EUROPA LEHRMITTEL

Mathematik für die Fachhochschulreife

Lösungen

Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung

1. Auflage

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85226

Autoren des Buches „Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Gerhard Mack	Stuttgart
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Stuttgart, Ulm

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: YellowHand GbR, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Das vorliegende Buch wurde auf der Grundlage der neuen amtlichen Rechtschreibregeln erstellt.

1. Auflage 2007
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8522-1

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2007 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
http://www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Ulm; Ausführung: Michael Maria Kappenstein, 60594 Frankfurt/Main

Satz, Grafik und Bildbearbeitung: YellowHand GbR, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Druck: Media-Print Informationstechnologie, 33100 Paderborn

Vorwort zur 1. Auflage

Die „Methodischen Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung" sind ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband. Damit finden Fachbuch und Formelsammlung eine wertvolle Ergänzung, vor allem auch für Phasen des selbstorganisierten Lernens.

Für die schnelle, gezielte Orientierung im Buch sind jeweils Kapitel, Teilkapitel sowie spaltenweise die Aufgabennummern angegeben.

Um ein Maximum an Übersicht bei der Benutzung zu gewährleisten, wird eine klare Gliederung bei der Darstellung der Lösungswege verwendet und z. B. auch das Ende jeder Aufgabe durch einen Trennstrich markiert.

Für zeichnerische Lösungen von Aufgaben, die durch Selbsttätigkeit der Schüler gelöst werden sollen, sind jeweils entsprechend sorgfältig aufbereitete Darstellungen z. B. von

⇒ räumlichen Projektionen,
⇒ Vektordarstellungen oder
⇒ Schaubilder von Funktionen vorhanden.

Entsprechend den Hauptabschnitten des Lehrbuchs enthält das Lösungsbuch Lösungswege zu den Kapiteln

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Vektorrechnung**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Aufgaben aus der Praxis**
- **Grafikfähiger Taschenrechner**
- **Selbstorganisiertes Lernen**
  Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben

Ihre Meinung interessiert uns!
Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.
Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: **info@europa-lehrmittel.de**

Die Verfasser

Herbst 2007

Arbeiten mit dem Buch „Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung“

Wie arbeite ich mit dem Buch?

Aufbau der methodischen Lösungswege:

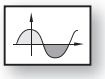
In der obersten Zeile finden Sie das **Kapitel**, zu dem die Aufgaben der Seite gehören.

1 Algebraische Grundlagen

Hier finden Sie die Angabe der **Teilkapitel** für die folgenden Lösungen.

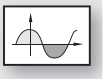
1.7 Funktionen und Gleichungssysteme

Werden Bilder aus dem Lehrbuch für die Lösung einer Aufgabe benötigt, findet man in der **Aufgabenspalte** ein entsprechendes Icon:

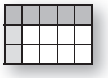


Seite **Aufgabennummer**

18.1



Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 1 auf der Seite 18 im Lehrbuch.

Ein Hinweis auf eine Tabelle  im Lehrbuch zeigt Wege zur Aufgabenlösung auf.

21.1

Tabelle 1

Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 1 auf der Seite 21 mit der **Tabelle 1** im Lehrbuch.

Benötigt man eine Formel zur Lösung einer Aufgabe, findet man den entsprechenden Formelhinweis $A = \pi r^2$ mit der Seitenangabe.

25.1

$A = \pi r^2$

Seite 22

Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 1 auf der Seite 25 im Lehrbuch.

Mit der Formel von **Seite 22** im Lehrbuch, $y = a \cdot x^2 + y_S$ zur Lösung der Aufgabe.

Inhaltsverzeichnis

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Term ... 7
1.2 Gleichung ... 7
1.3 Definitionsmenge ... 7
1.6 Logarithmengesetze ... 8
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 10
1.7 Funktionen und Gleichungssysteme ... 14
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 15
1.7.4 Quadratische Funktionen ... 17
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 18
1.7.5.1 Lösungsverfahren für LGS ... 20
1.7.5.3 Grafische Lösung eines LGS ... 20
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 21

2 Geometrische Grundlagen

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 26
2.3 Volumenberechnung ... 29
2.3.1 Körper gleicher Querschnittsfläche ... 29
2.3.2 Spitze Körper ... 29
2.3.3 Abgestumpfte Körper ... 29
2.3.4 Kugelförmige Körper ... 30
2.4 Trigonometrische Beziehungen ... 30
2.4.3 Einheitskreis ... 30
2.4.5 Winkelberechnung ... 31
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 31

3 Vektorrechnung

3.1 Vektorbegriff ... 34
3.2 Darstellung von Vektoren im Raum ... 34
3.3.1 Vektoraddition ... 35
3.3.2 Verbindungsvektor, Vektorsubtraktion ... 35
3.3.3 Skalare Multiplikation, S-Multiplikation ... 37
3.3.4 Einheitsvektor ... 38
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 39
3.3.5 Strecke, Mittelpunkt ... 41
3.3.6 Skalarprodukt ... 42
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 44
3.4 Lineare Abhängigkeit von Vektoren ... 47
3.4.1 Zwei Vektoren im Raum ... 47
3.4.2 Drei Vektoren im Raum ... 47
3.4.3 Vier Vektoren im Raum ... 48
3.5 Orthogonale Projektion ... 49
3.6 Lotvektoren ... 50
3.6.2 Lotvektoren einer Ebene ... 50
3.7 Vektorprodukt ... 50
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 52
3.8 Vektorgleichung einer Geraden im Raum ... 56
3.9 Orthogonale Projektion von Punkten und Geraden auf eine Koordinatenebene ... 60
3.10 Gegenseitige Lage von Geraden ... 63
3.11 Abstandsberechnungen ... 69
3.11.1 Abstand Punkt–Gerade und Lotfußpunkt ... 69
3.11.2 Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden ... 70
3.11.3 Abstand zwischen parallelen Geraden ... 71
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 73
3.12 Ebenengleichung ... 79
3.12.2 Vektorielle Dreipunkteform der Ebene ... 80
3.13 Ebene–Punkt ... 81
3.13.2 Abstand eines Punktes P zur Ebene E ... 81
3.14 Ebene–Gerade ... 81
3.14.3 Gerade schneidet Ebene ... 81
3.15 Lagebezeichnung von Ebenen ... 84
3.15.3 Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen ... 84
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 84

4 Analysis

4.1 Potenzfunktionen ... 90
4.2 Wurzelfunktionen ... 90
4.3 Ganzrationale Funktionen höheren Grades ... 90
4.3.1 Funktion dritten Grades ... 90
4.3.2 Funktion vierten Grades ... 91
4.3.3.2 Nullstellenberechnung mit dem Nullprodukt ... 92
4.3.3.3 Nullstellenberechnung durch Abspalten von Linearfaktoren ... 92
4.3.4 Arten von Nullstellen ... 94
4.4 Gebrochenrationale Funktionen ... 94
4.4.4 Grenzwerte ... 94
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 95
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 101
4.7 Trigonometrische Funktionen ... 102
4.7.1 Sinusfunktion und Kosinusfunktion ... 102
4.7.4 Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion ... 102
4.8 Eigenschaften von Funktionen ... 103
4.8.1 Symmetrie bei Funktionen ... 103
4.8.2 Umkehrfunktionen ... 103
4.8.4 Stetigkeit von Funktionen ... 104
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 105

