



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Kunststoffberufe

Cornelia Fritsche
Hartmut Fritsche
Werner Gradl

Jörg Kolbinger
Karl-Heinz Küspert
Ulrike Rudolph

Albrecht Schmidt
Werner Schröck
Frank Schwarze

Tabellenbuch Kunststofftechnik

3. Auflage

Europa-Nr.: 15020

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Autorinnen und Autoren:

Cornelia Fritsche	Dipl.-Ing.-Päd., Studienrätin	Massen
Hartmut Fritsche	Dipl.-Ing. (FH)	Massen
Werner Gradl	Ing. BEd.	Wartberg
Jörg Kolbinger	Dipl.-Ing. (FH), Studiendirektor	Windelsbach
Karl-Heinz Küspert	Fachoberlehrer	Hof
Ulrike Rudolph	Dipl.-Ing.	Sonneberg
Albrecht Schmidt	Fachoberlehrer	Selbitz
Werner Schröck	Dipl.-Ing. (FH), Studienrat	Pirmasens
Frank Schwarze	Dipl.-Ing.-Päd., Studienrat	Sonneberg

Lektorat und Leitung des Arbeitskreises: Hartmut Fritsche

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern
Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar

Maßgebend für das **Anwenden der Normen** sind deren Fassungen mit dem neuesten Ausgabedatum, die bei der VDE-VERLAG GmbH, Bismarckstr. 33, 10625 Berlin und der Beuth Verlag GmbH, Burggrafenstr. 6, 10787 Berlin erhältlich sind.

3. Auflage 2023

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke dieser Auflage sind im Unterricht nebeneinander einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-7585-1184-4

Alle Rechte vorbehalten. Das Tabellenbuch ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag genehmigt werden.

©2023 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar
Umschlag: MediaCreativ, G. Kuhl, 40724 Hilden
Umschlagfoto: „ASB-Formteil-Füllstudie“: Werner Gradl, A-4224 Wartberg
Druck: Himmer GmbH, 86167 Augsburg

Das **Tabellenbuch Kunststofftechnik** ist ein Teil des Fachbuchangebots des Verlags Europa-Lehrmittel im Bereich Kunststofftechnik. Dieses Nachschlagewerk ist für alle kunststofforientierten Berufsausbildungen, Studiengänge, Umschulungen, Lehrgänge, Abschlussprüfungen, sowie Fort- und Weiterbildungen geeignet.

Die inhaltliche Struktur des Tabellenbuchs ist angelehnt an die Europa-Lehrmittel-Bücher „Fachkunde Kunststofftechnik“, „Prüfungsvorbereitung aktuell – Kunststofftechnik“ und „Arbeitsblätter Kunststofftechnik“.



Das Tabellenbuch Kunststofftechnik ist wie in den Auflagen zuvor gegliedert:

- Naturwissenschaftlich-technische Grundlagen
- Technische Kommunikation
- Werkstofftechnik
- Maschinenelemente
- Automatisierungstechnik
- Fertigungstechnik
- Verfahrenstechnik
- Kunststofffenster und Apparatebau

Die vorliegende **3. Auflage** wurde mit den aktuellsten Normen, neuen Erkenntnissen, anhand zahlreicher Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge umfangreich überarbeitet und ergänzt. Der Seitenumfang erhöhte sich dadurch um 18 Seiten. Vokabeln (Deutsch – Englisch), ein Glossar und mehrere kunststoffspezifische Werkstofftabellen und Verarbeitungsparameter sind dort enthalten.

Bitte beachten Sie den folgenden **Hinweis** zum Thema „Richtwerte“. Auf Grund der komplexen Zusammensetzung der Kunststoffe werden ausschließlich Richtwerte in diesem Tabellenbuch verwendet.

Bei der praktischen Anwendung und Verarbeitung von Werkstoffen, insbesondere von Kunststoffen, haben die spezifischen Stoffangaben (Material- bzw. Sicherheitsdatenblätter) und Fachhinweise der Hersteller stets Vorrang.

 ⇒  Seite 3 Entsprechende Stellen bzw. Seiten sind mit diesem Symbol gekennzeichnet.

Der Verlag und das Autorenteam danken für die zahlreichen Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge. Ihre Anmerkungen und Fragen nehmen wir gerne unter folgender E-Mail-Adresse entgegen: lektorat@europa-lehrmittel.de

1. Naturwissenschaftlich-technische Grundlagen

N

2. Technische Kommunikation

T

3. Werkstofftechnik

W

4. Maschinenelemente

M

5. Automatisierungstechnik

A

6. Fertigungstechnik

F

7. Verfahrenstechnik

V

8. Kunststofffenster und Apparatebau

K

Inhaltsverzeichnis

1 Naturwissenschaftlich-technische Grundlagen

1.1 Technische Mathematik		
Allgemeine Grundlagen	10	Belastungsfälle und Beanspruchungsarten
Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	12	Beanspruchung auf Zug bei Metallen und Kunststoffen
Gleichungen und Formeln	13	E-Modul, Beanspruchung auf Druck und Flächenpressung
Prozentrechnung	14	Beanspruchung auf Knickung, Abscherung und Scherschneiden .
Dreisatz und Verhältnisgleichung . . .	15	Beanspruchung auf Biegung und Torsion
Teilung von Längen, Bogenlänge und gestreckte Länge	16	Flächen- und Widerstandsmomente.
Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck	17	Temperaturskalen, thermische Längen- und Volumenausdehnung
Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck	18	Wärmemenge, Wärmeübertragung und Wärmestrom
Winkelfunktionen im schiefwinkligen Dreieck	19	Elektrotechnische Grundlagen.
Flächenberechnungen	20	1.3 Technische Chemie
Volumenberechnungen.	23	Atom – Modelle und Begriffe
Masse von geometrischen Körpern .	26	Periodensystem der Elemente
Linien- und Flächenschwerpunkte. . .	27	Molekül – Bindungen und Modelle . .
1.2 Technische Physik		Chemische Formeln, Reaktionsgleichungen und pH-Wert
Physikalische Größen und Einheiten.	28	Chemikalien in der Kunststofftechnik
Kräfte	31	Organische Kohlenwasserstoffe
Reibung	33	Rohstoffe für Kunststoffe
Drehmoment und Hebel	34	Grundlagen der Kunststoffchemie . .
Mechanische Arbeit und Energie. . . .	35	Polymerisation
Mechanische Leistung und Wirkungsgrad	36	Polykondensation und Polyaddition .
Arten von Bewegungen.	37	Bindungskräfte
Geschwindigkeiten an Maschinen. . .	38	Rohstoffliches Werkstoffrecycling auf chemischer Basis.
Druckarten und Auftriebskraft	39	
Druck, Volumenstrom und Durchflussgeschwindigkeit	40	

