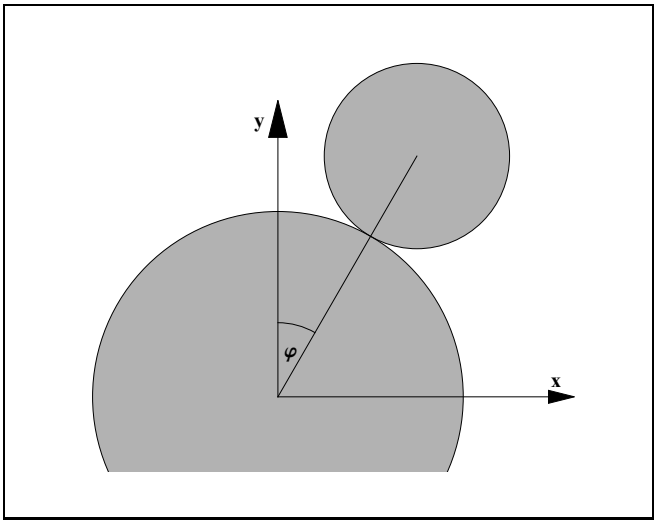
(a) Wenn kein Rutschen auftritt, bewegt sich die Garnrolle dann auf uns zu oder von uns weg?
(b) Wie groß darf bei fest gewähltem Winkel α die Kraft S höchstens sein, damit kein Rutschen auftritt?



Garnrolle, an der gezogen wird.

Lösungen zu »Beispiele aus der Mechanik« siehe Seite 432

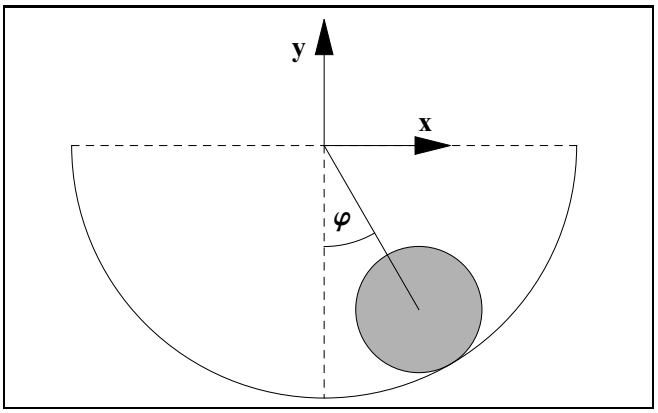
Aufgabe (120.50) Eine Kugel mit Radius r und Masse m befindet sich in Ruhe auf einer Kugel mit Radius R und Masse M. Sie wird leicht angeschubst und rollt dann entlang der ruhenden Kugel nach unten. Bei welchem Winkel φ verliert sie den Kontakt zu der ruhenden Kugel? Wie ändert sich die Lösung, wenn die sich bewegende bzw. die ruhende Kugel ersetzt wird durch einen Zylinder?



Auf anderer Kugel abrollende Kugel.

Bemerkung: Nimm vereinfachend an, daß die Kugel bis zum Kontaktverlust rollt. In Wirklichkeit beginnt sie ab einem bestimmten Punkt (welchem?) zu rutschen, und ab dem Beginn des Rutschens müßte man die Rollbedingung ersetzen durch die Gleichung $H = \mu N$ mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ, was aber etwas mühsam ist.

Aufgabe (120.51) (a) Eine Kugel mit Radius r und Masse m rolle innerhalb einer Hohlkugel mit Radius $R > r$ und Masse M. Stelle die Bewegungsgleichung auf! Bestimme im Fall kleiner Auslenkungen um die Ruhelage die Frequenz, mit der sich die kleine Kugel um ihre Ruhelage hin und her bewegt.

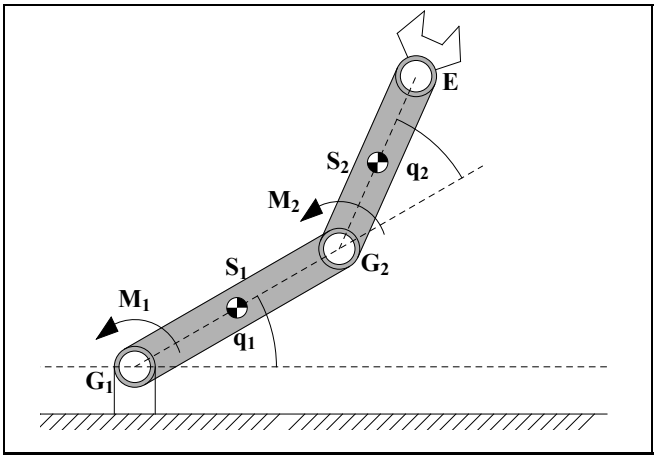


In anderer Kugel abrollende Kugel.

(b) Wie ändert sich die Lösung, wenn wir nicht eine Kugel in einer Hohlkugel, sondern einen Zylinder innerhalb eines Hohlzylinders betrachten?

Aufgabe (120.52) Der abgebildete Roboterarm besteht aus zwei Armen A_1 und A_2. An den Gelenken G_1 und G_2 seien Elektromotoren angebracht, die Drehmomente $t \mapsto M_1(t)$ bzw. $t \mapsto M_2(t)$ aufbringen. Stelle für die Winkel $t \mapsto q_1(t)$ und $t \mapsto q_2(t)$ die resultierenden Bewegungsgleichungen auf! Verwende dabei für $i = 1, 2$ die folgenden Bezeichnungen:

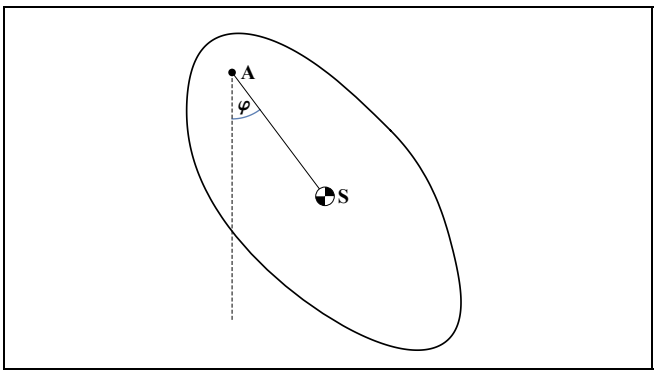
- L_i = Länge von A_i (also $L_1 = \overline{G_1G_2}$ und $L_2 = \overline{G_2E}$);
- ℓ_i = Abstand von G_i zum Schwerpunkt S_i von A_i;
- m_i = Masse von A_i;
- Θ_i = Trägheitsmoment von A_i bezüglich der Schwerpunktsachse senkrecht zur Bewegungsebene.



Roboterarm.

Zeige insbesondere, daß sich mit den Bezeichnungen $q = (q_1, q_2)^T$ und $M = (M_1, M_2)^T$ die Bewegungsgleichungen in der Form $H(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) = M$ schreiben lassen, wobei $H(q)$ eine invertierbare (2×2)-Matrix und jede der beiden Komponenten von b von der Form $\dot{q}^T B(q)\dot{q}$ mit einer (2×2)-Matrix B ist.

Aufgabe (120.53) Die abgebildete Scheibe habe die Masse m und das Trägheitsmoment θ bezüglich der Schwerpunktsachse senkrecht zur Scheibenebene. Die Scheibe sei an dem Punkt A frei drehbar aufgehängt. Leite eine Differentialgleichung für die Funktion $t \mapsto \varphi(t)$ her! Mit welcher Frequenz schwingt die Scheibe bei kleinen Auslenkungen aus ihrer Ruhelage $\varphi = 0$?



Körperpendel.

Lösungen zu »Beispiele aus der Mechanik« siehe Seite 432

Aufgabe (123.10) Es sei p eine Gleichgewichtslage des Systems $\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big)$, und es gebe eine nichtkonstante Lösung $t \mapsto x(t)$ dieses Systems mit $x(t) \to p$ für $t \to -\infty$. Zeige, daß die Gleichgewichtslage p instabil ist.

Aufgabe (123.11) Wir betrachten das Vinograd-System

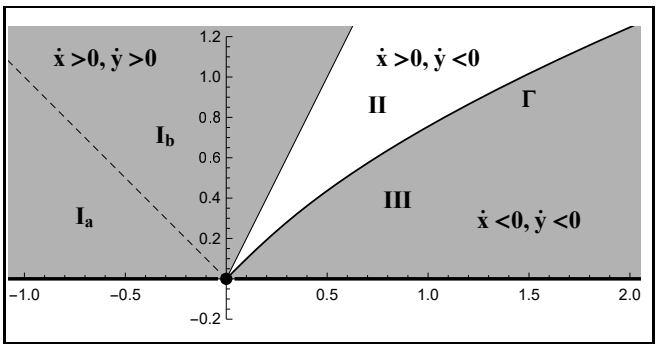
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x^2(y-x)+y^5}{(x^2+y^2)\big(1+(x^2+y^2)^2\big)} \\ \dot{y} &= \frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)\big(1+(x^2+y^2)^2\big)} \end{aligned}$$

mit einer rechten Seite, die für $(x,y) = (0,0)$ als Null zu verstehen ist. Es sei Γ die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1-t}{t}}, \quad y(t) = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{t}} \qquad (0 < t \le 1),$$

und die Mengen I_a, I_b, II und III seien folgendermaßen definiert:

- I_a ist die Menge aller Punkte der oberen Halbebene, die unterhalb der Geraden $y = -x$ liegen;
- I_b ist die Menge aller Punkte, die sowohl oberhalb der Geraden $y = -x$ als auch oberhalb der Geraden $y = 2x$ liegen;
- II ist die Menge aller Punkte im ersten Quadranten, die unterhalb der Geraden $y = 2x$ und oberhalb der Kurve Γ liegen;
- III ist die Menge aller Punkte im ersten Quadranten, die unterhalb der Kurve Γ liegen.



Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Der Punkt $(0,0)$ ist die einzige Gleichgewichtslage des Systems.

(b) Ist $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ eine Lösungskurve des Systems, dann auch $t \mapsto \big(-x(t), -y(t)\big)$. (Was bedeutet dies für das Aussehen des Phasenportraits?)

(c) Der negative und der positive Teil der x-Achse sind Trajektorien, die auf die Gleichgewichtslage $(0,0)$ zulaufen.

(d) Die Nullisokline bezüglich y ist die Vereinigung der x-Achse mit der Geraden $y = 2x$.

(e) Die Nullisokline bezüglich x ist eine Kurve, deren in der oberen Halbebene verlaufender Teil gerade Γ ist.