5 Differenzialrechnung

5.1 Erste Ableitung f'(x) ... 106
5.2 Differenzialquotient ... 106
5.3 Ableitungsregeln ... 106
5.4 Höhere Ableitungen ... 108
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 109
5.5 Newtonsches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren) ... 111
5.6 Extremwertberechnungen ... 113
5.6.2 Randextremwerte ... 114
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 116
5.7 Kurvendiskussion ... 118
5.7.1 Differenzierbarkeit von Funktionen ... 118

5.7.4.1 Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt ... 119
5.7.4.2 Tangenten parallel zu einer Geraden ... 120
5.7.4.4 Zusammenfassung Tangentenberechnung ... 122
5.7.5.3 Exponentialfunktion ... 125
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 126

6 Integralrechnung

6.1 Einführung in die Integralrechnung ... 130
6.2 Integrationsregeln ... 130
6.2.2 Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen ... 130
6.3 Das bestimmte Integral ... 130
6.3.2 „Krummlinig“ begrenzte Fläche ... 130
6.4 Berechnung von Flächeninhalten ... 130
6.4.2 Flächen für Schaubilder mit Nullstellen ... 130
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 131
6.5 Flächenberechnung zwischen Schaubildern ... 132
6.5.1 Flächenberechnung im Intervall ... 132
6.5.4 Musteraufgabe zu gelifteten Schaubildern ... 134
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 134
6.6 Numerische Integration ... 142
6.6.3 Flächenberechnung mit Näherungsverfahren ... 142
6.7 Volumenberechnung ... 144
6.7.1 Rotation um die x-Achse ... 144
6.7.2 Rotation um die y-Achse ... 145
6.7.3 Zusammenfassung von Rotationskörpern ... 147
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 147
6.8 Anwendungen der Integralrechnung ... 149
6.8.2 Mechanische Arbeit ... 149

7 Komplexe Rechnung

7.1 Darstellung komplexer Zahlen ... 150
7.3 Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen ... 150
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! ... 150

9 Aufgaben aus der Praxis und Projektaufgaben

9.2 Optimierung einer Oberfläche ... 155
9.3 Optimierung einer Fläche ... 157
9.4 Flächenmoment ... 158
9.5 Sammellinse einer Kamera ... 161
9.6 Abkühlvorgang ... 162
9.7 Entladevorgang ... 164
9.8 Wintergarten ... 165
9.9 Bauvorhaben Kirche ... 166
9.10 Aushub Freibad ... 167
9.11 Berechnung von elektrischer Arbeit und Leistung ... 168
9.12 Sinusförmige Wechselgrößen ... 169
9.13 Effektivwertberechnung ... 169

11 Grafikfähiger Taschenrechner GTR

11.1 Grafikfähiger Taschenrechner GTR CASIO ... 170
11.1.4 Flächenintegrale mit dem GTR berechnen ... 170
11.1.7 Komplexe Rechnung mit dem GTR ... 171
11.1.7.2 Rechnen mit komplexen Zahlen ... 171
11.1.8 Programmerstellung mit dem GTR ... 171
11.2 Grafikfähiger Taschenrechner Texas Instruments ... 172
11.2.3.2 Werte eines Schaubildes grafisch ermitteln ... 172
11.2.3.4 Flächenintegrale berechnen ... 172
11.2.4 Tangenten an K_f ... 173
11.2.5 Lösung linearer Gleichungssysteme (LGS) mit dem GTR ... 174
11.2.6 Komplexe Rechnung mit dem TI-84 Plus ... 175

12 Selbst organisiertes Lernen Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben

12.1 Übungsaufgaben ... 177
12.1.1 Algebraische Grundlagen ... 177
12.1.2 Quadratische Funktionen ... 182
12.1.3 Geometrische Grundlagen ... 184
12.1.4 Vektoren 1 und Vektoren 2 ... 190
Vektoren im $\mathbb{R}^2$ (Ebene) ... 197
Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (Raum) ... 201
Ebene–Punkt (Abschnitt 1) ... 204
Ebene–Gerade (Abschnitt 2) ... 205
Ebene–Ebene (Abschnitt 3) ... 206
12.1.5 Nullstellen ... 207
12.1.6 Exponentialfunktionen ... 213
12.1.7 Trigonometrische Funktionen ... 217
12.1.8 Kurvendiskussion ... 219
12.1.9 Flächenberechnungen ... 224
12.2 Musterprüfungen ... 226
12.2.1 Kurvendiskussion mit ganzrationalen Funktionen ... 226
12.2.2 Extremwertberechnung mit ganzrationalen Funktionen ... 232
12.2.3 e-Funktion ... 236
12.2.5 Gebrochenrationale Funktionen ... 241
12.2.6 e-Funktion und ln-Funktion verknüpft mit rationaler Funktion ... 244
12.2.7 Vektorrechnung ... 248
12.2.8 Extremwertaufgaben ... 255
12.3 Übungsaufgaben für GTR ... 257
12.3.1 Übungsaufgaben zum GTR Casio fx ... 257
12.3.2 Übungsaufgaben zum TI-84 Plus ... 263

13 Anhang

Mathematische Zeichen, Abkürzungen und Formelzeichen ... 270

1.1 Term; 1.2 Gleichung; 1.3 Definitionsmenge

9.1 a)

$$4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$$ | Terme ausmultiplizieren, zusammenfassen und dann nach x auflösen

$$8x - 24 = 2x - x - 4$$

$$8x - 24 = x - 4$$ | $- x + 24$

$$7x = 20$$ | $: 7$

$$\mathbf{x = \frac{20}{7}}$$

b)

$$(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$$ | Terme ausmultiplizieren, zusammenfassen und dann nach x auflösen

$$6x^2 - 7x + 2 = 6x^2 - 12x - 48$$ | $- 6x^2 + 12x - 2$

$$5x = -50$$ | $: 5$

$$\mathbf{x = -10}$$

c)

$$\frac{x + 2}{5} - 2 = 4$$ | $\cdot 5$ Gleichung mit 5 multiplizieren, um den Nenner wegzubringen

$$x + 2 - 10 = 20$$ | $+ 8$

$$\mathbf{x = 28}$$

d)

$$\frac{2 - x}{2} + a = 1$$ | $\cdot 2$ Gleichung mit 2 multiplizieren, um den Nenner wegzubringen

$$2 - x + 2a = 2$$ | $+ x - 2$

$$\mathbf{x = 2a}$$

e)

$$\frac{2x - a}{4} - b = 2$$ | $\cdot 4$ Gleichung mit 4 multiplizieren, um den Nenner wegzubringen

$$2x - a - 4b = 8$$ | $+ a + 4b$

$$2x = a + 4b + 8$$ | $: 2$

$$\mathbf{x = 0{,}5a + 2b + 4}$$

f)

$$\frac{3x - 5}{5} = \frac{2x - 3}{4}$$ | $\cdot (4 \cdot 5)$ Gleichung mit 20 multiplizieren, um den Nenner wegzubringen

$$4(3x - 5) = 5(2x - 3)$$ | Terme ausmultiplizieren, zusammenfassen und dann nach x auflösen

$$12x - 20 = 10x - 15$$ | $- 10x + 20$

$$2x = 5$$ | $: 2$

$$\mathbf{x = 2{,}5}$$

9.2 a) Auflösen nach g:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$ | $\cdot 2$ | $: t^2 \Rightarrow \mathbf{g = \frac{2h}{t^2}}$