2 Technische Kommunikation

2.1 Darstellung durch Zeichnungen mit Maßeintragungen		
Zeichnungstechnische Grundlagen. .	72	Vereinfachung von Zeichnungen
Beschriftung von Zeichnungen	73	2.2 Diagramme und Abwicklungen
Normzahlen und Maßstäbe	74	Kartesisches Koordinatensystem . . .
Positionsnummern und Stückliste. . .	75	Polarkoordinaten und Flächendiagramme
Linien	76	Bestimmung der wahren Größe von Linien und Flächen
Grundregeln der Zeichnungsdarstellung	77	Schnitte an Grundkörpern und Abwicklungen
Projektionsmethoden	78	Abwicklungen von Falt- und Übergangskörpern
Ansichten.	80	2.3 Maschinen- und Werkstückelemente
Schnittdarstellung in Zeichnungen . .	82	Zahnräder
Maßeintragungen in Zeichnungen . .	85	Wälzlager
Bemaßungsregeln	87	Dichtungen
Bemaßungsarten	88	Sicherungsringe und Nuten für Sicherungsringe, Federn, Keilwellen und Kerbverzahnungen . .
Teilungen	89	
Maßeintragungen mit speziellen Symbolen	90	
Maßeintragungen an Fasen, Senkungen und Toleranzangaben .	91	

Inhaltsverzeichnis

Werkstückkanten und Butzen an Drehteilen	102	Angaben zur Oberflächenbeschaffenheit	112
Gewinde und Schraubenverbindungen.	103	Rauheitswerte von Werkstückoberflächen.	113
Gewindeausläufe und Gewindefreistiche	104	Werkstückbeschichtungen	114
Zentrierbohrungen und Rändel	105	Härteangaben wärmebehandelter Werkstücke	115
Freistiche	106		
2.4 Fügedarstellungen, Oberflächen- und Wärmebehandlungsangaben		2.5 Toleranzen und Passungen	
Symbole für Schweiß- und Lötnähte	107	Allgemeine Grundlagen des ISO-Systems	116
Sinnbilder für Schweißen und Löten	108	ISO-Systeme für Grenzmaße und Passungen	117
Darstellung von Schweiß- und Lötverbindungen	109	ISO-Passungen	118
Bemaßungsbeispiele von Schweiß- und Lötverbindungen	110	ISO-Passungen	120
Gestaltabweichungen und Rauheitskenngrößen	111	Passungsempfehlungen	124
		Allgemeintoleranzen	125
		Toleranzen für Kunststoff-Formteile	126
		Geometrische Tolerierung	129

3 Werkstofftechnik

3.1 Eigenschaften der Werkstoffe		3.3 Kunststoffe	
Werkstoffe und deren Stoffwerte	132	Einteilung der Kunststoffe	168
Thermoplaste im Überblick	134	Vergleich der Zustandsdiagramme	169
Thermo- und Duroplaste im Überblick	135	Kunststofferkennung	170
Elastomere im Überblick	136	Zustandsdiagramme der Thermoplaste	172
Thermoplastische Elastomere – TPE im Überblick	137	Thermoplaste	174
Biokunststoffe im Überblick	138	Zustandsdiagramm der Duroplaste	191
Chemische Beständigkeit der Kunststoffe	139	Duroplaste	192
Beständigkeit der Kunststoffe bei Umwelteinflüssen	141	Zustandsdiagramm der Elastomere	197
		Elastomere	198
		Zustandsdiagramm der thermoplastischen Elastomere – TPE	209
		Thermoplastische Elastomere	210
		Halbzeuge aus Thermoplasten.	213
3.2 Metalle		3.4 Additive, Verbundwerkstoffe und Verstärkungstoffe	
Einteilung der Eisenwerkstoffe	142	Additive	215
Normbezeichnung der Stähle.	143	Verbundwerkstoffe.	217
Baustähle.	146	Verstärkungstoffe.	218
Werkzeugstähle	151		
Handelsformen von Stählen.	152	3.5 Werkstoffprüfung	
Wärmebehandlung von Stählen	161	Prüfungen an metallischen Werkstoffen.	219
Eisen-Gusswerkstoffe	162	Prüfungen an Kunststoffen.	224
Nichteisenmetalle	164		
Leichtmetall-Legierungen.	165		
Schwermetall-Legierungen	167		

4 Maschinenelemente

4.1 Gewinde		Trapezgewinde und Sägewinde	246
Übersicht der gängigen Gewindearten.	244	Whitworth-Gewinde und Rohrgewinde.	247
Metrisches ISO-Gewinde und Feingewinde	245	Gewindetoleranzen	248