(f) Jede in I_a beginnende Trajektorie muß I_a verlassen und in I_b eindringen.

(g) Jede in I_b beginnende Trajektorie muß I_b verlassen und in II eindringen.

(h) Jede in II beginnende Trajektorie muß II verlassen, um in III einzudringen.

(i) Jede in III beginnende Trajektorie verbleibt in III und läuft für $t \to \infty$ gegen $(0,0)$.

(j) Die Gleichgewichtslage $(0,0)$ ist attraktiv, und zwar sogar global: Jede Systemtrajektorie läuft für $t \to \infty$ gegen $(0,0)$.

(k) Eine Trajektorie durch einen Punkt der Form (x,y) mit $y = 3x$ passiert diesen Punkt genau dann mit einer Steigung größer als 3, wenn $y < 1/\sqrt{27}$ gilt.

(l) Es sei η eine Zahl mit $0 < \eta < 1/\sqrt{27}$, und es sei D das Dreieck mit den Begrenzungslinien $x = 0$ (linker Rand), $y = 3x$ (rechter Rand) und $y = \eta$ (oberer Rand). Jede am linken oder rechten Rand startende Trajektorie läuft dann in das Dreieck D hinein und verläßt dieses durch den oberen Rand wieder.

(m) Es gibt eine Zahl ξ derart, daß jede vom linken Rand her in D eindringende Trajektorie dieses Dreieck links von (ξ,η) wieder verläßt, während jede vom rechten Rand her in D eindringende Trajektorie dieses Dreieck rechts von (ξ,η) wieder verläßt.

(n) Eine durch (ξ,η) laufende Trajektorie läuft für $t \to -\infty$ gegen $(0,0)$ (und nach (k) auch für $t \to \infty$).

(o) Die Gleichgewichtslage $(0,0)$ ist nicht stabil.

Hinweis zu (g): Zu jedem Punkt $p \in I_b$ gibt es eine Konstante C derart, daß p in dem Dreieck D mit den Begrenzungslinien $y = -x$, $y = 2x$ und $y = x + C$ liegt. Begründe, warum die in p beginnende Trajektorie nicht in D verbleiben kann, sondern D über die Randlinie $y = 2x$ verlassen muß, um in II einzudringen.

Aufgabe (123.12) Bestimme in jedem der folgenden Beispiele alle Gleichgewichtslagen des angegebenen Systems und untersuche sie auf Stabilität hin!

(a) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x^3 - xy^2 \\ 2y - y^5 - x^4 y \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ 2xy \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - 6x^2 - 2xy \\ 4y - 4y^2 - 2xy \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(x+y) \\ x + x^3 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^y - x \\ e^x + y \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - xy \\ x - y^3 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + x^3 \\ x + y^3 \end{bmatrix}$

Lösungen zu »Stabilität von Gleichgewichtslagen« siehe Seite 481

Aufgabe (126.10) Wir definieren $f(x) := x^3 - 4x$ für $-2 \le x \le 2$ und setzen diese Funktion mit der Periode 4 fort. Beweise, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$f(x) \;=\; \frac{96}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

gilt, und benutze die Parsevalsche Formel zum Nachweis der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} \;=\; \frac{\pi^6}{945}.$$

Aufgabe (126.11) Beweise Folgerung (126.20) im Buch: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integrierbar, so gilt $\int_a^b f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \to 0$ für $|k| \to \infty$.

Aufgabe (126.12) Die 2π-periodische Funktion f sei Lipschitz-stetig auf einem Intervall $I \subseteq [0, 2\pi)$. Zeige, daß dann die Folge $(S_n f)$ der Partialsummen der Fourierreihe von f gleichmäßig auf I gegen f konvergiert.

Hinweis: Modifiziere den Beweis von Satz (126.23) im Buch.

Aufgabe (126.13) Wir betrachten die 2π-periodische Funktion f mit $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Z} \cdot \pi$ sowie

$$f(x) \;=\; \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi < x < 0; \\ 1, & \text{falls } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Nach Beispiel (126.9) im Buch ist die Fourierreihe von f gegeben durch

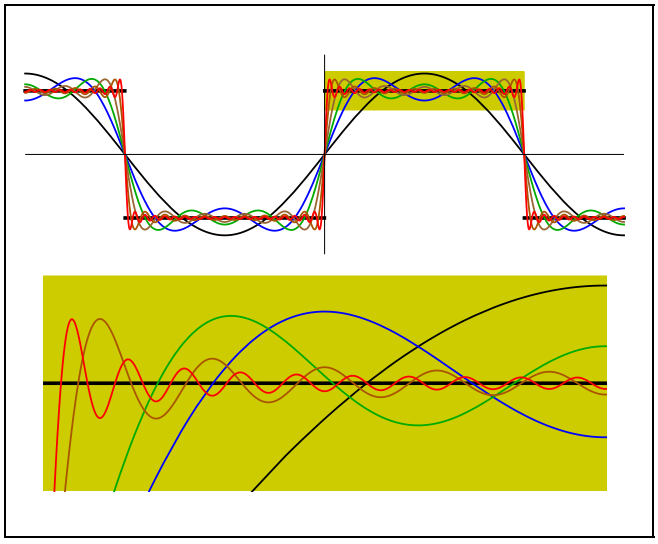
$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{2k+1}.$$

Bestimme für jede Zahl $N \in \mathbb{N}$ die lokalen Minima und Maxima der Partialsummen

$$f_N(x) \;:=\; \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{2k+1}.$$

Zeige, daß die Funktion f_N ihr globales Maximum an der Stelle $\pi/(2N)$ annimmt und daß es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c \approx 1.18$ gibt mit $f_N\big(\pi/(2N)\big) \to c$ für $N \to \infty$.

Bemerkung: Nach Satz (126.23) im Buch konvergiert die Funktionenfolge (f_N) punktweise gegen f. Diese Aufgabe zeigt, daß aber in der Nähe der Sprungstelle 0 die Funktionen f_N den links- und den rechtsseitigen Funktionsgrenzwert von f in konsistenter Weise um einen Betrag überschreiten, der rund 9% der Sprunghöhe ausmacht. Dieser Sachverhalt wird als **Gibbssches Phänomen** bezeichnet.



Gibbssches Phänomen: Konsistentes Überschießen der links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktion f durch die Partialsummen der Fourierreihe von f in der Nähe einer Sprungstelle von f.

Aufgabe (126.14) Die Funktion g erfülle die Voraussetzungen des Satzes von Dirichlet und habe an der Stelle x_0 eine Sprungstelle. Zeige, daß dann die Partialsummen $S_n g$ der Fourierreihe von g die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von g an der Stelle x_0 in einer Umgebung von x_0 konsistent um einen Betrag überschreiten, der rund 9% der Sprunghöhe beträgt. (Das in der vorigen Aufgabe in einem speziellen Fall beobachtete Gibbssche Phänomen ist also das typische Verhalten von Fourierreihen in der Nähe einer Sprungstelle.)

Hinweis: Betrachte die Funktion

$$h(x) \;:=\; g(x) - \frac{g(x_0^+) - g(x_0^-)}{2} \cdot f(x - x_0)$$

(mit $h(x_0) := \big(g(x_0^+) + g(x_0^-)\big)/2$), wobei f die in der vorigen Aufgabe betrachtete Funktion ist.

Aufgabe (126.15) Es sei $u(x,t)$ die Temperatur der Erde zur Zeit t in der Tiefe $x \ge 0$ unterhalb der Erdoberfläche. Es ist plausibel, daß u periodisch in t mit der Periode 1 (ein Jahr) ist. Mit einer geeigneten Konstanten α erfüllt u die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Benutze diese Gleichung, um die Funktion u aus der Oberflächentemperatur $f(t) = u(0,t)$ zu ermitteln. Was ergibt sich insbesondere, wenn $f(t) = \sin(2\pi t)$ gilt? (Dabei sei die Temperatur so normiert, daß die über ein Jahr gemittelte Durchschnittstemperatur gerade Null ist.)

Lösungen zu »Fourierreihen« siehe Seite 517

A134: Schätzung von System- und Meßparametern

Aufgabe (134.1) Ein Schiff befinde sich zur Zeit $t = 0$ an einer Position (x_0, y_0) im ersten Quadranten und bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $(u, v)^T$. Die Anfangsposition und die Geschwindigkeit seien unbekannt und sollen aus Messungen geschätzt werden, die von einer sich im Punkt $(0, 0)$ befindenden Station gemacht werden. Dabei werden zwei Arten von Messungen durchgeführt: Winkelmessungen zu Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_m$, bei denen jeweils der Winkel zwischen der x-Achse und der Sichtlinie zum Schiff hin gemessen wird; Abstandsmessungen zu Zeitpunkten $\tau_1, \ldots, \tau_n$, bei denen jeweils der Abstand des Schiffes zur Meßstation gemessen wird (etwa aus der Laufzeit eines Signals).

(a) Wie wirken sich Änderungen in den Werten x_0, y_0, u, v in linearer Näherung auf die resultierenden Messungen aus?

(b) Welche Inkremente $\delta x_0, \delta y_0, \delta u, \delta v$ müssen zu gegebenen Schätzwerten x_0, y_0, u, v addiert werden, um die Schätzungen möglichst gut an die erhaltenen Messungen anzupassen?

(c) Zeige, daß man allein aus Winkelmessungen nicht alle vier Parameter x_0, y_0, u, v schätzen kann, unabhängig davon, wie viele Messungen man durchführt und zu welchen Zeiten man sie durchführt.

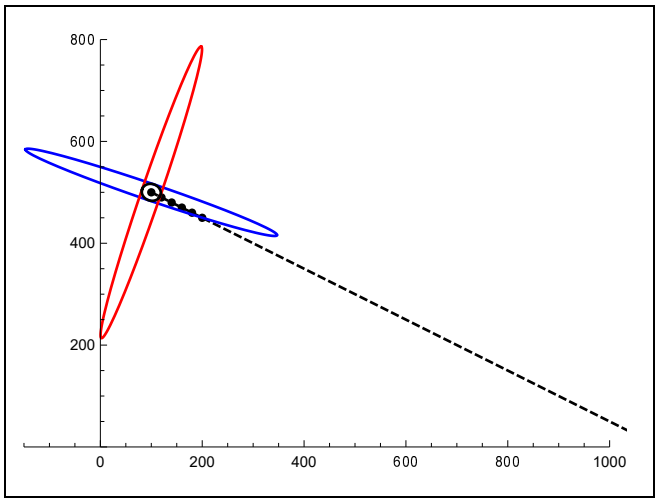
(d) Zeige, daß man auch allein aus Abstandsmessungen nicht alle vier Parameter x_0, y_0, u, v schätzen kann, unabhängig von der Anzahl und den Zeitpunkten solcher Messungen.