Auflösen nach t:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$ | $\cdot 2$ | $: g$

$$t^2 = \frac{2h}{g}$$ | $\sqrt{}$

$$t = \pm\sqrt{\mathbf{\frac{2h}{g}}}$$

b) Auflösen nach R $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ | gemeinsamen Nenner bilden

$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$ | Bruch „stürzen" $\Rightarrow$ $\mathbf{R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$

Auflösen nach R_1 $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$ | gemeinsamen Nenner bilden

$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{R \cdot R_2}$ | Bruch „stürzen" $\Rightarrow$ $\mathbf{R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}}$

Auflösen nach R_2 $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$ | gemeinsamen Nenner bilden

$\frac{1}{R_2} = \frac{R_1 - R}{R \cdot R_1}$ | Bruch „stürzen" $\Rightarrow$ $\mathbf{R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}}$

9.3 a) Definitionsmenge D: Wert unter der Wurzel muss größer gleich Null sein.

Linksterm D_l: $2x + 2 \geq 0$ | -2 | $:2$

$x \geq -1$

Rechtsterm D_r: $4x - 8 \geq 0$ | $+8$ | $:4$

$x \geq 2$

$\mathbf{D = D_l \cap D_r = \{x | x \geq 2\}_{IR}}$

Lösungsmenge L

$\sqrt{2x + 2} = \sqrt{4x - 8}$ | ^{2} (Gleichung quadrieren)

$2x + 2 = 4x - 8$ | $-2x + 8$

$10 = 2x \Rightarrow x = 5;\ x = 5 \in D \Rightarrow \mathbf{L = \{5\}}$

b) Definitionsmenge D: Nenner darf nicht Null werden.

Linksterm D_l: $x + 2 \neq 0$ | -2

$x \neq -2 \Rightarrow D_l = IR \setminus \{-2\}$

Rechtsterm D_r: $2 - x \neq 0$ | $-x$

$x \neq 2 \Rightarrow D_l = IR \setminus \{2\}$

$\mathbf{D = D_l \cap D_r = IR \setminus \{-2; 2\}}$

Lösungsmenge L

$\frac{3x - 1}{x + 2} = \frac{2 - 3x}{2 - x}$ | $(x + 2) \cdot (2 - x)$

$(3x - 1) \cdot (2 - x) = (2 - 3x) \cdot (x + 2)$ | ausmultiplizieren und sortieren

$-3x^2 + 7x - 2 = -3x^2 - 4x + 4$ | $+3x^2 + 4x + 2$

$11x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{11};\ x = \frac{6}{11} \in D \Rightarrow \mathbf{L = \left\{\frac{6}{11}\right\}}$

1.6 Logarithmengesetze

14.1 a) $x = \log_2 32 \Rightarrow 32 = 2^x;\ 32 = 2^5 = 2^x$ | Exponentenvergleich: $\mathbf{x = 5}$

b) $x = \log_2 \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = 2^x;\ \sqrt{2} = 2^{1/2} = 2^x$ | Exponentenvergleich: $\mathbf{x = 0{,}5}$

c) $81 = 3^x$ | $\log_3 \Rightarrow \mathbf{\log_3 81} = \log_3 3^x = x \cdot \log_3 3 = x \cdot 1 \mathbf{= x;}\ \mathbf{81 = 3^4} = 3^x$

| Exponentenvergleich: $\mathbf{x = 4}$

d) $10^{-3} = 10^x$ | Exponentenvergleich: $\mathbf{x = -3}$

$10^{-3} = 10^x$ | $\log_{10} \Rightarrow$ $\mathbf{x = \log_{10} 10^{-3}}$

14.2 a) $\log_{10} 1 = x \quad \Rightarrow \quad 1 = 10^x \quad \Rightarrow \quad 1 = 10^0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 0}$

b) $\log_{10} 10 = x \quad \Rightarrow \quad 10 = 10^x \quad \Rightarrow \quad 10 = 10^1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 1}$

c) $\log_e 1 = x \quad \Rightarrow \quad 1 = e^x \quad \Rightarrow \quad 1 = e^0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 0}$

d) $\log_3 \frac{1}{27} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{27} = 3^x; \quad \frac{1}{3^3} = 3^{-3} = 3^x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = -3}$

14.3 a) $\log_a(3 \cdot u) = \mathbf{\log_a 3 + \log_a u}$

b) $\log_a \frac{1}{u} = \log_a 1 - \log_a u = 0 - \log_a u = \mathbf{-\log_a u}$

c) $\log_a \frac{u^3}{v^2} = \log_a u^3 - \log_a v^2 = \mathbf{3 \log_a u - 2 \log_a v}$

14.4 a) log 16 | Basis 10

$\Rightarrow$ Taste log; die Zahl 16 in den Rechner eingeben und log betätigen $\Rightarrow$ **1,204 12**

b) log 111 | Basis 10

$\Rightarrow$ Taste log; die Zahl 111 in den Rechner eingeben und log betätigen $\Rightarrow$ **2,045 32**

c) $\log 8^2 = \log 64$ | Basis 10

$\Rightarrow$ Taste log; die Zahl 64 in den Rechner eingeben und log betätigen $\Rightarrow$ **1,806 18**

d) $\log \sqrt{100} = \log 10$ | Basis 10

$\Rightarrow$ Taste log; die Zahl 10 in den Rechner eingeben und log betätigen $\Rightarrow$ **1**

e) ln 16 | Basis e

$\Rightarrow$ Taste ln; die Zahl 16 in den Rechner eingeben und ln betätigen

$\Rightarrow$ **2,772 59**

f) ln 111 | Basis e

$\Rightarrow$ Taste ln; die Zahl 111 in den Rechner eingeben und ln betätigen

$\Rightarrow$ **4,709 53**

g) 2 ln 8 | Basis e

$\Rightarrow$ Taste ln; die Zahl 8 in den Rechner eingeben und ln betätigen

$\Rightarrow 2 \cdot 2{,}079\,44 =$ **4,158 88**

h) $\ln 8^2 = 2 \ln 8$ | Basis e

$\Rightarrow$ Taste ln; die Zahl 8 in den Rechner eingeben und ln betätigen

$\Rightarrow$ **4,158 88**

14.5 a) $\log_2 12$ | wähle Basis 10

$\Rightarrow$ log; $\log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{1{,}079\,18}{0{,}301\,03} = \mathbf{3{,}584\,96}$