Inhaltsverzeichnis

4.2 Schrauben, Muttern, Gewindeeinsätze und Senkungen	
Schrauben – Bezeichnung und Übersicht	249
Festigkeitsklassen und Mindesteinschraubtiefen	251
Sechskantschrauben	252
Zylinderschrauben mit Innensechskant	254
Linsenschrauben und Blechschrauben	256
Stiftschrauben, Ringschrauben und Verschlusschrauben	257
Gewindestifte	258
Auslegung von Schraubenverbindungen	259
Muttern – Bezeichnung und Übersicht	263
Muttern – Sonderformen, Kronenmutter und Ringmuttern ..	264
Muttern – Festigkeitsklassen und Sechskantmuttern	265
Sechskantmuttern und Nutmuttern ..	266
Scheiben-Bezeichnung und Übersicht	267
Gewindeeinsätze für Thermoplaste ..	268
Gewindefurchende Schrauben und Kunststoffschrauben	269
Senkungen für Zylinder- und Sechskantschrauben	270
Senkungen für Senkschrauben	271
4.3 Stifte, Bolzen, Federn, Griffe, Riemen und Zahnräder	
Stifte und Bolzen – Bezeichnung sowie Übersicht	272
Zylinderstifte, Kegelstifte, Spannstifte und Bolzen	273
Zylindrische Schrauben-Druckfedern	274
Griffe und Kugelknöpfe	275
Riemen – Übersicht	276
Zahnräder	277
Riemtrieb und Zahnradtrieb – Übersetzungen	278
4.4 Welle-Nabe-Verbindungen	
Passfedern und Keile – Bezeichnung ..	279
Metrische Kegel und Morsekegel ..	280
4.5 Lager, Schmierstoffe und Instandhaltung	
Wälzlager – Übersicht und Eigenschaften	281
Wälzlager – Bezeichnung	282
Kugellager	283
Kugellager und Zylinderrollenlager ..	284
Kegelrollenlager und Pendelrollenlager	285
Nadellager und Sicherungsringe	286
Dichtringe	287
Gleitlager – Übersicht und Eigenschaften	288
Gleitlagerbuchsen	289
Schmieröle	290
Schmierfette und Festschmierstoffe ..	291
Instandhaltung	292
5 Automatisierungstechnik	
5.1 Steuern und Regeln pneumatischer und hydraulischer Anlagen	
Steuerkette und Regelkreis	294
Pneumatische und hydraulische Schaltpläne	295
Ventile und Selbsthaltung	299
Symbole und Proportionalventile ..	300
5.2 Darstellung und Auslegung von pneumatischen und hydraulischen Anlagen	
Funktionsdiagramme	302
Arbeitsablaufbeschreibung einer pneumatischen Steuerung	303
Pneumatikzylinder	304
Verdichter und Druckbehälter	306
Hydraulikzylinder und Hydraulikpumpen	307
Druckflüssigkeiten	308
5.3 Grafcet	
Grundstruktur und Ablaufkette	309
Transitionen und Aktionen	310
Kontinuierlich und speichernd wirkende Aktionen	311
Ablaufkette und Verzweigungen	312
Ablaufsteuerungen mit GRAFCET ..	313
5.4 Darstellung und Auslegung von elektropneumatischen Anlagen	
Elektropneumatischer Schaltplan ..	314
Schaltzeichen	315
Sensoren	316
Elektropneumatische Steuerung	318
Binäre Verknüpfungen	319
5.5 SPS – Speicherprogrammierbare Steuerungen	
Programmiersprachen	320
Anweisungsliste, Kontaktplan und Funktionsplan	321
Ablaufsteuerung mit SPS	323

Inhaltsverzeichnis

5.6 Robotik und Handhabungstechnik

Koordinatensysteme und Achsen von Robotern	324
Aufbau von Robotern	325
Greiferarten, Nullpunkte und Kenndaten	326

5.7 Schutzmaßnahmen in elektrischen Anlagen

Verteilungssysteme – Netzformen .	327
Gefahren und Erste Hilfe bei Stromunfällen	328
Fehlerarten	329
Stromwirkungen auf den Menschen	330
Schutzmaßnahmen gegen gefährliche Ströme	331
Gefahren beim Betreiben von Motoren	334

6 Fertigungstechnik

6.1 Spanen

Kräfte und Leistungen beim Spanen	336
Schnittgeschwindigkeit, Werkzeugdurchmesser und Drehzahl	339
Spiralbohrer – Richtwerte und Auswahlkriterien	340
Drehwerkzeuge – Richtwerte und Auswahlkriterien	341
Walzenstirnfräser – Richtwerte und Auswahlkriterien	342
Gewindebohrer und Reibahlen – Richtwerte und Auswahlkriterien	343
Spanende Bearbeitung von Kunststoffen	344

6.2 Kleben

Bindungskräfte und Klebstoffe	345
Fachbegriffe und Gestaltung von Klebeverbindungen	346
Vorbehandlung von Kunststoffen . .	347
Geeignete Klebstoffe für Kunststoffe	348

6.3 Umformen

Thermoformen – Umformbereiche von Thermoplasten	349
Thermoformen – Positivformen und Negativformen	350
Thermoformen – Spezielle Verfahren und Werkzeuge	351
Thermoformen – Umformtemperaturen und Maschinentypen	352
Biegen – Biegeradien und Zuschnittlängen	353
Biegen – Ausgleichswerte, Zuschnittlänge und Rückfederung	354

6.4 Schweißen von Kunststoffen

Schweißbarkeit von Kunststoffen . .	355
Heizelementschweißen	356
Heizwendelschweißen	357
Warmgasschweißen	358

6.5 Qualitätsmanagement – QM

Normenreihe – DIN EN ISO 9000 . . .	360
Statistische Auswertung	362
Normalverteilung	363
Statistische Qualitätskontrolle und Prozessregelung SPC	364
Maschinenfähigkeit, Prozessfähigkeit und Prozessverläufe	365
AQL-Stichprobensystem	366
AQL-Tabellen: Einfachstichprobenprüfung	367
AQL-Tabellen: Doppelstichprobenprüfung	368

6.6 Arbeitssicherheit und Umweltschutz

Sicherheitszeichen	369
Warnzeichen für gefährliche Stoffe.	373
Gefahrensymbole für gefährliche Stoffe	374
Gasflaschen für den industriellen Einsatz	375
Farbkennzeichnung für Gasflaschen	376
Durchflussstoffe – Markierungen für Rohrleitungen	377
Sicherheitsdatenblatt	378
Sicherheitshinweise für Gefahrstoffe	380
Farbsignale für Taster und Leuchtmelder	382