Aufgabe (134.2) Es sei X eine n-dimensionale normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^n$ und der Kovarianzmatrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir geben uns eine Zahl $0 < \alpha < 1$ (ein "Konfidenzniveau") vor und suchen dann eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$p\big((X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \leq \varepsilon\big) \;=\; \alpha.$$

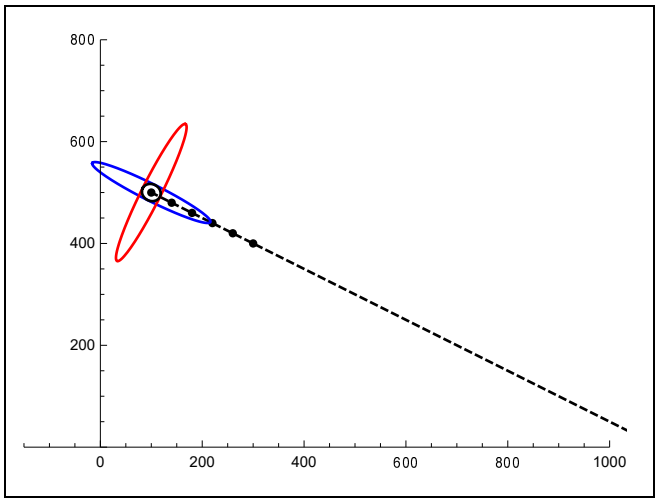
(Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - \mu)^T C^{-1} (x - \mu) \leq \varepsilon\}$ ist ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt μ, und $\varepsilon > 0$ ist so zu wählen, daß X mit Wahrscheinlichkeit α Werte in diesem **Konfidenzellipsoid** annimmt.) Gib an, wie man eine solche Zahl $\varepsilon > 0$ finden kann!

Aufgabe (134.3) In der Situation von Aufgabe (134.1) mit den Werten $x_0 = 100$, $y_0 = 500$, $u = 20$ und $v = -10$ seien u und v als bekannt vorausgesetzt, während die Positionskoordinaten x_0 und y_0 aus Messungen geschätzt werden sollen. Bei den Messungen werde angenommen, sie seien alle unabhängig normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und den Standardabweichungen $\sigma_a = 15$ für Abstandsmessungen und $\sigma_w = 2^0$ für Winkelmessungen. (Die Daten sind völlig unrealistisch, weswegen die Festlegung von Einheiten egal ist.) Das folgende Diagramm zeigt die Konfidenzellipsen des Schätzparameters (x_0, y_0) zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.95$ basierend auf fünf Messungen zu den Zeiten $t = 1, 2, 3, 4, 5$ nach dem Zeitpunkt, zu dem sich das Schiff in der zu schätzenden Position befand.



Konfidenzintervalle der zu schätzenden Schiffsposition allein aus Entfernungsmessungen (blau), allein aus Winkelmessungen (rot) und aus Entfernungs- und Winkelmessungen zusammen (schwarz).

Wenn man den zeitlichen Abstand zwischen je zwei Messungen verdoppelt (wenn man also fünf Messungen zu den Zeiten $t = 2, 4, 6, 8, 10$ nach dem Zeitpunkt durchführt, zu dem sich das Schiff in der zu schätzenden Position befand), ergibt sich das folgende Bild. (In beiden Abbildungen sind durch schwarze Punkte die Positionen des Schiffs zu den Zeitpunkten markiert, zu denen Messungen gemacht werden.)



Gleiches Bild bei Streuung der Messungen über ein größeres Zeitintervall.

Interpretiere die Abbildungen und formuliere eine Reihe von Fragen über erzielbare Schätzgenauigkeiten, die man in weiteren Simulationsläufen untersuchen kann!

Lösungen zu »Schätzung von System- und Meßparametern« siehe Seite 569

Aufgabe (139.12) (a) Bestimme die Singularitäten der Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{\exp(z)}{z^2 \cdot \sin(z)}$$

und an jeder Singularität das Residuum.

(b) Es sei f eine auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Funktion mit dem Residuum $\operatorname{Res}(f,0) = a_{-1}$, und es sei $g(z) := f(z^2)$. Bestimme $\operatorname{Res}(g,0)$!

Aufgabe (139.13) (a) Bestimme die Singularitäten der Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{z^2 + 2\sqrt{3}z + 1}{z^2 \cdot \cos(z)}$$

und an jeder Singularität das Residuum.

(b) Es sei f eine auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Funktion mit dem Residuum $\operatorname{Res}(f,0) = a_{-1}$, und es sei $g(z) := f(z^3)$. Bestimme $\operatorname{Res}(g,0)$!

Aufgabe (139.14) (a) Bestimme die Singularitäten der Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2 \cdot \sin(z)}$$

und an jeder Singularität das Residuum.

(b) Es sei f eine auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Funktion mit der Laurent-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Bestimme das Residuum von $g(z) := f(1/z)$ an der Stelle $z_0 = 0$!

Aufgabe (139.15) Wir bezeichnen mit

$$\Omega \;:=\; \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le x\}$$

das Gebiet zwischen der Winkelhalbierenden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$. Ferner sei $C := \partial\Omega$ die in mathematisch positivem Sinne durchlaufene Randkurve von Ω. Berechne das Kurvenintegral $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ für die Funktion

$$f(z) \;=\; \overline{z}^2 + \frac{9}{z-1} + \frac{7}{(z-i)^8} + \frac{5}{3+2i-6z} + e^{1/(z-4)}.$$

Aufgabe (139.16) Wir betrachten die Kurve C, die sich zusammensetzt aus der Strecke von 1 nach i, der Strecke von i nach -1 sowie der unteren Hälfte des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ (durchlaufen in mathematisch positiver Richtung). Berechne das Kurvenintegral $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ für die Funktion

$$f(z) \;=\; |z|^2 + \frac{1}{2z-1} + \frac{2}{3+4z} + \frac{5}{(6z-7)^2} + \frac{8}{z-1+i} + \frac{9}{z^3}.$$

Aufgabe (139.17) Wir betrachten die Punkte $A = 1 + i$ und $B = -2 + 4i$ sowie die Kurve C, die sich zusammensetzt aus dem Bogen der Parabel $y = x^2$ zwischen B und A und der Strecke von A nach B (durchlaufen in mathematisch positiver Richtung). Berechne das Kurvenintegral $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ für die Funktion

$$f(z) \;=\; z + \overline{z} + \frac{2}{z-3} + \frac{4}{z-i} + \frac{5}{(z-i)^2}.$$

Aufgabe (139.18) Es sei C die positiv orientierte Kurve, die sich zusammensetzt aus dem Halbkreis $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$, sowie der Strecke von i nach $-i$. Berechne $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ für die Funktion

$$f(z) \;=\; |z|^2 + 2\overline{z} + \frac{3}{z-4} + 5e^z + \frac{1}{6-7z} + \frac{1}{8z+9}.$$

Aufgabe (139.19) Berechne die folgenden Integrale durch Anwendung des Residuensatzes!

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \qquad (0 < a < b)$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}\mathrm{d}x \qquad (a, b > 0)$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x \qquad (0 < a < b)$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{4}{5+4\sin x}\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$

(k) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} \qquad (-1 < a < 1)$

(l) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos(2x)}{1+a^2-2a\cos x}\mathrm{d}x \qquad (-1 < a < 1)$

(m) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos^2 x}{x^4+1}\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^6+1}\mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe (139.20) Die Funktion f sei holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten, von denen keine reell sei, und es gelte $f(z) \to 0$

Lösungen zu »Der Residuenkalkül« siehe Seite 610

für $|z| \to \infty$. Zeige, daß für $\xi > 0$ (bzw. $\xi < 0$) das Fourier-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\mathrm{d}x$ den Wert $2\pi i \cdot S$ hat, wobei S die Summe der Residuen der Funktion $z \mapsto e^{i\xi z}f(z)$ in der oberen (bzw. unteren) Halbebene ist.

Aufgabe (139.21) Berechne das Integral

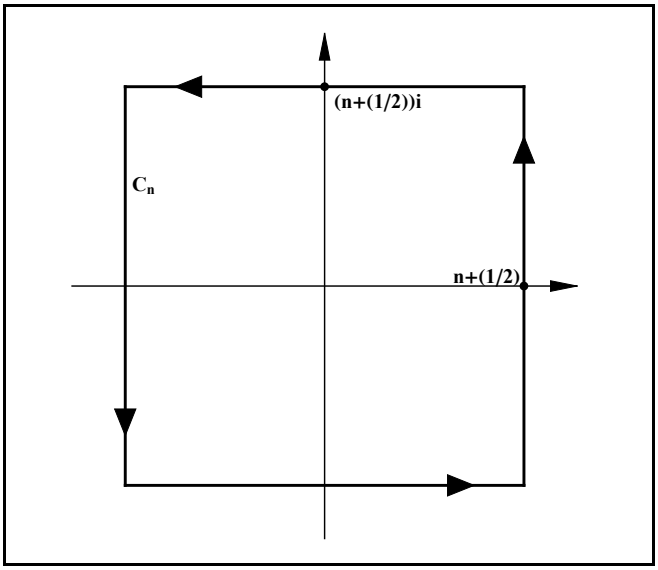
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

(a) mit Hilfe des Residuenkalküls,
(b) mit rein reellen Methoden.

Aufgabe (139.22) Wir betrachten die Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{\cot(\pi z)}{z^2} \;=\; \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$$

sowie für jede natürliche Zahl n den in positiver Richtung durchlaufenen Weg C_n, der aus den Seiten des Quadrats mit den Ecken $(n + 1/2)(\pm 1 \pm i)$ besteht.



Zeige, daß $|\cot(\pi z)| \le 1/\tanh(n\pi + \pi/2)$ für alle $z \in C_n$ gilt, und schließe daraus auf $\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ für $n \to \infty$. Berechne andererseits das Integral $\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z$ mit Hilfe des Residuenkalküls. Welche Aussage ergibt sich?

Aufgabe (139.23) Leite mit der Methode der vorhergehenden Aufgabe die folgende Aussage her: Ist N eine gerade natürliche Zahl, so gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^N} \;&=\; -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^N}, 0\right)\\ &=\; -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{N!} \cdot \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}z^N}\bigg|_{z=0} \big(z\cot(\pi z)\big).\end{aligned}$$

Berechne $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^4)$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^6)$. Warum funktioniert die Methode nicht, um die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^N)$ mit *ungeraden* Exponenten N zu berechnen?