b) $\log_3 12$ | wähle Basis 10

$\Rightarrow$ log; $\log_3 12 = \frac{\log 12}{\log 3} = \frac{1{,}079\,18}{0{,}477\,121} = \mathbf{2{,}261\,86}$

c) $\log_4 12$ | wähle Basis 10

$\Rightarrow$ log; $\log_4 12 = \frac{\log 12}{\log 4} = \frac{1{,}079\,18}{0{,}602\,06} = \mathbf{1{,}792\,48}$

d) $\log_5 12$ | wähle Basis 10

$\Rightarrow$ log; $\log_5 12 = \frac{\log 12}{\log 5} = \frac{1{,}079\,18}{0{,}698\,97} = \mathbf{1{,}543\,96}$

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

15.1 a)

$(x + 2)^2 + 6 = x^2 + 20$ | Binom auflösen

$x^2 + 4x + 4 + 6 = x^2 + 20$ | $- x^2 - 10$

$4x = 10$ | : 4

$\mathbf{x = 2{,}5}$

b)

$\frac{4(17 + 20x)}{11} = 8$ | $\cdot$ 11 (Nenner wegbringen)

$4(17 + 20x) = 8 \cdot 11$ | ausmultiplizieren und sortieren

$68 + 80x = 88$ | $- 68$

$80x = 20$ | : 80

$x = \frac{20}{80}$

$\mathbf{x = \frac{1}{4}}$

c)

$\frac{6(x + 7)}{17(x - 4)} = 1$ | $\cdot\, 17(x - 4)$ (Nenner wegbringen)

$6(x + 7) = 17(x - 4)$ | ausmultiplizieren und sortieren

$6x + 42 = 17x - 68$ | $- 6x + 68$

$110 = 11x$ | : 11

$\mathbf{x = 10}$

d)

$\frac{4x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{2x + 3}{4} + 6$ | $\cdot\, (4 \cdot 5)$

$16x - 15 = 10x + 15 + 120$ | $- 10x + 15$

$6x = 150$ | : 6

$\mathbf{x = 25}$

15.2 a) Auflösen nach h

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad | \cdot (2\pi R)$$

$$F_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = F_2 \cdot h \quad | : F_2$$

$$\mathbf{h = \frac{F_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{F_2}}$$

Auflösen nach R

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot h}{2\pi \cdot R} \quad | \cdot R$$

$$F_1 \cdot R = \frac{F_2 \cdot h}{2\pi} \quad | : F_1$$

$$\mathbf{R = \frac{F_2 \cdot h}{2\pi \cdot F_1}}$$

b) Auflösen nach h

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad |^2 \text{ (Wurzel wegbringen)}$$

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \quad | : (2 \cdot g)$$

$$\mathbf{h = \frac{v^2}{2g}}$$

c) Auflösen nach I

$$H = \frac{I \cdot N^2}{\sqrt{4r^2 + l^2}} \quad | \cdot \sqrt{4r^2 + l^2} \text{ (Nenner wegbringen)}$$

$$H \cdot \sqrt{4r^2 + l^2} = I \cdot N^2 \quad | : N^2$$

$$\mathbf{I = \frac{H \cdot \sqrt{4r^2 + l^2}}{N^2}}$$

Auflösen nach l

$$H = \frac{I \cdot N^2}{\sqrt{4r^2 + l^2}} \quad | \cdot \sqrt{4r^2 + l^2}$$

$$H \cdot \sqrt{4r^2 + l^2} = I \cdot N^2 \quad | : H$$

$$\sqrt{4r^2 + l^2} = \frac{I \cdot N^2}{H} \quad |^2 \text{ (quadrieren)}$$

$$4r^2 + l^2 = \left(\frac{I \cdot N^2}{H}\right)^2 \quad | - 4r^2 \quad | \sqrt{}$$

$$l = \pm\sqrt{\left(\frac{I \cdot N^2}{H}\right)^2 - 4r^2}; \quad \mathbf{l = \pm\sqrt{\frac{I^2 N^4}{H^2} - 4r^2}}$$

d) Auflösen nach l_2

$$A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot b \quad | \cdot 2 \quad | : b$$

$$\frac{2A}{b} = l_1 + l_2 \quad | - l_1$$

$$\mathbf{l_2 = \frac{2A}{b} - l_1}$$

Auflösen nach b

$$A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot b \quad | \cdot 2 \quad | : (l_1 + b_2)$$

$$\mathbf{b = \frac{2A}{l_1 + l_2}}$$

15.3 a) Definitionsmenge D

$$\sqrt{2x + 100} \quad | \; 2x + 100 \geq 0 \quad | - 100$$

$$2x \geq -100 \quad | : 2$$

$$\mathbf{x \geq -50; \quad D = \{x | x \geq -50\}_{\mathbb{R}}}$$

b) $\frac{1}{\sqrt{2x + 100}}$ $\quad | \; 2x + 100 > 0$ (Nenner $\neq 0$)

$$2x > -100$$

$$\mathbf{x > -50; \quad D = \{x | x > -50\}_{\mathbb{R}}}$$

c) $\log_a(x + 2)$ $\quad | \; x + 2 > 0$

$$\mathbf{x > -2; \quad D = \{x | x > -2\}_{\mathbb{R}}}$$

15.4 a) Definitionsmenge D

$\frac{x-9}{x} = \frac{4}{5}$; $\mathbf{D = \mathbb{R}\setminus\{0\}}$ (Nenner $\neq 0$)

Lösungsmenge L

$\frac{x-9}{x} = \frac{4}{5}$ $\quad | \cdot x \quad | \cdot 5$

$5(x-9) = 4 \cdot x$

$5x - 45 = 4x$ $\quad | -4x \quad | +45$

$\mathbf{x = 45;\ \ L = \{45\}}$

---

b) Definitionsmenge D

$\frac{15ac}{x} = \frac{9bc}{6bd}$; $\mathbf{D = \mathbb{R}\setminus\{0\}}$; $b, d \neq 0$

Lösungsmenge L

$\frac{15ac}{x} = \frac{9\cancel{b}c}{6\cancel{b}d} = \frac{9c}{6d}$ $\quad | \cdot x \quad | \cdot \frac{6d}{9c}$

$15a\cancel{c} \cdot \frac{6d}{9\cancel{c}} = x$

$\frac{90ad}{9} = x$; $\mathbf{x = 10ad;\ \ L = \{10ad\}}$

---

c) Definitionsmenge D

$\sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{x-11}$; D_l: $x + 1 \geq 0$; $x \geq -1$