7 Verfahrenstechnik

7.1 Vor- und Nachbehandlung

Vorbehandlung	384
-------------------------	-----

Nachbehandlung	387
--------------------------	-----

Inhaltsverzeichnis

7.2 Extrudieren	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	389
Verarbeitungsparameter	393
Verfahrensspezifische	
Berechnungen	394
Fehleranalyse	398
7.3 Blasformen	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	399
Verarbeitungsparameter	402
Verfahrensspezifische	
Berechnungen	403
Fehleranalyse	404
7.4 Spritzgießen	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	405
Verarbeitungsparameter	413
Verfahrensspezifische	
Berechnungen	425
Fehleranalyse	427
7.5 Pressen	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	428
Verarbeitungsparameter	429
Verfahrensspezifische	
Berechnungen	431
Fehleranalyse	432
7.6 Beschichten	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	433
Verarbeitungsparameter	435
Verfahrensspezifische	
Berechnungen	436
7.7 Laminieren	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	437
Verarbeitungsparameter	439
Verfahrensspezifische	
Berechnungen	440
7.8 Schäumen	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	441
Verarbeitungsparameter	443
Verfahrensspezifische	
Berechnungen	444
Fehleranalyse	444
7.9 Kalandrieren	
Maschinenaufbau und	
Verfahrenstechnik	445
Fehleranalyse	448
7.10 Recycling	
Recyclingarten	449
Recyclingcode	450

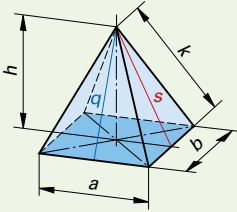
8 Kunststoffenster und Apparatebau

8.1 Aufbau und Unterscheidungsmerkmale von Fenstern	
Fensteraufbau, Rohbaumaße und	
Öffnungsarten	452
Fensterprofil und Verklotzung	453
Sichtprüfung bei Gläsern und	
Einsetzen der Fenster	454
8.2 Anforderungen an Fenster und Außentüren	
Luftdurchlässigkeit der Fugen	455
Fugendichtstoffe und	
Fugenausführungen	456
Fugenabmessungen und	
Beanspruchung der Verglasung	457
Glasdicken in Abhängigkeit der	
Windbelastung	458
8.3 Verglasung	
Wärmeschutzglas	459
Schallschutzglas	460
Sicherheitsglas	461
Brandschutzglas der	
Feuerwiderstandsklasse F	462
Brandschutzglas der	
Feuerwiderstandsklasse G	463
8.4 Bauphysik	
Wärmedurchgang und	
Wärmestrahlung	464
Wärmedurchgangskoeffizient	465
Schallschutz	467
Raumklima	469
8.5 Apparatebau	
Elemente des Apparatebaus	470
Kunststoffrohre	471
Rohrverbindungen für Rohre aus	
PVC-U	472
Rohrverbindungen aus PE-HD, PB	
und Armaturen	473
Einsatzgebiete der Werkstoffe	474
Glossar zum Tabellenbuch	475
Firmen- und Bildquellenverzeichnis	477
Normung, Begriffe und	
Normenarten	478
Normenverzeichnis	479
Wörterbuch Kunststofftechnik	
DEUTSCH / ENGLISCH	482
Sachwortverzeichnis	488



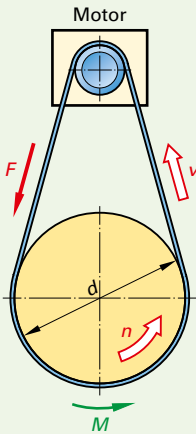
1 Naturwissenschaftlich-technische Grundlagen

1.1 Technische Mathematik



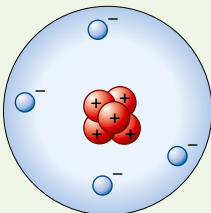
Allgemeine Grundlagen	10
Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	12
Gleichungen und Formeln	13
Prozentrechnung	14
Dreisatz und Verhältnisgleichung	15
Teilung von Längen, Bogenlänge und gestreckte Länge	16
Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck	17
Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck	18
Winkelfunktionen im schiefwinkligen Dreieck	19
Flächenberechnungen	20
Volumenberechnungen	23
Masse von geometrischen Körpern	26
Linien- und Flächenschwerpunkte	27

1.2 Technische Physik



Physikalische Größen und Einheiten	28
Kräfte	31
Reibung	33
Drehmoment und Hebel	34
Mechanische Arbeit und Energie	35
Mechanische Leistung und Wirkungsgrad	36
Arten von Bewegungen	37
Geschwindigkeiten an Maschinen	38
Druckarten und Auftriebskraft	39
Druck, Volumenstrom und Durchflussgeschwindigkeit	40
Belastungsfälle und Beanspruchungsarten	41
Beanspruchung auf Zug bei Metallen und Kunststoffen	43
E-Modul, Beanspruchung auf Druck und Flächenpressung	44
Beanspruchung auf Knickung, Abscherung und Scherschneiden	45
Beanspruchung auf Biegung und Torsion	46
Flächen- und Widerstandsmomente	47
Temperaturskalen, thermische Längen- und Volumenausdehnung	48
Wärmemenge, Wärmeübertragung und Wärmestrom	49
Elektrotechnische Grundlagen	50

1.3 Technische Chemie



Atom – Modelle und Begriffe	57
Periodensystem der Elemente	58
Molekül – Bindungen und Modelle	60
Chemische Formeln, Reaktionsgleichungen und pH-Wert	61
Chemikalien in der Kunststofftechnik	62
Organische Kohlenwasserstoffe	63
Rohstoffe für Kunststoffe	65
Grundlagen der Kunststoffchemie	66
Polymerisation	67
Polykondensation und Polyaddition	68
Bindungskräfte	69
Rohstoffliches Werkstoffrecycling auf chemischer Basis	70



Allgemeine Grundlagen

Griechisches Alphabet



Anwendungsbeispiele in der Mathematik

Delta Δ	Differenzzeichen
Sigma Σ	Summenzeichen
Pi π	Kreiszahl (= 3,141592...)