Aufgabe (139.24) Die Funktion g sei analytisch auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme einer endlichen Menge S von Singularitäten, und es gebe Konstanten $R, A > 0$ und $\alpha > 1$ mit

$$|g(z)| \;\le\; \frac{A}{|z|^\alpha} \quad \text{für } |z| \ge R.$$

Beweise die beiden folgenden Gleichungen!

(a) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus S} g(k) = -\pi \sum_{\sigma\in S} \mathrm{Res}\,(\cot(\pi z)g(z), \sigma)$

(b) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus S} (-1)^k g(k) = -\pi \sum_{\sigma\in S} \mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{\sin(\pi z)}, \sigma\right)$

Aufgabe (139.25) Benutze Aufgabe (139.24), um den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} \;=\; \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + - \cdots$$

zu berechnen!

Aufgabe (139.26) Berechne die Werte der folgenden Reihen!

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2 + 1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ $(a > 0)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$

Aufgabe (139.27) Es seien $t, a, \tau > 0$ fest vorgegebene reelle Zahlen. Bestimme alle Singularitäten der Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{-e^{tz}}{z + ae^{-\tau z}}$$

sowie die Residuen von f an diesen Singularitäten!

Aufgabe (139.28) Es seien $a > 0$, $\tau > 0$, $\delta > 0$ vorgegebene Konstanten. Wir betrachten die Funktion $g(z) := ze^{\tau z} + a$ und die Menge A_δ derjenigen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z^\star| \ge \delta$ für alle Nullstellen $z^\star$ von g.

(a) Zeige, daß es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt mit $|g(z)| \ge \varepsilon$ für alle $z \in A_\delta$. (Salopp gesagt: Ist z wegbeschränkt von allen Nullstellen von g, so ist $g(z)$ wegbeschränkt von Null.)

Lösungen zu »Der Residuenkalkül« siehe Seite 610

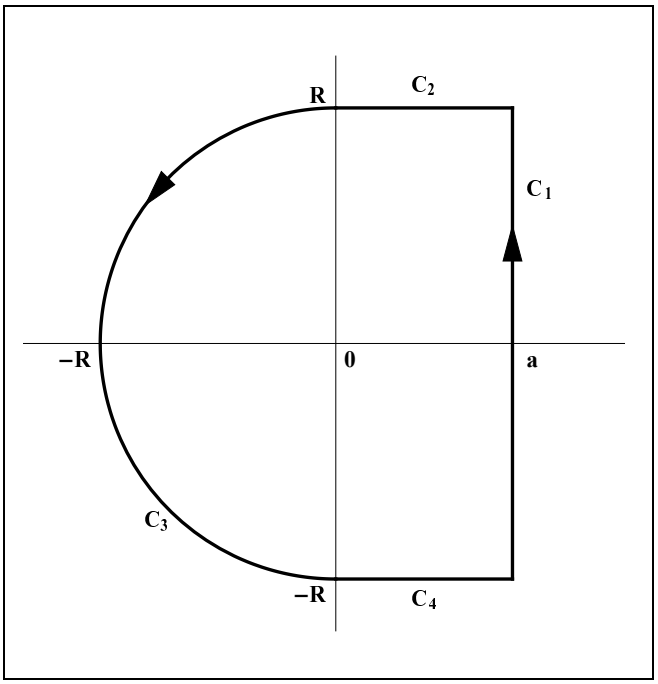
Hinweis: Beweise zunächst die analoge Aussage für die Funktion $G(\zeta) := e^{\tau\zeta} + a$ und benutze dann die Transformation $\zeta = \Phi(z)$ mit $\Phi(z) := \log(z) + \tau z$ $\big($wobei $\log(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$ für $-\pi < \varphi < \pi\big)$.

(b) Zeige, daß es eine Konstante $\beta > 0$ gibt mit $|z + ae^{-\tau z}| \geq \beta|z|$ für alle $z \in A_\delta$.

Aufgabe (139.29) (a) Wir betrachten für fest vorgegebene Zahlen $t, a, \tau > 0$ die Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{-e^{tz}}{z + ae^{-\tau z}}$$

wie in Aufgabe (139.27). Berechne das Kurvenintegral von f über die in der folgenden Abbildung angegebene Kurve $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, wobei der Radius R so gewählt sei, daß es eine feste Zahl $\delta > 0$ gibt mit $|z - z_\star| \geq \delta$ für alle Punkte $z \in C$ und alle Nullstellen $z_\star$ des Nenners $z + ae^{-\tau z}$. (Die Kurve C hat also von allen Singularitäten von f einen festen Mindestabstand. Daß beliebig große Werte von R gewählt werden können, die diese Bedingung erfüllen, ergibt sich aus der in Aufgabe (139.27) ermittelten Lage der Singularitäten.)



(b) Benutze Teil (a), um die Laplace-Inverse der Funktion $X(z) := -1/(z + ae^{-\tau z})$ zu bestimmen.

(c) Was bedeutet das Ergebnis von Teil (b) für das Problem der Temperaturregelung einer Dusche, das in Aufgabe (117.42) betrachtet wurde? $\big($Vgl. auch Aufgabe (128.12).$\big)$

Aufgabe (139.30) Zeige, daß die Funktion $p(z) = z^3 + z^2 + 6i - 8$ im zweiten, dritten und vierten Quadranten jeweils eine Nullstelle hat.

Aufgabe (139.31) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme die Anzahl der Nullstellen der Funktion $p(z) := z^n - 3z + 1$ in der Kreisscheibe $|z| < 1$.

Aufgabe (139.32) Bestimme die Anzahl der Nullstellen der Funktion $p(z) := z^5 + z^3 + 5z^2 + 2$ in dem Kreisring $1 < |z| < 2$.

Aufgabe (139.33) Es sei $a \in \mathbb{C}$ eine Zahl mit $|a| > 4$. Zeige, daß die Funktion $\varphi(z) := 3z^8 + az^5 + 1$ innerhalb des Kreises $|z| < 1$ genau fünf verschiedene Nullstellen hat und daß diese allesamt einfach sind.

Aufgabe (139.34) Es sei $a \in \mathbb{C}$ eine Zahl mit $\operatorname{Re} a > 1$. Zeige, daß die Gleichung $\exp(-z) + z = a$ genau eine Lösung z mit $\operatorname{Re} z > 0$ besitzt und daß diese genau dann reell ist, wenn a reell ist.

Lösungen zu »Der Residuenkalkül« siehe Seite 610

Index

Im Index sind die Einträge zu allen drei Aufgabenbänden enthalten. Hervorgehoben sind diejenigen Begriffe, zu denen es Aufgaben im vorliegendem Band gibt.

A

Abelsche partielle Summation . . . . . (75.23), nach (138.43)
Abelscher Grenzwertsatz . . . . . nach (76.15)
Ablaufplan . . . . . (7.18)
Abrollen eines Kreises . . . . . (79.13), (99.1)
Abschätzung einer Norm durch eine andere . . . . . (68.5)
Abschneidefunktion . . . . . (89.34)
Absorptionsgesetze . . . . . (1.9), (3.13)
Absorptionskoeffizient . . . . . (33.16)
Abtasttheorem . . . . . (127.13)
Achill und Schildkröte . . . . . (75.4)
adjungierte Variablen . . . . . (71.61)
Äquivalenz von Normen . . . . . (68.4), (84.7)
Aizerman . . . . . (123.29)
Aktenbearbeitung . . . . . (136.10)
algebraisch abgeschlossen . . . . . (62.14)
algebraische Körpererweiterung . . . . . (62.12)
algebraischer Abschluß . . . . . (62.14)
Algorithmus von Leverrier . . . . . (56.34)
alternierende Matrix . . . . . (36.19)
Annäherungsrichtungen an Gleichgewichtslage . . (121.2)
Ansatz vom Typ der rechten Seite . . . . . (119.16)
Antikette . . . . . (7.14)
Antinomien . . . . . (3.21), (11.16)
Arbelos . . . . . (102.7)
Arithmetik auf Kegelschnitten . . . . . (70.23)
arithmetisches Mittel . . . . . (7.32), (67.11)
arithmetisch-geometrische Ungleichung . . . . . (23.16)
arithmetisch-geometrisches Mittel . . . . . (73.31)
Assoziativgesetze . . . . . (1.9), (3.13)
Asymptoten einer Hyperbel . . . . . (45.12)
Ausgleichsellipse . . . . . (98.37)
Ausgleichsparabel . . . . . (95.17)
Außenwinkelsatz . . . . . (38.3)
Auswertungsabbildung . . . . . (52.3)
Automorphismengruppe eines Gebiets . (137.14), (140.2), (140.3)
Automorphismengruppe eines Graphen . . . . . (31.10)
Axonometrie . . . . . (69.20)

B

babylonisches Wurzelziehen . . . . . (73.26)
Banachsches Streichholzproblem . . . . . (129.23)
Beil des Archimedes . . . . . (39.4)
Beltrami-Bedingung . . . . . (100.28)
Bernoullische Differentialgleichung . . . . (117.9), (118.27)
Bernstein . . . . . (9.3)
Bernstein-Polynome . . . . . nach (82.79)
beschränkte Funktion . . . . . (82.65)
beschränkte Schwankung . . . . . (82.77), (109.38)
beschränkte Variation . . . . . (82.77), (109.38)
Bevölkerung der USA . . . . . (124.6)
bielliptischer Transfer . . . . . (120.28)
Bierdose . . . . . (112.17)
biholomorph . . . . . (137.14)
Billardkugel . . . . . (120.64)
Binomialreihe . . . . . (76.13)
Bisektionsverfahren . . . . . (82.42)
Blandsche Regel . . . . . (71.51)
Bleistiftspitzen . . . . . (111.27)
Boxtopologie . . . . . (85.36)
Bratschensaite . . . . . (120.35)
Brechungsgesetz . . . . . (91.94)
Breitenkreis . . . . . (100.17)
Brinell . . . . . (42.18)
Brouwerscher Fixpunktsatz . . . . . (116.18/19), (136.14)
Brussels Sprouts . . . . . (88.16)

C

Cantor-Funktion . . . . . (105.13)
Cantor-Menge . . . . . (73.52)
Cantorsche Normalform einer Ordinalzahl . . . . . (15.21)
Cantorsches Diskontinuum . . . . . (73.52)
Cauchyfolge . . . . . (49.23)
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . . . . . (23.17)
Cauchysche Ungleichung . . . . . (138.34)
Cauchysches Verdichtungskriterium . . . . . (75.24)
Cayley-Rodrigues-Parameter . . . . . (72.18)
Cayleysche Formel . . . . . (72.18)

chordaler Abstand . . . (74.7)
Clairautsche Differentialgleichung . . . (117.13)
Clairautsche Relation . . . (100.17)
Collatz-Vermutung . . . (12.33)
Computertomographie . . . (33.16), (35.6)
Conway . . . (75.32)
cum hoc ergo propter hoc . . . (3.19)