D_r: $x - 11 \geq 0$; $x \geq 11$

$D = D_l \cap D_r = \{x | x \geq 11\}_{\mathbb{R}}$

Lösungsmenge L

$\sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{x-11}$ $\quad |^2$ (quadrieren, sortieren)

$x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = x - 11$ $\quad | -x - 4\sqrt{x+1} + 11 \quad | :4$

$4 = \sqrt{x+1}$ $\quad |^2$ (quadrieren und nach x auflösen)

$16 = x + 1$ $\quad | -1$

$x = 15$; $\mathbf{x = 15 \in D}$; Probe: $\sqrt{16} - 2 = \sqrt{4}$ (w) $\Rightarrow$ $\mathbf{L = \{15\}}$

---

d) Definitionsmenge D

$7 + 4\sqrt{x+7} = 23$; $x + 7 \geq 0$; $x \geq -7$; $\mathbf{D = \{x | x \geq -7\}_{\mathbb{R}}}$

Lösungsmenge L

$7 + 4\sqrt{x+7} = 23$ $\quad | -7 \quad | :4$

$\sqrt{x+7} = 4$ $\quad |^2$ (quadrieren; nach x auflösen)

$x + 7 = 16$ $\quad | -7$

$x = 9$; $\mathbf{x = 9 \in D}$; Probe: $7 + 4\sqrt{16} = 23$ (w) $\Rightarrow$ $\mathbf{L = \{9\}}$

15.5 a) $2 \cdot 10^{-2} = \mathbf{\frac{2}{10^2}}$

---

b) $\text{min}^{-1} = \mathbf{\frac{1}{min}}$

---

c) $\frac{a^{-2}bc^2}{(a+b)^{-1}} = \mathbf{\frac{(a+b)bc^2}{a^2}}$

15.6 a) $10^{-2} = \mathbf{\frac{1}{10^2}}$

b) $\frac{1}{10^3} = \mathbf{10^{-3}}$

c) $\frac{1}{m} = \mathbf{m^{-1}}$

d) $\frac{V}{m} = \mathbf{Vm^{-1}}$

15.7 a) $1\,083\,000\,000\,000\,000\,000\,000\ m^3 = 1\,083 \cdot 10^{18}\ m^3 = \mathbf{1{,}083 \cdot 10^{21}\ m^3}$

b) $510\,000\,000\,000\,000\ m^2 = 51 \cdot 10^{13}\ m^2 = \mathbf{5{,}1 \cdot 10^{14}\ m^2}$

c) $149\,500\,000\,000\ m = 1\,495 \cdot 10^8\ m = \mathbf{1{,}495 \cdot 10^{11}\ m}$

15.8 a) $\frac{(a+b)^0}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 1 \cdot 2^1 = \mathbf{2}$

b) $\frac{xx^{-2}}{(n^2 \cdot x)^{-1}} = \frac{x(n^2 \cdot x)}{x^2} = \frac{n^2 \cdot x^2}{x^2} = \mathbf{n^2}$

c) $\frac{x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot y^3}{y^{n+2} \cdot x^{m+2}} = \frac{x^m \cdot x^{-1} \cdot y^n \cdot y^{-1} \cdot y^3}{y^n \cdot y^2 \cdot x^m \cdot x^2} = \frac{y^3}{y^3x^3} = \frac{1}{x^3} = \mathbf{x^{-3}}$

d) $\frac{n^{-2+x}}{n^{x-1}} = \frac{n^{-2}n^x}{n^x n^{-1}} = \frac{n^1}{n^2} = n^{-1} = \mathbf{\frac{1}{n}}$

e) $\left((n^{-2})^{-1}\right) \cdot n^{a-2} = n^2 \cdot n^a \cdot n^{-2} = n^a \cdot n^{2-2} = n^a \cdot n^0 = \mathbf{n^a}$

f) $\frac{(n^4 \cdot m^{-2})^{-3}}{(n^{-2} \cdot m^{-3})^5} = \frac{n^{-12} \cdot m^6}{n^{-10} \cdot m^{-15}} = n^{-12} \cdot n^{10} \cdot m^6 \cdot m^{15} = \mathbf{\frac{m^{21}}{n^2} = m^{21} \cdot n^{-2}}$

15.9 a) $\sqrt[3]{\frac{x^{-3}}{x^{-9}}} = \sqrt[3]{x^{-3}\,x^{-9}} = \sqrt[3]{x^6} = (x^6)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{6}{3}} = \mathbf{x^2}$

b) $\sqrt[n+m]{(x^2)^{3n+3m}} = \sqrt[n+m]{(x^6)^{(n+m)}} = \left(x^{6(n+m)}\right)^{\frac{1}{n+m}} = \mathbf{x^6}$

c) $\sqrt[an]{3^{n(a+b)}} = \left(3^{n(a+b)}\right)^{\frac{1}{an}} = 3^{\frac{n(a+b)}{an}} = 3^{\frac{a+b}{a}} = 3^{1+\frac{b}{a}} = 3 \cdot 3^{\frac{b}{a}} = \mathbf{3\sqrt[a]{3^b}}$

15.10 a) $\log_{10} 100 = x; \quad 10^x = 100 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 2}$

b) $\log_{10} 300 = x; \quad 10^x = 300 = 10^{2{,}477} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 2{,}477}$

c) $\log_e 2{,}7183 = x; \quad e^x = 2{,}7183 = e^1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 1}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32; \quad 2^{-x} = 32 = 2^5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = -5}$

15.11 a) $\log_a u^2 = \mathbf{2 \log_a u}$

b) $\log_a \frac{m^2\sqrt{n}}{p^3} = \log_a\left(m^2 \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot p^{-3}\right) = \log_a m^2 + \log_a n^{\frac{1}{2}} + \log_a p^{-3}$

$= \mathbf{2 \log_a m + \frac{1}{2} \log_a n - 3 \log_a p}$

c) $\log_a \sqrt[3]{n^2} = \log_a n^{\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{2}{3} \log_a n}$

15.12 a) $3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = \mathbf{3}$

b) $\log 8^4 = 4 \log 8 = 4 \cdot 0{,}903\,09 = \mathbf{3{,}612\,35}$

c) $\ln \sqrt[5]{500} = \ln(500)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \ln 500 = 0{,}2 \cdot 6{,}214\,6 = \mathbf{1{,}243}$

d) $\ln 5^{30} = 30 \ln 5 = 30 \cdot 1{,}609\,4 = \mathbf{48{,}283}$

15.13 a) $\log_2 256$ | wähle Basis e

$\Rightarrow$ ln: $\log_2 256 = \frac{\ln 256}{\ln 2} = \mathbf{8}$

b) $\log_7 4$ | wähle Basis e

$\Rightarrow \log_7 4 = \frac{\ln 4}{\ln 7} = \frac{1{,}386\,29}{1{,}945\,91} = \mathbf{0{,}712\,4}$

c) $\log_{16} 256$ | wähle Basis e

$\Rightarrow \log_{16} 256 = \frac{\ln 256}{\ln 16} = \frac{5{,}545\,17}{2{,}772\,59} = \mathbf{2}$

d) $\log_8 \sqrt{6\,400}$ | wähle Basis e

$\Rightarrow \log_8 \sqrt{6\,400} = \frac{\ln \sqrt{6\,400}}{\ln 8} = \frac{4{,}382\,02}{2{,}079\,44} = \mathbf{2{,}107\,3}$