Anwendungsbeispiele in der Physik und Chemie

Beta β	Massenkonzentration
Eta η	Wirkungsgrad
Theta θ	Temperatur
Rho ρ	Dichte
Xi (Ksi) ξ	Umsatzvariable
Psi Ψ	Volumenverhältnis

Buchstabenname	Schreibweisen				Buchstabenname	Schreibweisen			
	groß		klein			groß		klein	
Alpha	A	Α	α	α	Ny	N	Ν	ν	ν
Beta	B	Β	β	β	Xi (Ksi)	Ξ	Ξ	ξ	ξ
Gamma	Γ	Γ	γ	γ	Omikron	Ο	Ο	ο	ο
Delta	Δ	Δ	δ	δ	Pi	Π	Π	π	π
Epsilon	Ε	Ε	ε	ε	Rho	Ρ	Ρ	ρ	ρ
Zeta	Ζ	Ζ	ζ	ζ	Sigma	Σ	Σ	ς σ	σ
Eta	Η	Η	η	η	Tau	Τ	Τ	τ	τ
Theta	Θ	Θ	θ ϑ	θ	Ypsilon	Υ	Υ	υ ὕ	υ
Jota	Ι	Ι	ι	ι	Phi	Φ	Φ	φ	φ
Kappa	Κ	Κ	κ	κ	Chi	Χ	Χ	χ	χ
Lambda	Λ	Λ	λ	λ	Psi	Ψ	Ψ	ψ	Ψ
My	Μ	Μ	μ	μ	Omega	Ω	Ω	ω	ω

Römische Zahlen



römische Grundziffern

römisch	I	V	X	L	C	D	M
arabisch	1	5	10	50	100	500	1000

Aus den römischen Grundziffern werden alle römischen Zahlen gebildet. Die Zeichen werden entsprechend ihrem Wert absteigend von links nach rechts geordnet. Die Ziffern I, X, C und M dürfen maximal dreimal direkt nebeneinanderstehen. V, L und D dürfen **nicht** nebeneinanderstehen. Es gibt kein Zeichen für die 0.

römische Zahlen in arabische Zahlen umrechnen

Beispiele

römisch	XII = X + I + I	IV = V - I	XLIX = (L - X) + (X - I)
arabisch	12 = 10 + 1 + 1	4 = 5 - 1	49 = (50 - 10) + (10 - 1)

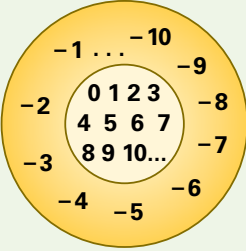
römische Zahlen

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XX	XXI	XXX	XC	CD	DCCC	IM	MMXX
11	12	20	21	30	90	400	800	999	2020



Allgemeine Grundlagen

Addition und Subtraktion



Kommutativgesetz – Vertauschen von Summanden

$$a + b + c = a + c + b$$

$$7 + 3 + 1 = 7 + 1 + 3 = 11$$

$$7 + 3 + 1 = 1 + 7 + 3 = 11$$

Assoziativgesetz – Zusammenfassen von Summanden

$$a + b + c = a + (c + b)$$

$$7 + 3 + 1 = 7 + (1 + 3) = 11$$

$$7 + 3 + 1 = 1 + (7 + 3) = 11$$

Vorzeichenregeln – Zusammenfassen von Summanden

$$(+ a) + (+ b) = (+ a) - (- b) = a + b$$

$$(+ 4) + (+ 5) = (+ 4) - (- 5) = 9$$

$$(+ a) + (- b) = (+ a) - (+ b) = a - b$$

$$(+ 4) + (- 5) = (+ 4) - (+ 5) = - 1$$

$$a - (b + c - d) = (a - b - c + d)$$

$$15 - (2 + 4 - 3) = (15 - 2 - 4 + 3) = 12$$

Multiplikation und Division

X	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9
4	0	4	8	12
5	0	5	10	15

Kommutativgesetz – Vertauschen von Faktoren

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$$

$$7 \cdot 3 \cdot 1 = 7 \cdot 1 \cdot 3 = 21$$

$$7 \cdot 3 \cdot 1 = 1 \cdot 7 \cdot 3 = 21$$

Assoziativgesetz – Zusammenfassen von Faktoren

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (c \cdot b)$$

$$7 \cdot 3 \cdot 1 = 7 \cdot (1 \cdot 3) = 21$$

$$7 \cdot 3 \cdot 1 = 1 \cdot (7 \cdot 3) = 21$$

Vorzeichenregeln – Zusammenfassen von Faktoren

$$(+ a) \cdot (+ b) = (- a) \cdot (- b) = + ab$$

$$(+ 4) \cdot (+ 5) = (- 4) \cdot (- 5) = 20$$

$$(+ a) \cdot (- b) = (- a) \cdot (+ b) = - ab$$

$$(+ 4) \cdot (- 5) = (- 4) \cdot (+ 5) = - 20$$

Distributivgesetz – Multiplizieren mit Summen

$$a \cdot (b - c) = ab - ac$$

$$7 \cdot (3 - 1) = 7 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 7 \cdot 2 = 14$$

Ausklammern gleicher Faktoren

$$ab - ac = a \cdot (b - c)$$

$$7 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 7 \cdot (2 - 3) = 7 \cdot (- 1) = - 7$$

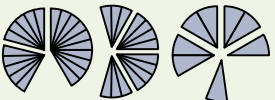
Multiplizieren von Summen

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(4 + 5) \cdot (6 - 3) = 9 \cdot 3 = 27$$

$$4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 27$$

Bruchrechnung



echter Bruch	unechter Bruch	Scheinbruch	gemischte Zahl
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{1}$	$5 \frac{1}{3}$