D

Dakin-Verfahren . . . (71.69)
Dandelinsche Kugeln . . . (45.20)
Darboux-Dreibein . . . (100.34)
Dedekindscher Schnitt . . . (41.8)
Dehn-Invariante . . . (61.20)
descente infinie . . . (12.36)
Determinante . . . (31.12)
Determinantenteiler . . . (55.13)
Diagrammjagd . . . (51.15)
Diedergruppe . . . (72.2)
Dilworth . . . (7.16)
dimetrische Projektion . . . (69.21)
Direktbedarfsmatrix . . . (34.13)
direktes Produkt von Ringen . . . (24.8)
direktes Relationenprodukt . . . (5.12)
Dirichlet-Test . . . (82.71)
Dirichletsches Konvergenzkriterium . . . (75.23), nach (138.43)
Dirichletsches Schubfachprinzip . . . (10.6)
Diskretisierungsabbildung . . . (51.26)
Dispersion . . . (91.94)
Distributivgesetze . . . (1.9),(3.13)
Dodekaeder . . . (48.23)
Doppelfolge . . . (73.37)
Doppler-Effekt . . . (21.28)
Dreiecksungleichung nach unten . . . (81.1)
Drudenfuß . . . (42.4)
dualer Austauschschritt . . . (71.65)
duales Problem . . . (71.62)
Dualität bei p-Normen . . . (84.10)
Dualitätsprinzip . . . (70.20)
Dualkegel . . . (71.10)
Dubinssches Problem . . . (48.25)
Duschtemperatur . . . (117.42), (128.12), (139.28)
dyadische Darstellung . . . (73.51)

E

Eigenachsendrehung . . . (90.10-12), (120.60-63)
Einheitengruppe eines Monoids . . . (31.23)
Einheitskugeln . . . (84.3)
Einheitsmatrix . . . (24.4)
Einhüllende . . . (97.28), (117.13)
Einsteinsche Summationskonvention . . . (61.19)
Eisenstein-Kriterium . . . (26.22)
Elementardrehung . . . (72.22)
elementarsymmetrische Polynome . . . (25.17)
elliptischer Punkt . . . (100.4)
elliptisches Integral . . . (109.22)
endlich erzeugter Kegel . . . (71.12)
Energieellipsoid . . . (120.65)
Energiefunktional . . . (100.27)
entarteter Knoten . . . (122.3)
Enveloppe . . . (97.28), (99.5), (117.13)
Enveloppenbedingung . . . (97.28)
Erdumfang . . . (37.6)
Erfüllungsmenge einer Aussageform . . . (3.25)
erstes Integral . . . (123.13)
Eselsbrücke . . . (38.2)
Euler-Lagrange-Gleichung . . . (100.27)
Eulersche Differentialgleichung . . . (119.64)
Eulersche Kreiselgleichungen . . . (120.65)
Eudoxos . . . (41.5)
Euklidischer Algorithmus . . . (41.2)
Eulersche Polyederformel . . . (40.9)
Eulersche Substitutionen . . . (109.23)
Evaluationsabbildung . . . (52.8)
Evolute . . . (99.4)
Evolvente . . . (99.21)
exakte Differentialgleichung . . . (117.6)
exakte Sequenz . . . (51.15)
extensionale Gleichheit . . . (2.4)
extensionale Relation . . . (7.12)

F

Fahrradspur . . . (90.1)
Fallschirmspringer . . . (80.7), (117.23)
Fastmetrik . . . (81.20)
Feinheit einer Partition . . . (85.35)
Fibonacci-Folge . . . (50.7)
Fibonacci-Zahlen . . . (28.15), (50.7), (56.6), (76.8)
Fitting-Zerlegung . . . (54.13)
Fixpunkt . . . (4.2), (137.5), (138.13)
Fixpunkteigenschaft . . . (116.19)
Fixpunktsatz von Tarski . . . (9.2)
Flachpunkt . . . (100.37)
Fluchtgeschwindigkeit einer Rakete . . . (117.21)
Formel von Cayley . . . (72.18)
Formel von Pick . . . (59.4)
Fourier-Entwicklung . . . (84.29)
Frobenius . . . (55.15)
Frobenius-Norm . . . (65.14), (67.17)
Fünferlemma . . . (51.16)
Funktionsgrenzwert . . . (73.45)

G

Galilei-Transformation . . . (90.13)
Gammafunktion . . . (109.11)
ganzzahlige lineare Optimierung . . . (71.66)
Garnrolle . . . (120.38)
Gaußklammerfunktion . . . (73.1), (73.40)
Gefangenendilemma . . . (3.8)
gegenseitige Lage von Kugeln . . . (68.6)
Gemüsekeller . . . (126.15)
geodätische Krümmung . . . (100.32)
geodätische Kurve . . . (100.12), (100.16)
geodätische Torsion . . . (100.34)
geometrische Summenformel . . . (12.2)
geometrisches Mittel . . . (7.32)
gerades Polynom . . . (25.1)
Gerüchte . . . (136.8)
Gesamtbedarfsmatrix . . . (34.25)
Gesamtbedarfsvektor . . . (34.25)
Gibbssches Phänomen . . . (126.13)
Gitterpunkte . . . (59.4)
gleichgradig stetig . . . (82.53)
gleichmäßig gleichgradig stetig . . . (82.53)
gleichmäßig konvergent . . . vor (82.59)
gleichmäßig Lipschitz-stetig . . . (87.18)
Gomory-Verfahren . . . (71.67)
Gompertzsches Wachtsumsmodell . . . (117.28)
Gozinto-Graph . . . (34.13)
Gradientenfeld . . . (115.7)
Grenzwerte für Matrizen . . . (84.2)
Guldinsche Regeln . . . (112.15)

H

Hadamard-Produkt . . . (34.9)
halbeinfach . . . (62.17)
Halbmetrik . . . (81.21), (82.63)
Hamming-Abstand . . . (81.3), (86.22)
harmonische Funktion . . . (116.21), (138.36)
harmonisches Mittel . . . (7.32), (21.26), (67.11)
harmonisch-arithmetisches Mittel . . . (73.33)
harmonisch-geometrisches Mittel . . . (73.32)
Hauptsatz der Axonometrie . . . (69.20)
Hausdorff-Metrik . . . (81.9), (82.56), (87.22-26)
Hausdorff-Raum . . . (85.32)
Hebebühne . . . (120.45)
Heeresformation . . . (77.11), (120.66)
Heizungsregelung . . . (117.24)
Helikoid . . . (100.2), (100.6)
Hermite-Funktionen . . . (127.11/12)
Heronsche Formel . . . (102.1)
hexagramma mysticum . . . (70.18)
Hilberts Hotel . . . (11.11)
Hodge-Dualität . . . (64.8)
Hodge-Operator . . . (72.23)
Höhenlinien . . . (93.1), (93.2)
Höldersche Ungleichung . . . (84.8), (84.9)
Hohmann-Transfer . . . (120.26)
homogene Gleichung . . . (117.4)
homogenes Polynom . . . (25.15)
Homomorphiesatz . . . (51.23)
Horner-Schema . . . (26.1)
Horntorus . . . (97.10), (97.23)
Householder-Transformation . . . (67.22)
Hüllaxiome . . . (85.25)
Hyperbelkonstruktion . . . (45.9)
hyperbolische Ebene . . . (58.19)
hyperbolischer Punkt . . . (100.4)
hyperbolisches Paar . . . (58.19)

I

Ideal . . . (24.15)
idempotentes Element . . . (4.15)
Idempotenzgesetze . . . (1.9), (3.13)
Identität des Ptolemäus . . . (43.23), (43.24)
Ikosaeder . . . (48.24)
inhomogene Gleichung . . . (117.4)
Input-Output-Analyse nach Leontieff . . . (68.15)
instabiler Knoten . . . (122.2)
instabiler Strudel . . . (122.4)
instabiler Unterraum . . . (122.7)
intensionale Gleichheit . . . (2.4)
integrierender Faktor . . . (117.7)
Interpolationspolynom . . . (52.6)
Intervallschachtelungsprinzip . . . (83.2)
Invarianzprinzip von LaSalle . . . (123.30-33), (123.39)
Inversion am Kreis . . . (45.1), (137.10)
invertierbares Matrixpolynom . . . (55.10)
Involute . . . (99.21)
Involution, involutive Abbildung . . . (4.14), (30.21)
Isogonaleigenschaft von Kegelschnitten . . . (45.18,27/28)
Isometrie . . . (58.20)
isometrische Projektion . . . (69.21)

J

Jaccard-Metrik . . . (81.17)
Jensensche Ungleichung . . . (71.25)
Joukowsky-Profil . . . (137.15)

K

Kabeldurchhang . . . (80.8), (117.25)
Kaffee . . . (111.28), (117.39)
Kante eines Kegels . . . (71.9)
kartesisches Blatt . . . (96.15)
kartesisches Produkt von Abbildungen . . . (4.16)

Katenoid . . . . . (100.1), (100.6)
Kausalität eines Operators . . . . . (125.4-6)
Kaustik . . . . . (97.29)
Kavalierperspektive . . . . . (69.21)
Kette . . . . . (7.14)
Kettenlinie . . . . . (117.25)
Kirchhoffsche Regeln . . . . . (33.14)
Kissoide . . . . . (99.2)
Klothoide . . . . . (110.25), (112.3)
Knoten . . . . . (122.2)
Knotenregel . . . . . (33.14)
Körperpendel . . . . . (120.53)
kofinite Topologie . . . . . (85.11)
Kokern . . . . . (51.15), (52.14)
kollabierender Zirkel . . . . . (37.1)
kommensurabel . . . . . (41.4)
Kommutativgesetze . . . . . (1.9), (3.13)
kompakte Konvergenz . . . . . (84.43)
Konchoide . . . . . (99.3)
Konfidenzellipsoid . . . . . (134.2)
Kongruenzrelation . . . . . (6.6)
Konjugation . . . . . (31.3)
konjugierte Gruppenelemente . . . . . (31.3)
konjugierte Permutationen . . . . . (30.12)
Konjugiertenklasse . . . . . (31.3)
Konkurrenz zwischen Populationen . . . . . (124.4)
kontravariant . . . . . (61.19)
Kontsevich . . . . . (75.31)
Konvergenz nach Maß . . . . . (108.3)
Konvergenzstruktur . . . . . (85.38)
Koppelgetriebe . . . . . (120.43)
kovariant . . . . . (61.19)
kovariante Ableitung . . . . . (100.10)
Krasovskii . . . . . (123.26)
Kreiseln beim Simplexverfahren . . . . . (71.48)
Kreisviereck . . . . . (39.9)
Kreuzungsexperimente . . . . . (136.2-4)
Küchenkräuter . . . . . (6.2)
Kürzungsregeln (Ordinalzahlen) . . . . (15.8), (15.13), (15.17)
Kugeldruckprobe nach Brinell . . . . . (42.18)
Kugellager . . . . . (90.19)
Kugelvolumen . . . . . (102.13)
Kunstdiebstähle . . . . . (120.56)
Kuratowskische Hüllaxiome . . . . . (85.25)
Kurtosis einer Verteilung . . . . . (132.12)
Kurven mit konstanter Krümmung . . . . . (99.13)