1.7 Funktionen und Gleichungssysteme

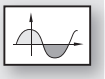
16.1 Quadrant I: $\mathbf{P_1\ (1|1)}$ Quadrant II: $\mathbf{P_2\ (-2|1)}$

Quadrant III: $\mathbf{P_3\ (-2|-4)}$ Quadrant IV: $\mathbf{P_4\ (2|-3)}$

16.2 Quadrant I: $\mathbf{x > 0;\ \ y > 0}$ Quadrant II: $\mathbf{x < 0;\ \ y > 0}$

Quadrant III: $\mathbf{x < 0;\ \ y < 0}$ Quadrant IV: $\mathbf{x > 0;\ \ y < 0}$

18.1 Abgelesen aus Bild 1: $\mathbf{P_3\ (-3|-4{,}5)}$



$m = \frac{-4{,}5}{-3} = \frac{3}{2} = \mathbf{1{,}5}$

18.2 $P_2\ (3|6)$, $P_1\ (1|1)$

$m = \frac{y_{P2} - y_{P1}}{x_{P2} - x_{P1}} = \frac{6-1}{3-1} = \frac{5}{2} = \mathbf{2{,}5}$

19.1 $y = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{3} \cdot x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{3} \cdot x = -3 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{3} \cdot x = 3 \ \Leftrightarrow\ x = 9 \ \Rightarrow\ \mathbf{N\ (9|0)}$

19.2 $y = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{2}{3} \cdot x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{2}{3} \cdot x = -3 \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{3} \cdot x = 3 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{x = 4{,}5}$

Die Steigung wird doppelt so groß, die Auslaufzeit halbiert.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

20.1 **P_1 (0|0|0), P_2 (2|0|0), P_3 (2|4|0), P_4 (0|4|0), P_5 (0|0|3), P_6 (2|0|3), P_7 (2|4|3), P_8 (0|4|3)**

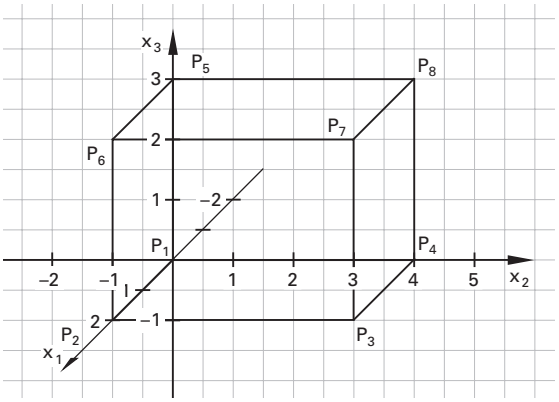


Bild 1: Quader

20.2 a) $m = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2} = \ldots = \frac{-10}{5} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = -2 \cdot x}$

b) $x = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = 2}, \quad x = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = 4}, \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = 6}$

20.3 Punktprobe für P und Q:

$P\,(2|-3) \quad \Rightarrow \quad -3 \neq \frac{3}{2} \cdot 2 \quad \Rightarrow$ nicht erfüllt, **P liegt nicht auf der Geraden.**

$Q\,(-3|-4{,}5) \quad \Rightarrow \quad -4{,}5 = \frac{3}{2} \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad -4{,}5 = -4{,}5 \quad \Rightarrow$ erfüllt, **Q liegt auf der Geraden.**

20.4 a) $m = 5 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = 5 \cdot x + b$

$P\,(2|-4) \quad \Rightarrow \quad -4 = 5 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -14$

$\mathbf{f(x) = 5 \cdot x - 14}$

b) $P\,(-1|-5),\ Q\,(4|7) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{7-(-5)}{4-(-1)} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad y = g(x) = 2{,}4 \cdot x + b$

mit Q (4|7) gilt $7 = 2{,}4 \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2{,}6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g(x) = 2{,}4 \cdot x - 2{,}6}$

20.5 a) $P\,(2|3),\ Q\,(4|2) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2-3}{4-2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad y = g(x) = 0{,}5 \cdot x + b$

mit P (2|3) gilt $3 = -0{,}5 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g(x) = -0{,}5 \cdot x + 4}$

$m = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \cdot x + b$

$A\,(2|1) \quad \Rightarrow \quad 1 = 2 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -3$

$\mathbf{h(x) = 2 \cdot x - 3}$

b) $g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -0{,}5 \cdot x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 8}$

$h(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{3}{2} = 1{,}5}$

c) Schnittpunkt S für g(x) = h(x):

$-0{,}5 \cdot x + 4 = 2 \cdot x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \cdot x = 7 \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{14}{5} = 2{,}8$

$\Rightarrow \quad y_S = h(x_S) \quad \Rightarrow \quad y_S = 2 \cdot \frac{14}{5} - 3 = \frac{28-15}{5} = \frac{13}{5} = 2{,}6$

$\Rightarrow$ **S (2,8|2,6)**

20.6 a) Geradengleichungen durch die Eckpunkte:

f: $y = 5$; g: $y = 1$;

h: $m = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$

$= \frac{5-1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$ oder

$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$

$= \frac{5-1}{9-8} = \frac{4}{1} = 4$

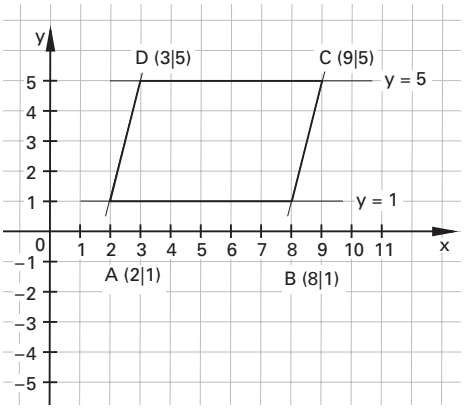
$\Rightarrow$ $y = 4 \cdot x + b$

$\Rightarrow$ Punkt A (2|1) einsetzen:

$1 = 2 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = -7 \Rightarrow$ **h: $y = 4 \cdot x - 7$**

Punkt B (8|1) einsetzen:

$1 = 8 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = -31 \Rightarrow$ **i: $y = 4 \cdot x - 31$**



b) $d_1(x) = m \cdot x + b$: $m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-1}{9-2} = \frac{4}{7} \Rightarrow d_1(x) = \frac{4}{7} \cdot x + b$

mit A (2|1) in d_1 gilt: $1 = 2 \cdot \frac{4}{7} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{7} \Rightarrow$ **$d_1(x) = \frac{4}{7} \cdot x - \frac{1}{7}$**