Rechenoperationen

Erweitern	$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$	Kürzen	$\frac{14}{16} = \frac{14 : 2}{16 : 2} = \frac{7}{8}$	$\frac{12 ab}{16 bc} = \frac{3 a}{4 c}$
-----------	---	--------	---	---

Hauptnenner bilden und addieren	$\frac{1}{10} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$
---------------------------------	---

Multiplizieren	$\frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	Dividieren	$\frac{3}{10} : 2 = \frac{3 \cdot 1}{10 \cdot 2} = \frac{3}{20}$
	$\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 8} = \frac{27}{32}$		$\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzen

N

2⁶ = 64

- 2 Grundzahl (Basis)
- 6 Exponent
- 64 Potenzwert

Potenzierung			
$a^n = c$	$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^3 = 8$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
Basis a, Exponent n, Potenzwert c		Sprechweise: 2 hoch 3	
Sonderfälle			
$a^0 = 1$	$1^n = 1$	$10^0 = 1$	$34^0 = 1$ $10^1 = 1$ $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ $-10^{-1} = \frac{1}{-10} = -0,1$
$a^1 = a$	$0^n = 0$	$602^1 = 602$	$0^{89} = 0$
Produkt von Potenzen			
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$	
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$		$2^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 4)^2 = 8^2 = 64$	
Quotient von Potenzen ($b \neq 0$)			
$a^m : b^n = a^{m-n}$	$a^m : b^m = (a : b)^m$	$4^2 : 2^2 = (4 : 2)^2 = 2^2 = 4$	
Summe und Differenz von Potenzen			
$xa^n + ya^n - za^n = (x + y - z) a^n$		$3a^3 + 2a^3 - a^3 = (3 + 2 - 1) a^3 = 4a^3$	

Wurzeln

6th√64 = 2

- 6 Wurzelexponent
- 64 Radikand
- 2 Wurzelwert

Radizierung			
$\sqrt[n]{a} = c$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$	$\sqrt[5]{3125} = 5$ $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$ $\sqrt[2]{10} = \sqrt{10}$
Radikand a, Wurzelexponent n, Wurzelwert c		Sprechweise für $\sqrt[5]{3125}$: 5. Wurzel von 3125	
Sonderfälle			
$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$\sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ $\sqrt[0]{a} = \text{nicht definiert}$
$\sqrt[3]{-a} = -c$	$\sqrt[3]{-a} = \text{nicht definiert}$	$a = \pm \sqrt[n]{b}$, dann $a_1 = +\sqrt[n]{b}$ $a_2 = -\sqrt[n]{b}$	
Wurzeln mit Bruchpotenzen			
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$(\sqrt[3]{27})^2 = \sqrt[3]{27^2} = 27^{\frac{2}{3}} = 9$	
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$		$\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = 3 \cdot \sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{512 \cdot 3} = 512^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2$	
Produkt von Wurzeln			
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$		$\sqrt[5]{625} \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{625 \cdot 5} = \sqrt[5]{3125} = 5$	
Quotient von Wurzeln ($b \neq 0$)			
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$		$\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$	

Logarithmen

log₂ 64 = 6

- log₂ Basis 2
- 64 Logarithmand (Numerus)
- 6 Logarithmuswert

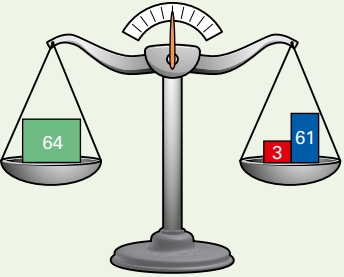
Logarithmierung			
$\log_n a = c$, wenn $n^c = 1$ für $n > 0$ und $a > 0$		$\log_2 16 = 4$	
Logarithmand a, Basis n, Logarithmuswert c		Sprechweise für $\log_2 16 = 4$ 4 ist der Logarithmus von 16 zur Basis 2	
dekadischer Logarithmus lg a		natürlicher Logarithmus ln a	
$\lg a = \log_{10} a$	$\lg 1 = 0$	$\lg 10 = 1$	$\ln a = \log_e a$ mit $e = 2,7182\dots$ $\ln 1 = 0$
Logarithmengesetze, für Basen $n > 0$			
$\log(ab) = \log a + \log b$	$\log(a:b) = \log a - \log b$	$\log(a^m) = m \log a$	



Gleichungen und Formeln

Gleichungen umformen


Äquivalentes Umformen von Gleichungen bedeutet, beide Seiten einer Gleichung dürfen getauscht und durch Rechnungsoperationen gleichwertig geändert werden.

Waage und Gleichung	Gleichheitsgrundsatz
 <p>64 = 3 + x</p> <p>Auflösen nach x</p> <p>Ausgangsgleichung: $64 = 3 + x$</p> <p>3 subtrahieren: $64 - 3 = 3 + x - 3$</p> <p>nach dem Subtrahieren: $61 = x$</p> <p>Seiten vertauschen: $x = 61$</p> <p>Lösung: $x = 61$</p> <p>Probe: $64 = 3 + 61 \Rightarrow 64 = 64$</p>	<p>Beispiel: $64 = 3 + x$</p> <p>Das Gleichgewicht einer Waage ist mit den beiden Seiten einer Gleichung vergleichbar.</p>
	<p>linke Formelseite (Linksterm) rechte Formelseite (Rechtsterm)</p> <p>$64 = 3 + x$</p>
	<p>Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.</p>
	<p>$3 + x = 64$</p>
	<p>Die Variable x ist ein Platzhalter für einen Zahlenwert</p>
	<p>Veränderungsoperation</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Veränderungen sind stets so auszuführen, dass das Gleichgewicht erhalten bleibt. Auf beiden Seiten sind die gleichen Rechenoperationen (addieren, subtrahieren oder multiplizieren etc.) erforderlich. Wird auf der linken Formelseite z. B. 100 addiert, dann erfolgt auf der rechten Formelseite das Gleiche.
	<p>$3 + x + 100 = 64 + 100$</p>
	<p>Grundregel</p> <p>Die gesuchte Größe x soll auf der linken Seite isoliert werden. Das nebenstehende Beispiel erklärt das Auflösen nach x.</p>