L

Lagrangesches Interpolationspolynom . . . . . (52.6)
Landau-Symbole . . . . . (74.17)
Laplace-Operator . . . . . (115.4)
Laplace-Verteilung . . . . . (132.8)
LaSallesches Invarianzprinzip . . . . . (123.30-33), (123.39)
Lasso . . . . . (100.22)
Legendre-Transformation . . . . . (117.12)
Leibnizsche Ableitungsregel . . . . . (25.7), (89.32)
Lemniskate . . . . . (45.13)
Leontieff . . . . . (68.15)
Lernmodell von Guthrie . . . . . (136.1)
Levenstein-Distanz . . . . . (81.4)
Leverrier . . . . . (56.34)
Levi-Civita-Symbol . . . . . (61.19)
Lie-Ableitung . . . . . (115.3)
Lie-Klammer . . . . . (60.4), (97.26)
Lights out . . . . . (34.26), (51.22)
limes inferior . . . . . (11.19), (73.47)
limes superior . . . . . (11.19), (73.47)
Limeselement (Ordinalzahlen) . . . . . (13.9)
Linearplanimeter . . . . . (116.9)
Linksideal . . . . . (24.15)
Linksquotient . . . . . (24.16)
Linksradikal . . . . . (58.5)
Ljapunov-Gleichung . . . . . (123.24)
lokal wegzusammenhängend . . . . . (88.12)
lokal zusammenhängend . . . . . (88.12)
lokaler Fluß . . . . . (118.24)
LORAN . . . . . (45.10)
Loxodrome . . . . . (100.20)
Luchspopulation . . . . . (124.1)
Luftbildaufnahmen . . . . . (70.2)

M

magisches Quadrat . . . . . (33.7), (49.14)
Mandelbrot-Menge . . . . . (44.34)
Maschenregel . . . . . (33.14)
Matrixpolynom . . . . . (55.8)
Median . . . . . (71.4), (81.31)
Medikament in Blutkreislauf . . . . . (119.20)
Menelaos . . . . . (42.22)
Meridian . . . . . (100.17)
Meßbarkeit einer Funktion . . . . . (107.2-9)
Methode des variablen Gradienten . . . . . (123.28)
Methode von Aizerman . . . . . (123.29)
Mikusiński-Kalkül . . . . . (128.14-16)
Militärperspektive . . . . . (69.21)
Minkowskische Ungleichung . . . . . (84.8)
Mirsky . . . . . (7.16)
Mittelungsfunktion . . . . . (7.32)
Mittelwert . . . . . (71.4), (81.31)
Modell einer algebraischen Struktur . . . . . (8.3)
Möbiusband . . . . . (97.11)
Möndchen des Hippokrates . . . . . (102.6)

Momentanpol . . . . . (120.41)
Monodromie-Operator . . . . . (119.37), (119.38), (119.89)
Monopoly . . . . . (136.11)
Monotoniegesetze (Mengenoperationen) . . . . . (1.13)
Monotoniegesetze (Ordinalzahlen)((15.10), (15.15), (15.18)
Morley-Dreieck . . . . . (43.20)
Münzenrollen . . . . . (79.14)
multinomische Formel . . . . . (22.27)
multiplizierbare Familie formaler Potenzreihen . . . . . (28.2)

N

Nachfolgerelement (Ordinalzahlen) . . . . . (13.9)
Nebenklasse . . . . . (31.15)
Neilsche Parabel . . . . . (99.16)
Netto-Kriterium . . . . . (26.23)
Neunerlemma . . . . . (51.17)
Newton-Knoten . . . . . (70.14)
Newtonsches Abkühlungsgesetz . . . . . (134.9)
nilpotent . . . . . (34.24), (54.8), (60.8), (62.17)
Nilpotenzgrad . . . . . (24.8), (34.24), (51.12), (54.8)
NIM (Zweipersonenspiel) . . . . . (49.18)
Normalform eines Matrixpolynoms . . . . . (55.11)
Normalkrümmung . . . . . (100.32)
Normen auf Produkträumen . . . . . (84.6)
Normen auf Quotientenräumen . . . . . (84.5)
Nullmatrix . . . . . (24.4)

O

Operatornormen . . . . . (68.19)
optische Eigenschaft von Kegelschnitten . . . . . (45.15-17)
Ordnung einer Permutation . . . . . (30.11)
Ordnung eines Gruppenelements . . . . . (31.17)
orientierter Flächeninhalt . . . . . (59.3)
Orthodrome . . . . . (100.20)
orthogonale Gruppe . . . . . (51.1), (97.16)
orthogonale Trajektorien . . . . . (117.26)

P

Palindrom . . . . . (4.2)
Pantograph . . . . . (42.17)
Papierstreifen . . . . . (43.19)
Parabolspiegel . . . . . (45.23)
paralleles Vektorfeld . . . . . (100.10)
Parallelstreckung . . . . . (69.15)
Parasitismus . . . . . (124.3)
Parsevalsche Gleichung . . . . . (84.29)
partielle Ableitung . . . . . (25.14), (63.2)
partielle Summation . . . . . (75.23), nach (138.43)
Partitionenverband . . . . . (8.12)
Peaucellier . . . . . (45.2)
Pentagramm . . . . . (42.4)
Permutationsmatrix . . . . . (34.29)
Pfaffsche Matrix . . . . . (36.20)
Pfaffsches Aggregat . . . . . (36.20)
Pflasterungen der Ebene . . . . . (40.9)
Pick . . . . . (59.4)
Pivotelement . . . . . (71.39)
Pivotspalte . . . . . (71.39)
Pivotzeile . . . . . (71.39)
Planimeter . . . . . (116.9)
platonische Kïrper . . . . . (40.9)
Polarkoordinaten . . . . . (97.14)
Polarplanimeter . . . . . (116.9)
Polarwinkel . . . . . (96.4), (99.25), (114.7)
Polyederformel . . . . . (40.9)
Polynominterpolation . . . . . (52.6)
pons asinorum . . . . . (38.2)
Potentialfunktion . . . . . (117.6)
Potenzsummen . . . . . (25.19), (102.14)
Primärbedarfsvektor . . . . . (34.25)
primales Problem . . . . . (71.62)
primitives Polynom . . . . . (26.20)
Primkörper . . . . . 52.11)
Problem des Chevalier de Méré . . . . . (129.19)
Produktordnung . . . . . (7.7)
Professor S. . . . (12.20), (91.73), (92.16), (111.28),(117.17), (117.42), (129.6), (129.33), (136.8)
projektive Basis . . . . . (70.8)
Pseudo-Grenzwert . . . . . (73.21)
Pseudo-Inverse . . . . . (67.21), (67.22)
pseudo-konvergent . . . . . (73.21)
Ptolemäische Ungleichung . . . . . (42.14)
Ptolemäus . . . . . (42.14), (43.23), (43.24)
punktetrennend . . . . . (52.1)
punktweise konvergent . . . . . vor (82.59)
Pythagoräisches Zahlentripel . . . . . (34.18)

Q

quadratische Form . . . . . (58.15)
Quaternionen . . . . . (72.17)

R

Radon-Zerlegung . . . . . (71.2)
Raumwinkel . . . . . (116.13)
Rechtsideal . . . . . (24.15)
Rechtsquotient . . . . . (24.16)
Rechtsradikal . . . . . (58.5)
reductio ad absurdum . . . . . (3.17)
Reduktion der Ordnung . . . . . (119.30)
Reflexionsgesetz . . . . . (91.94)
reflexive Hülle . . . . . (5.14)
Regel von Bland . . . . . (71.51)
Regelfläche . . . . . (100.36)

regelmäßige Polyeder . . . (40.9)
Regeln von de Morgan . . . (1.12), (3.13)
Regenbogen . . . (91.94)
Rendezvous-Manöver . . . (120.29)
Riccatische Differentialgleichung . . . (117.10), (117.41), (118.27)
Riemannsche Fläche . . . (140.9)
Riemannsche Zahlensphäre . . . (74.7)
Roboterarm . . . (120.52)
Romeo und Julia . . . (120.2)
Rosenblatt-Bedingung . . . (118.13)
Rotationsfeld . . . (115.7)
Rotationsfläche . . . (100.2), (100.17)
Rücktransport . . . (63.1), (68.6)