$d_2(x) = m \cdot x + b$: $m = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{5-1}{3-8} = -\frac{4}{5} \Rightarrow d_2(x) = -\frac{4}{5} \cdot x + b$

mit D (3|5) in d_2 gilt: $5 = 3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + b \Rightarrow b = \frac{25}{5} + \frac{12}{5} = \frac{37}{5} \Rightarrow$ **$d_2(x) = -\frac{4}{5} \cdot x + \frac{37}{5}$**

c) Diagonalenschnittpunkt $\Leftrightarrow$ $d_1(x) = d_2(x)$:

$\frac{4}{7} \cdot x - \frac{1}{7} = -\frac{4}{5} \cdot x + \frac{37}{5} \Leftrightarrow \frac{20+28}{35} x = \frac{37 \cdot 7 + 5}{35} \Leftrightarrow 48 \cdot x = 264 \Leftrightarrow x_S = \frac{11}{2} = 5{,}5$

$y_S = d_1(x_S) = \frac{4}{7} \cdot \frac{11}{2} - \frac{1}{7} = \frac{44-2}{14} = \frac{42}{14} = 3 \Rightarrow$ **S (5,5|3)**

20.7 Gesucht g(x): Es gilt $m_g = -\frac{1}{m_f} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$

g: $y = -\frac{2}{3} \cdot x + b$

$\Rightarrow$ Einsetzen von P (1|4) $\Rightarrow 4 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + b \Leftrightarrow 4 + \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow b = \frac{14}{3} \Leftrightarrow$ **g: $y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{14}{3}$**

20.8 a) $k(x) = m \cdot x + b$; x in %

$m = -\frac{16000}{100} \cdot 15 = -2400 \Rightarrow k(x) = -2400 \cdot x + b$ für $x = 0 \Rightarrow b = 16000$

$k(x) = -2400 \cdot x + 16000$

b) $k(x) = 0 \Leftrightarrow -2400 \cdot x + 16000 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16000}{2400} = \frac{20}{3}$

$\Rightarrow$ Das Fahrzeug ist nach **$6\frac{2}{3}$** Jahren abgeschrieben.

c) $k(24) = -\frac{16000\,€}{100} \cdot 24 \Rightarrow$ 24 % des Buchwertes sind 3840 €

$3840 = -2400 \cdot x + 16000 \Leftrightarrow x = \frac{16000 - 3840}{2400} = \frac{12160}{2400} =$ **5,06 Jahre**

20.9 a) $m = 0{,}5 \Rightarrow f(x) = 0{,}5 \cdot x + b$

P (1|1) $\Rightarrow 1 = 0{,}5 + b \Leftrightarrow b = 0{,}5$

$f(x) = 0{,}5 \cdot x + 0{,}5$

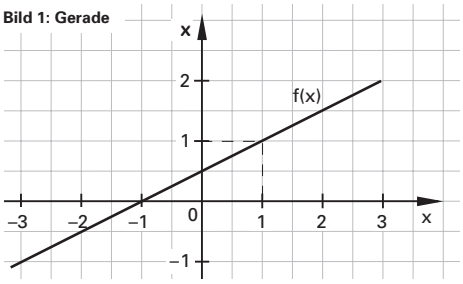
b) g(x) 1 höher: $\Rightarrow b = 1{,}5$

$\Rightarrow$ **$g(x) = 0{,}5 \cdot x + 1{,}5$**

h(x) 1 tiefer: $\Rightarrow b = -0{,}5$

$\Rightarrow$ **$h(x) = 0{,}5 \cdot x - 0{,}5$**

Bild 1: Gerade



c) Gerade senkrecht auf f(x) durch Q (3|2): $m_f \cdot m_i = -1 \quad \Rightarrow \quad m_i = -\frac{1}{m_f} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

Q (3|2) $\Rightarrow$ $i(x) = -2 \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad 2 = -2 \cdot 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 8 \quad \Rightarrow$ $\mathbf{i(x) = -2 \cdot x + 8}$

d) Schnittpunkt S von g(x) mit i(x):

$-2 \cdot x + 8 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 8 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x_S = \frac{13}{5} = 2{,}6$

$y_S = g(x_S) = g\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} + \frac{3}{2} = \frac{28}{10} = 2{,}8 \quad \Rightarrow$ **S (2,6|2,8)**

Schnittpunkt S von h(x) mit i(x):

$-2 \cdot x + 8 = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 8 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x_S = \frac{17}{5} = 3{,}4$

$y_S = h(x_S) = h\left(\frac{17}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{5} - \frac{1}{2} = \frac{12}{10} = 1{,}2 \quad \Rightarrow$ **S (3,4|1,2)**

1.7.4 Quadratische Funktionen

21.1 Parabeleigenschaften: $\mathbf{-1 < a < 1;\ \ a \neq 0}$

Tabelle 1

21.2 Parabeleigenschaften: $\mathbf{a < 0}$

Tabelle 1

21.3 Parabeleigenschaften: $\mathbf{a > 1}$

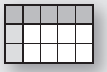


Tabelle 1

22.1 $h(x) = 0{,}5 \cdot (x - 2)^2 + 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = -0{,}5 \cdot (x - 2)^2 + 1{,}5}$

22.2 Durch Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Scheitelform $y = a(x - x_S)^2 + y_S$:

$y = 0{,}5 \cdot (x - 4)^2 + 5 \qquad x_S = 4 \wedge y_S = 5 \quad \Rightarrow$ **S (4|5)**

23.1 a) Nullstellen:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{1}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4,\ x_2 = 2 \quad \Rightarrow$ $\mathbf{N_1\ (-4|0),\ N_2\ (2|0)}$

Oder durch Umformung aus der Nullstellenform:

$0{,}5 \cdot x^2 + x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2 \cdot x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2) \cdot (x + 4) = 0$

$\Rightarrow$ Satz vom Nullprodukt $\Rightarrow \quad x_1 = -4,\ x_2 = 2 \quad \Rightarrow$ $\mathbf{N_1\ (-4|0),\ N_2\ (2|0)}$

b) Scheitel:

$S\left(\frac{-b}{2 \cdot a} \middle| \frac{-b^2}{4 \cdot a} + c\right) \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{-1}{2 \cdot 0{,}5} = -1$

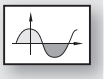
$y_S = \frac{1^2}{4 \cdot 0{,}5} + (-4) = -\frac{1}{2} - 4 = -4{,}5 \quad \Rightarrow$ **S (–1|–4,5)** oder:

$x_S = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-1}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{-1}{1} = \mathbf{-1}$

$y_S = f(x_S) = 0{,}5 \cdot (-1)^2 - 1 - 4 = \mathbf{-4{,}5} \quad \Rightarrow$ **S (–1|–4,5)**

c) P (4|2,5) in $y = 0{,}5 \cdot x^2 + x - 4$ einsetzen:

$2{,}5 = 0{,}5 \cdot 4^2 + 4 - 4 \;\Rightarrow\; 2{,}5 \neq 8 \;\Rightarrow\;$ **P ∉ Parabel**



d) **Bild 2**

24.1 Durch Faktorisieren und mit dem Satz vom Nullprodukt:

$2 \cdot x \cdot (x - 2) = 0 \;\Rightarrow\;$ **x = 0 oder x = 2**

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

25.1 $A = \pi r^2$ Seite 22

Mit der Gleichungsform $y = a \cdot x^2 + y_S$:

p_1: $a = 1$; $y_S = 2 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = 1 \cdot x^2 + 2 = x^2 + 2}$

p_2: $a = \frac{1}{2}$; $y_S = 1 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1}$

p_3: $a = \frac{1}{4}$; $y_S = 0 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = \frac{1}{4} \cdot x^2}$

p_4: $a = \frac{1}{8}$; $y_S = -1 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = \frac{1}{8} \cdot x^2 - 1}$

25.2 $A = \pi r^2$ Seite 22

2 Längeneinheiten nach rechts verschieben. Mit der Gleichungsform

$y = f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S = 0$ und mit $x_S = 2$:

$p_1(x) = 1 \cdot x^2 + 2$ mit $x_S = 2 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = 1 \cdot (x - 2)^2 + 2 = (x - 2)^2 + 2}$

$p_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$ mit $x_S = 2 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2 + 1}$

25.3 $A = \pi r^2$ Seite 22

1 Längeneinheit nach links verschieben. Mit der Gleichungsform

$y = f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S = 0$:

$p_3(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$ mit $x_S = -1 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = \frac{1}{4} \cdot (x + 1)^2}$

$p_4(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2$ mit $x_S = -1 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{y = \frac{1}{8} \cdot (x + 1)^2 - 1}$

25.4 $A = \pi r^2$ Seite 22 Seite 23

Scheitelwerte $S = \left(\frac{-b}{2 \cdot a} \middle| \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} + c\right)$ in Scheitelform $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen:

a) $x_S = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$; $y_S = \frac{-(-4)^2}{4 \cdot 1} + 1 = -3 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{p_1(x) = (x - 2)^2 - 3}$

b) $x_S = \frac{-6}{2} = -3$; $y_S = \frac{-(6)^2}{4 \cdot 1} + 8 = -1 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{p_2(x) = (x + 3)^2 - 1}$

c) $x_S = \frac{-6}{2} = -3$; $y_S = \frac{-(6)^2}{4 \cdot 1} + 11 = 2 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{p_3(x) = (x + 3)^2 + 2}$

d) $x_S = \frac{-(-8)}{2 \cdot (-2)} = -2$; $y_S = \frac{-(-8)^2}{4 \cdot (-2)} + 1 = 9 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{p_4(x) = -2 \cdot (x + 2)^2 + 9}$

25.5 Lösen durch Wurzelziehen:

a) $1 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2} = \sqrt{1} \;\Leftrightarrow\;$ **x = 1** oder **x = –1**

b) $\frac{3}{4} \cdot x^2 = x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{3}{4} \cdot x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4} \cdot x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2} = \sqrt{0} \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{x_1 = x_2 = 0}$

c) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x^2 = 3 \;\Leftrightarrow\;$ $\mathbf{x_1 = -\sqrt{3} = -1{,}732;\quad x_2 = +\sqrt{3} = +1{,}732}$

d) $\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{6}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{6}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{12}{5}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{5}$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x_1} = -\frac{2 \cdot \sqrt{15}}{5} = \mathbf{-1{,}55}; \quad \mathbf{x_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{5} = \mathbf{1{,}55}$

25.6

$A = \pi r^2$

Seite 23

Mit der Lösungsformel:

a) $2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2 \cdot 24}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{4} = \frac{-2 \pm 14}{4}$

$\mathbf{x_1 = -4; \quad x_2 = 3}$

---

b) $-3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 + 96}}{-6} = \frac{+5 \pm \sqrt{121}}{-6} = \frac{+5 \pm 11}{-6}$

$\mathbf{x_1} = \frac{16}{-6} = \frac{8}{-3} \mathbf{= -2{,}\overline{6}}; \quad \mathbf{x_2} = \frac{-6}{-6} \mathbf{= 1}$

---

c) $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{4} = \frac{-4 \pm 12}{4} = -1 \pm 3$

$\mathbf{x_1 = -4; \quad x_2 = 2}$

---

d) $-x^2 + 5 \cdot x + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{-5 \pm 9}{-2}$

$\mathbf{x_1} = \frac{-14}{-2} \mathbf{= 7}; \quad \mathbf{x_2} = \frac{4}{-2} \mathbf{= -2}$

25.7

Tabelle 1
Seite 24

Mit dem Koeffizienten a und den Nullstellen in die Formel
$y = f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ einsetzen:

a) $a = 0{,}25; \quad (4|0); \quad (6|0) \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = 0{,}25 \cdot (x - 4) \cdot (x - 6) = 0{,}25 \cdot (x^2 - 4x - 6x + 24)$

$= \mathbf{0{,}25 \cdot x^2 - 2{,}5 \cdot x + 6}$

---

b) $a = 1; \quad (-6|0); \quad (-2|0) \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = 1 \cdot (x + 6) \cdot (x + 2) = (x^2 + 6x + 2x + 12)$

$= \mathbf{x^2 + 8 \cdot x + 12}$

---

c) $a = 0{,}5; \quad (-4|0); \quad (2|0) \quad \Rightarrow \quad f_3(x) = 0{,}5 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2) = 0{,}5(x^2 + 4x - 2x - 8)$

$= 0{,}5 \cdot (x^2 + 2x - 8) = \mathbf{0{,}5x^2 + x - 4}$

25.8

Brückenbogen:
$h = -\frac{1}{20} \cdot s^2 + \frac{5}{4} \cdot s$

a) Die Spannweite ist die Differenz der Nullstellenwerte:

$-\frac{1}{20} \cdot s^2 + \frac{5}{4} \cdot s = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 - \frac{100}{4} \cdot s = 0 \quad \Rightarrow \quad s \cdot (s - 25) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 0; \quad s_2 = 25$

$\Rightarrow \quad \mathbf{\Delta s = s_2 - s_1 = 25\ m}$

---

b) Scheitelpunkt des Bogens:

$$x_s = \frac{-\frac{5}{4}}{-\frac{2}{20}} = \frac{5 \cdot 20}{4 \cdot 2} = \mathbf{12{,}5}$$

$$y_s = \frac{-\left(\frac{5}{4}\right)^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)} = \frac{\left(\frac{25}{16}\right)}{\frac{4}{20}} = \frac{25 \cdot 20}{4 \cdot 16} = \frac{125}{16} = \mathbf{7{,}81}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{S\ (12{,}5\ m|7{,}81\ m)}$