Regeln für das äquivalente Umstellen von Gleichungen		
Seiten gegeneinander vertauschen	gleichen Wert addieren , z. B. 4	gleichen Wert subtrahieren , z. B. 9
$64 = 3 + x \Rightarrow 3 + x = 64$	$64 = 3 + x \Rightarrow 4 + 64 = 4 + 3 + x$	$64 = 3 + x \Rightarrow -9 + 64 = -9 + 3 + x$
gleichen Wert multiplizieren , z. B. 2	gleichen Wert dividieren , z. B. 8	auf beiden Seiten Kehrwert bilden
$64 = 3 + x \Rightarrow 2 \cdot 64 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot x$	$64 = 3 + x \Rightarrow \frac{64}{8} = \frac{3}{8} + \frac{x}{8}$	$64 = 3 + x \Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{(3 + x)}$
auf beiden Seiten quadrieren	auf beiden Seiten Wurzel ziehen	auf beiden Seiten logarithmieren
$64 = 3 + x \Rightarrow 64^2 = (3 + x)^2$	$64 = 3 + x \Rightarrow \sqrt{64} = \sqrt{(3 + x)}$	$64 = 3 + x \Rightarrow \ln 64 = \ln(3 + x)$

Formeln umstellen

Formeln werden umgestellt, damit die gesuchte Größe allein auf der linken Seite der Gleichung steht. Es werden die gleichen Regeln wie beim Umformen von Gleichungen angewendet.	<p>Beispiel: Formel Druck ermitteln</p> <div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; display: inline-block;"> $p = \frac{F}{A}$ </div>	<p>Formeln sind Gleichungen, die vorwiegend Formelzeichen, z. B. p, F und A enthalten. Damit wird der mathematische Zusammenhang zwischen physikalischen Größen erfasst.</p>
--	---	--

	Beispiel: Auflösen nach F \Rightarrow 1. Ausgangslage 2. Seiten tauschen 3. mit A multiplizieren		
	1.	2.	3.
	$p = \frac{F}{A}$	$\frac{F}{A} = p$	$\frac{F}{A} \cdot A = p \cdot A \Rightarrow \frac{F}{\cancel{A}} \cdot \cancel{A} = p \cdot A$



Prozentrechnung

Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

N

Grundwert G	Prozentwert W	Prozentsatz p	Beispiel
$G = \frac{W \cdot 100 \%}{p}$	$W = \frac{G \cdot p}{100 \%}$	$p = \frac{W \cdot 100 \%}{G}$	Von 800 Formteilen weisen 12 einen Fehler auf.
Das Ganze gibt den Grundwert G an, z. B. Gesamtmenge 800 Stück Formteile.	Der Prozentwert W gibt an, wie groß der Anteil ist, z. B. Fehlermenge 12 Stück.	Der Prozentsatz p gibt an, welcher Anteil vom Ganzen zu bilden ist, z. B. 1,5 % fehlerhafte Formteile.	Wie viel Prozent der Teile sind fehlerhaft? $p = \frac{12 \text{ Stück} \cdot 100 \%}{800 \text{ Stück}}$ $p = 1,5 \%$

Prozent : 1 % = 1/100 = 0,01

%

erhöhter Grundwert	Beispiel
$G_{\max} = G + W$ $G = \frac{G_{\max} \cdot 100 \%}{100 \% + p}$	3 % Lohnerhöhung und 15,00 € neuer Stundenlohn. Errechnen Sie den vorherigen Stundenlohn. $G = \frac{15,00 \text{ €} \cdot 100 \%}{100 \% + 3 \%} = 14,56 \text{ €}$
verminderter Grundwert	Beispiel
$G_{\min} = G - W$ $G = \frac{G_{\min} \cdot 100 \%}{100 \% - p}$	5 % Granulateinsparung und 95 t neuer Verbrauch. Errechnen Sie den vorherigen Granulatverbrauch. $G = \frac{95 \text{ t} \cdot 100 \%}{100 \% - 5 \%} = 100 \text{ t}$

Zinsrechnen

Kapital K	Zinsen Z	Beispiel
$K = \frac{Z \cdot 100 \%}{p \cdot t}$	$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \%}$	Eine Firma erhält einen Kredit über 30.000 € mit einem Zinssatz von 8,5 %. Wie hoch sind die Zinsen nach einem Jahr? $Z = \frac{30.000 \text{ €} \cdot 8,5 \% \cdot 1}{100 \%}$ $Z = 2.550 \text{ €}$
Zinssatz p	Laufzeit t	
$p = \frac{Z \cdot 100 \%}{K \cdot t}$	$t = \frac{Z \cdot 100 \%}{K \cdot p}$	
Zinseszinsrechnen K_n		Beispiel
$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \%}\right)^n$		Max legt 3.000 € festverzinslich mit 2,0 % an. Wie hoch ist sein Kapital nach drei Jahren? $K_3 = 3.000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{2,0 \%}{100 \%}\right)^3$ $K_3 = 3.183,62 \text{ €}$
Kapital nach n Jahren. Die Zinsen werden dem Kapital zugerechnet und mitverzinst.		



[K] = €; [Z] = €; [p] = %/Jahr; [t] = Jahr; 1 Zinsjahr = 360 Tage; 1 Zinsmonat = 30 Tage



Dreisatz und Verhältnisgleichung

Mit der grafischen Ermittlung, Dreisatzrechnung und Verhältnisgleichungen wird, ausgehend von einer bekannten Größe (z. B. Masse, Kosten, Anzahl, Zeit etc.), ein Vielfaches oder ein Teil ermittelt.

Grafische Ermittlung	Dreisatz	Verhältnisgleichung
----------------------	----------	---------------------

Beispiel 1: Für einen 3D-Drucker wird ABS (Acrylnitril-Butadien-Styrol) zum Drucken benötigt. 8,5 kg ABS kosten 463,25 €. Wie viel kosten 5 kg ABS?