S

Salinon . . . (102.7)
Sattelpunkt . . . (122.2)
Satz des Eudoxos . . . (41.5)
Satz des Menelaos . . . (42.22)
Satz des Ptolemäus . . . (43.24)
Satz des Pythagoras . . . (101.4)
Satz von Abel . . . nach (76.15)
Satz von Ceva . . . (42.23)
Satz von Desargues . . . (70.17)
Satz von Dilworth . . . (7.16)
Satz von Euler . . . (100.31)
Satz von Gauß . . . (116.5)
Satz von Green . . . (116.1), (116.7)
Satz von Hamilton und Cayley . . . (55.8)
Satz von Helly . . . (71.3)
Satz von Krasovskii . . . (123.26)
Satz von L'Huilier . . . (69.20)
Satz von Mertens . . . (75.28)
Satz von Mirsky . . . (7.16)
Satz von Morley . . . (43.20)
Satz von Pappos . . . (70.16)
Satz von Pascal . . . (70.18)
Satz von Perron . . . (116.20), (136.14)
Satz von Pohlke . . . (69.21)
Satz von Radon . . . (71.2)
Satz von Schröder und Bernstein . . . (9.3)
Satz von Shipovnik-Ponedelnik . . . (138.22)
Satz von Stokes . . . (116.7)
Satz von Tarski . . . (9.2)
Satz von Titchmarsh . . . (125.12)
Satz von Witt . . . (58.22)
Schaltkreis . . . (119.18), (119.63)
Schattenpreise . . . (71.61)
Schatzkarte . . . (44.14)
Scherung . . . (51.2), (69.15)
Schiefe einer Verteilung . . . (132.12)
Schießverfahren . . . (118.23)
Schiffsnavigation . . . (45.10)
Schlangenlemma . . . (51.18)
Schmiegkugel . . . (99.10)
Schneehasenpopulation . . . (124.1)
Schröder . . . (9.3)
Schubfachprinzip . . . (10.6), (10.11)
Schubkurbel . . . (120.42)
Schwarzsche Ableitungsregel . . . (25.14)
Sehnenviereck . . . (39.9)
Separatrix . . . (123.16), (123.20), (123.37)
Shannonsches Abtasttheorem . . . (127.13)
shoelace formula . . . (59.3)
Sichtbarkeitsmenge . . . (37.3)
sieben Zwerge . . . (56.14)
Signum-Funktion . . . (82.5)
Simplexverfahren . . . (71.38)
Simplex-Tableau . . . (71.39)
Simpsonsches Paradoxon . . . (21.12)
Spektralradius . . . (84.23), (84.24), (84.25)
Spektrum . . . (56.13)
Sperner-Färbung . . . (116.17)
Spernersches Lemma . . . (116.17)
spezielle orthogonale Gruppe . . . (51.1), (97.16)
Spiegelung am Kreis . . . (137.10)
spitzer Kegel . . . (71.9)
stabiler Knoten . . . (122.2)
stabiler Strudel . . . (122.4)
stabiler Unterraum . . . (122.7)
Stammbruch . . . (21.11)
Standarddarstellung eines Tensorprodukts . . . (61.4)
stereographische Projektion . . . (11.20), (46.13), (81.12), (97.14)
stetig konvergent . . . vor (82.59)
stetige Abhängigkeit (Eigenwerte, Eigenvektoren) . . (96.19)
stetige Abhängigkeit (Nullstellen) . . . (96.18)
stetige Differentiierbarkeit . . . (91.13)
Stetigkeitsmodul . . . (82.27)
Stiefel-Mannigfaltigkeiten . . . (97.15)
stochastische Matrizen . . . (136.13)
Störungsmethoden beim Simplexverfahren . . . (71.54)
Streckung . . . (69.18)
strikt konvex . . . (71.4)
Strudel . . . (122.4)
Stufe eines Tensors . . . (61.19)
Submultiplikativität . . . (84.12)
Sudoku . . . (3.1)
Summierbarkeit . . . (84.26)
Superpositionsprinzip . . . (117.38)
Sylvestersches Problem . . . (38.8)

Symbiose . . . . . (124.2)
symmetrische Differenz . . . . . (1.17)
symmetrisches Polynom . . . . . (25.16)

T

Tangentenviereck . . . . . (39.9)
Tangentialabbildung . . . . . (94.24)
Tarski . . . . . (9.2)
Taylor-Entwicklung . . . . . (26.1), (63.2)
Teilerverband . . . . . (8.12)
Teilmengenverband . . . . . (8.12)
Tensorkontraktion . . . . . (61.19)
Tensorverjüngung . . . . . (61.19)
tertium non datur . . . . . (3.17)
Tetraedervolumen . . . . . (102.15)
Tietzescher Fortsetzungssatz . . . . . (82.76)
Tomographie . . . . . (33.16), (35.6)
topologische Gruppe . . . . . (86.23)
Torus . . . . . (97.9), (100.2)
Totalvariation . . . . . (82.77)
Trägheitsellipsoid . . . . . (120.65)
Trägheitsmomente(111.3), (112.10-12), (112.19), (112.20)
Trägheitsmomententensor . . . . (112.9), (112.10), (112.14), (112.21), (112.22)
transitive Hülle . . . . . (5.14)
Translationsinvarianz eines Operators . . . . . (125.4-6)
triadische Darstellung . . . . . (73.52)
Tschebyscheff-Polynome . . . . . (79.12)
Tschirnhaus-Transformation . . . . . (44.29)

U

überabzählbar . . . . . (11.10)
Überhang eines Plattenaufbaus . . . . . (75.3), (112.16)
Überlappungsfreiheit . . . . . (85.20)
Ultrametrik . . . . . (81.19)
Umlaufzahl . . . . . (99.25), (99.26), (114.8), (138.39)
unendlicher Abstieg . . . . . (12.36)
unendlicher Regreß . . . . . (12.36)
ungerades Polynom . . . . . (25.1)

V

Vandermondesche Identität . . . . . (29.18)
Variation der Konstanten . . . . . (117.4)
Varignon-Parallelogramm . . . . . (59.2)
Veblen-Young-Bedingung . . . . . (70.5)
Vektorraumkomplement . . . . . (50.5)
verallgemeinerte Assoziativgesetze . . . (1.19), (8.8), (12.32)
verallgemeinerte Binomialkoeffizienten . . . . . (76.12)
verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Gleichungen (138.10)
verallgemeinerte Eulersche Differentialgleichung (119.68)
verallgemeinertes Schubfachprinzip . . . . . (10.11)
Verband . . . . . (8.11)
Verbandsgesetze . . . . . (1.9), (3.13)
Verhältnis . . . . . (41.5)
Verschiebespiel . . . . . (30.23)
Viererlemma . . . . . (51.16)
Vietoris-Topologie . . . . . (85.16), (87.21), (87.27)
Vinograd-System . . . . . (123.11)
vis-viva-Gleichung . . . . . (120.25)
Vollständigkeit eines Maßraums . . . . . (104.3)
Volterra-Reihe . . . . . (118.29)

W

Wanderer . . . . . (82.49)
Wasserstein-Distanz . . . . . (81.24), (81.25)
Wechselvariablen . . . . . (71.51)
Wechselwegnahme . . . . . (41.2)
Weierstraß-Quartik . . . . . (70.14)
Weierstraßscher Approximationssatz . . . . . nach (82.79)
Weierstraßscher Majorantentest . . . . . (82.69)
Windmühle . . . . . (40.6)
Windungszahl . . . . . (99.25), (99.26), (114.8), (138.39)
Witt . . . . . (58.22)
Wittsche Kürzungsregel . . . . . (58.23)
Wölbung einer Verteilung . . . . . (132.12)
wohltemperierte Stimmung . . . . . (77.19)
Würfelbeschriftung . . . . . (65.15)
Wurzelfunktion . . . . . (140.9)

Z

Zariski-Topologie . . . . . (85.10)
Zentralfeld . . . . . (115.10), (120.25)
zentrische Streckung . . . . . (69.18)
Zentrum . . . . . (122.4)
Zentrum einer Gruppe . . . . . (31.11)
Zerfällungskörper . . . . . (62.10), (62.11)
Zerlegungsgleichheit von Polyedern . . . . . (61.20)
Ziege . . . . . (102.9)
Zustandsänderungsoperator . . . . . (118.24)
Zweiphasenmethode . . . . . (71.56)
zusammenklappender Zirkel . . . . . (37.1)
Zyklenstruktur . . . . . (30.12)
Zykloide . . . . . (99.1)

Karlheinz Spindler

Höhere Mathematik – Ein Begleiter durch das Studium

1. Aufl. 2010, 893 Seiten, 22 cm × 28,5 cm, gebunden,
über 600 Abbildungen, wo sinnvoll vierfarbig,
ISBN 978-3-8085-5550-7
Bestell-Nr. 55507

Dieses einzigartige Buch, das mit der Einführung des Mengenbegriffs beginnt und mit dem Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes endet, spannt einen riesigen Bogen über verschiedene grundlegende mathematische Disziplinen: Lineare und multilineare Algebra, Topologie, Analysis, Differentialgleichungen, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Funktionentheorie und vieles mehr.

Dabei ist das Ziel nicht, eine möglichst große Stoffmenge enzyklopädisch abzuhandeln, sondern ein solides und tragfähiges Grundlagenwissen in mathematischen Schlüsseldisziplinen zu vermitteln, auf dem eine spätere Einarbeitung in mathematische Spezialfächer und Anwendungsgebiete problemlos aufbauen kann. Es wird gleichermaßen Wert auf die Förderung begrifflichen Verständnisses und auf die Vermittlung von Rechentechniken gelegt. Allgegenwärtige algebraische, ordnungstheoretische und topologische Strukturen werden systematisch herausgearbeitet, und numerische Aspekte sind durchgängig in die Darstellung integriert. Auch der physikalische Gehalt mathematischer Begriffsbildungen und Sätze wird erläutert.

Propädeutisches Material (mengentheoretische und aussagenlogische Grundlagen, Zahlbereiche, elementare Kombinatorik, Elementargeometrie) ist in separate Kapitel ausgegliedert. Der Schulstoff wird behutsam, aber von einer höheren Warte aus rekapituliert, was den Übergang von der Schule zur Hochschule erleichtert und anhand bekannten Materials an die Strenge mathematischer Begriffsbildungen gewöhnt. Auf dieser Grundlage werden dann die Lineare Algebra und die Analysis unter Berücksichtigung sowohl arithmetischer als auch geometrischer Aspekte entwickelt. Die Kraft dieser Theorien wird anschließend in diversen Kapiteln über speziellere mathematische Disziplinen entfaltet. Das Buch führt frühzeitig an abstrakte Sichtweisen und weitgehende Verallgemeinerungen heran, wenn dadurch das begriffliche Verständnis erleichtert wird (frühe Einführung topologischer Grundbegriffe, weitgehend koordinatenfreie Behandlung von Funktionen in mehreren Variablen, Bereitstellung differentialgeometrischer und maßtheoretischer Grundlagen).

Das Buch macht keinerlei Kompromisse hinsichtlich mathematischer Strenge; sämtliche Aussagen werden bewiesen, und der Verfasser scheut sich auch nicht, „unbequeme“ Begriffe einzuführen und „schwierige“ Sätze zu behandeln. Durch seinen didaktisch geschickten Aufbau ist das Buch dennoch gut lesbar. Viele motivierende Erläuterungen, durchgerechnete Beispiele sowie aussagekräftige Abbildungen, Diagramme, Tabellen und eingerahmte Formeln erleichtern das Verständnis. Das Buch eignet sich daher auch gut zum Selbststudium und als weiterführende Lektüre, die über die Grundvorlesungen weit hinausgeht und daher nicht nach einem oder zwei Semestern ausgedient hat, sondern als Begleiter durch das gesamte Studium dienen kann. Dem trägt die Ausstattung des Buches mit festem Einband und stabiler Bindung Rechnung.

Karlheinz Spindler

Höhere Mathematik – Aufgaben und Lösungen

Die Aufgabensammlung enthält insgesamt über 3000 Aufgaben und ist bis auf wenige Verweise unabhängig vom zugehörigen Lehrbuch nutzbar.

Die Aufgabenstellungen reichen von einfachen Fragen zur Gewöhnung an neue Begriffe und Routineaufgaben zum Einüben und Einschleifen von Rechentechniken über anspruchsvollere Aufgaben, in denen Beispiele und Gegenbeispiele gesucht, Feinheiten von Begriffsbildungen und Aussagen ausgelotet und weiterführende Aspekte erkundet werden, bis hin zu wirklichen Herausforderungen, denen sich zu stellen einige Ausdauer erfordert.

Durch die ausführlichen Lösungen sind die Bände auch zum Selbststudium geeignet.

Band 1

1. Aufl. 2021, 574 Seiten, 21 cm × 28,5 cm, gebunden
ISBN 978-3 8085-5952-9
Bestell-Nr. 59529

1149 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zu den Themen:

- Mengentheoretische Grundlagen
- Grundlegende Strukturen
- Kardinalzahlen
- Ordinalzahlen
- Zahlentheoretische Grundlagen
- Arithmetische Grundlagen
- Algebraische Grundlagen
- Kombinatorische Grundlagen
- Lineare Gleichungssysteme
- Geometrische Grundlagen
- Reelle und komplexe Zahlen
- Geometrie und Vektorrechnung
- Lineare Algebra
- Lineare Abbildungen und Matrizen
- Multilineare Abbildungen.

Band 2

1. Aufl. 2021, 582 Seiten, 21 cm × 28,5 cm, gebunden
ISBN 978-3 8085-5954-3
Bestell-Nr. 59543

1029 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zu den Themen:

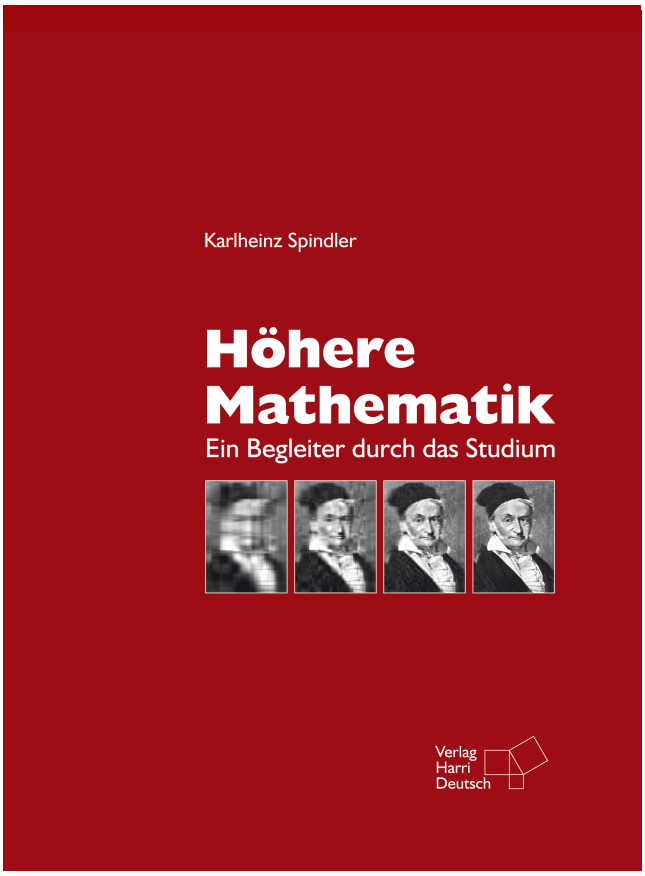
- Multilineare Algebra
- Metrische Vektorräume
- Geometrie in Vektorräumen
- Rechnen mit Grenzwerten
- Elementare Funktionen
- Metrische Strukturen
- Topologische Strukturen
- Differentialrechnung in einer Variablen
- Differentialrechnung in Banachräumen.

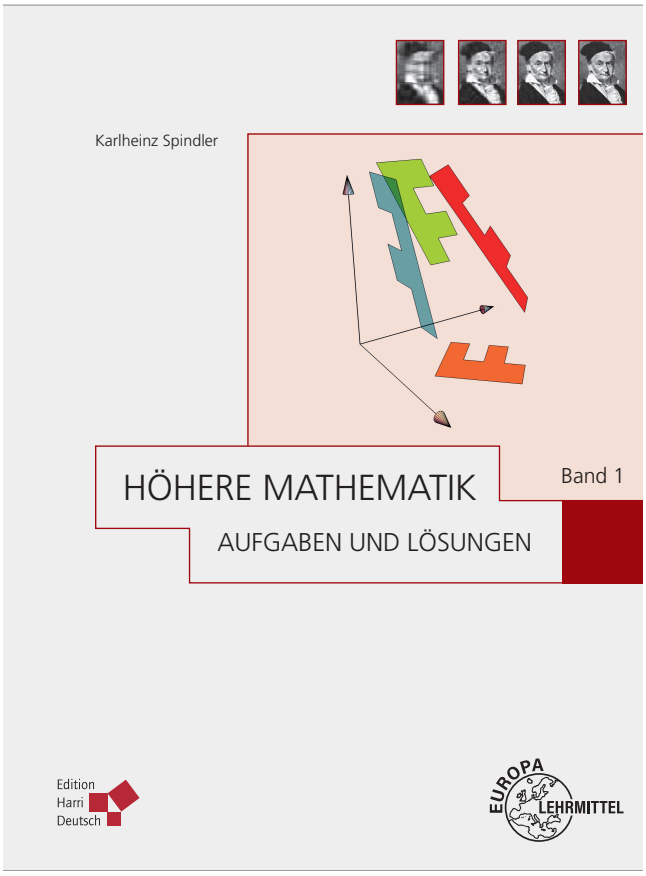
Band 3

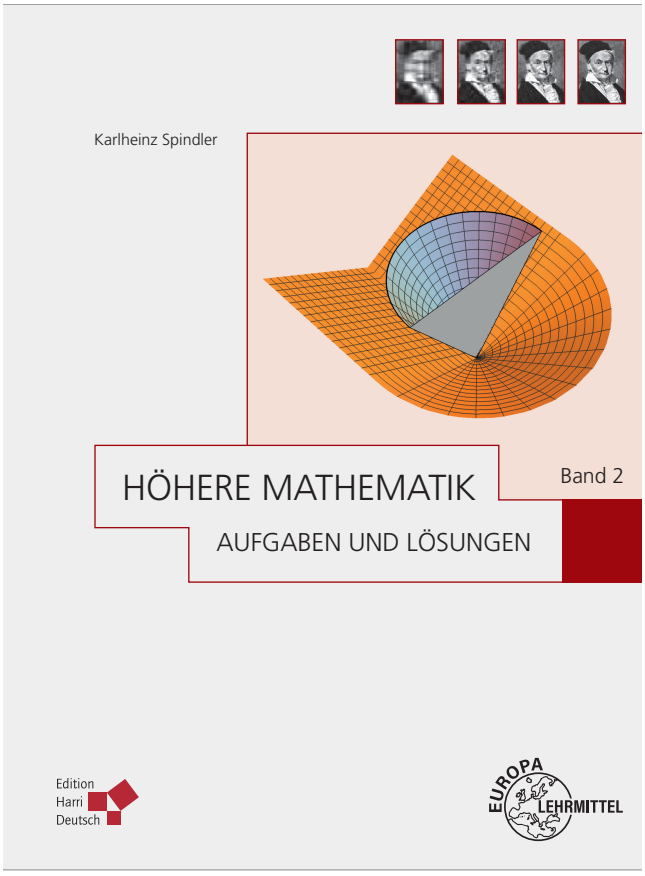
1. Aufl. 2021, 646 Seiten, 21 cm × 28,5 cm, gebunden
ISBN 978-3 8085-5956-7
Bestell-Nr. 59567

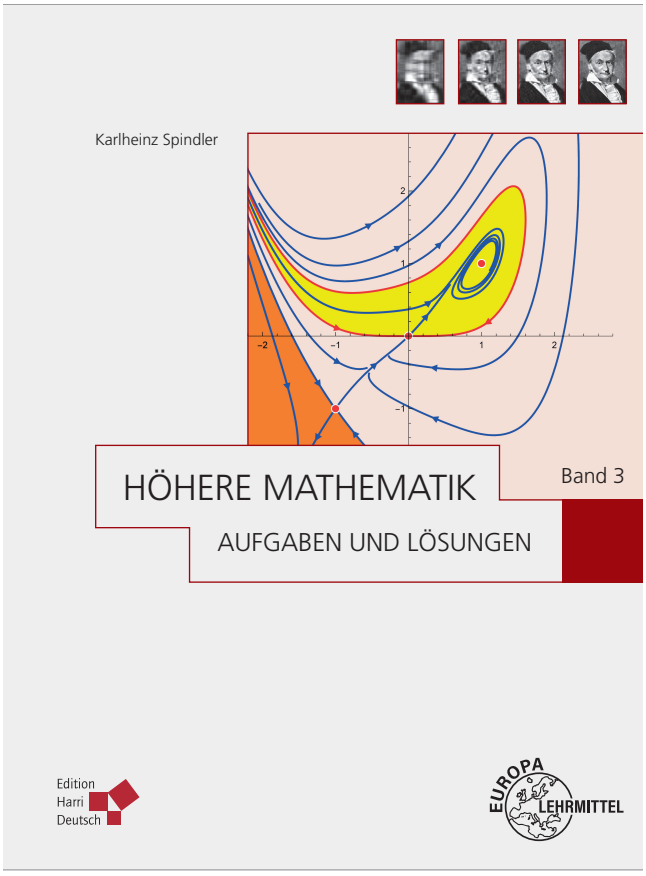
1017 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zu den Themen:

- Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten
- Inhaltsbestimmung von Mengen
- Begriff des Integrals
- Berechnung von Integralen
- Integration auf Mannigfaltigkeiten
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Dynamische Systeme
- Integraltransformationen
- Grundlagen der Stochastik
- Anwendung stochastischer Methoden
- Funktionentheorie.


Karlheinz Spindler
Höhere Mathematik
Ein Begleiter durch das Studium
Verlag Harri Deutsch


Karlheinz Spindler
HÖHERE MATHEMATIK
Band 1
AUFGABEN UND LÖSUNGEN
Edition Harri Deutsch
EUROPA LEHRMITTEL


Karlheinz Spindler
HÖHERE MATHEMATIK
Band 2
AUFGABEN UND LÖSUNGEN
Edition Harri Deutsch
EUROPA LEHRMITTEL


Karlheinz Spindler
HÖHERE MATHEMATIK
Band 3
AUFGABEN UND LÖSUNGEN
Edition Harri Deutsch
EUROPA LEHRMITTEL