Ergebnisse im Diagramm ablesen	direkt proportional	Erstellen und Umstellen
	<div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;">$m \sim K$</div> <p>Die Kosten sind der Masse direkt proportional.</p> <ol style="list-style-type: none"> 8,5 kg ABS kosten 463,25 € 1 kg ABS kostet $\frac{463,25 \text{ €}}{8,5 \text{ kg}} = 54,50 \text{ €/kg}$ 5 kg ABS kosten $\frac{463,25 \text{ €} \cdot 5 \text{ kg}}{8,5 \text{ kg}} = \mathbf{272,50 \text{ €}}$ 	<div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;">$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1}$</div> <p>Die Kosten verhalten sich zueinander wie die Massen.</p> $\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow K_2 = \frac{m_2 \cdot K_1}{m_1} \Rightarrow$ $K_2 = \frac{5 \text{ kg} \cdot 463,25 \text{ €}}{8,5 \text{ kg}}$ <p>$K_2 = \mathbf{272,50 \text{ €}}$</p>

Beispiel 2: Drei Spritzgießmaschinen (SGM) fertigen 1080 Formteile in 3,33 Stunden. Wie lange dauert das Herstellen der gleichen Formteilmenge mit 5 SGM?

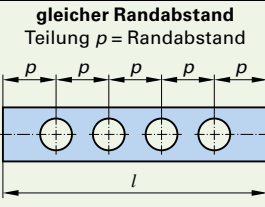
Ergebnisse im Diagramm ablesen	indirekt proportional	Erstellen und Umstellen
	<div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;">$t \sim \frac{1}{n}$</div> <p>Die Zeit ist der Anzahl der SGM indirekt proportional.</p> <ol style="list-style-type: none"> 3 SGM fertig nach 3,33 h 1 SGM benötigt dafür 3,33 h · 3 = 9,99 h 5 SGM fertig nach $\frac{9,99 \text{ h}}{5} = \mathbf{2 \text{ h}}$ 	<div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;">$\frac{t_2}{t_1} = \frac{n_1}{n_2}$</div> <p>Die Zeiten verhalten sich zueinander umgekehrt wie die Anzahl der SGM.</p> $\frac{t_2}{t_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow t_2 = \frac{n_1 \cdot t_1}{n_2} \Rightarrow$ $t_2 = \frac{3 \text{ Stück} \cdot 3,33 \text{ h}}{5 \text{ Stück}}$ <p>$t_2 = \mathbf{2 \text{ h}}$</p>

Beispiel 3: 800 Kunststoffwannen (KSW) werden von vier Facharbeitern (FA) in sechs Stunden angefertigt. Wie viele KSW fertigen fünf FA in der gleichen Zeit? Wie viele KSW können 5 FA in acht Stunden anfertigen?

Zusammengesetzter Dreisatz		
Lösungsansatz für Dreisatz	Lösungsweg für Dreisatz bzw. Verhältnisgleichung	
<p>I doppelte Menge Kunststoffwannen (KSW) erfordern doppelt so viele Facharbeiter (FA).</p> <p>⇒ FA ~ KSW</p> <p>⇒ Lösung mit Dreisatz direkt proportional</p> <p>II doppelte Zeit erfordert nur die halbe Anzahl Facharbeiter (FA) und halbe Zeit erfordert die doppelte Anzahl Facharbeiter.</p> <p>⇒ FA ~ $\frac{1}{t}$</p> <p>⇒ Lösung mit Dreisatz indirekt proportional</p>	<p>Dreisatz direkt proportional</p> <ol style="list-style-type: none"> 4 FA fertigen 800 KSW 1 FA fertigt $\frac{800 \text{ KSW}}{4} = 200 \text{ KSW}$ 5 FA fertigen in der gleichen Zeit $\frac{800 \text{ KSW} \cdot 5}{4} = \mathbf{1000 \text{ KSW}}$ <p>Dreisatz indirekt proportional</p> <ol style="list-style-type: none"> 1000 KSW gefertigt nach 6 h 5 FA fertigen $\frac{1000 \text{ KSW}}{6 \text{ h}} = 166,67 \text{ KSW/h}$ 5 FA fertigen $166,67 \text{ KSW/h} \cdot 8 \text{ h} = 1333,33 \text{ KSW} = \mathbf{1333 \text{ KSW}}$ 	<p>Verhältnisgleichung I</p> $n_1 = 800 \text{ KSW}; x_1 = 4 \text{ FA};$ $x_2 = 5 \text{ FA}; n_2 = ?$ $n_2 = \frac{x_2 \cdot n_1}{x_1}$ $n_2 = \frac{5 \text{ FA} \cdot 800 \text{ KSW}}{4 \text{ FA}}$ <p>$n_2 = \mathbf{1000 \text{ KSW}}$</p> <p>Verhältnisgleichung II</p> $n_2 = 1000 \text{ KSW}; t_2 = 6 \text{ h}; t_3 = 8 \text{ h};$ $n_3 = ?$ $n_3 = \frac{t_2 \cdot n_2}{t_3} = \frac{6 \text{ h} \cdot 1000 \text{ KSW}}{8 \text{ h}}$ <p>$n_3 = 1333,33 \text{ KSW} = \mathbf{1333 \text{ KSW}}$</p>

Teilung von Längen, Bogenlänge und gestreckte Länge

Teilung bzw. Trennung von Längen

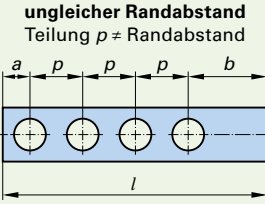


Teilung

$$p = \frac{l}{n+1}$$

l Gesamtlänge in mm
 n Anzahl der Bohrungen
 p Teilung in mm

Beispiel:
 $l = 210 \text{ mm}; n = 6; p = ?$
 $p = \frac{l}{n+1} = \frac{210 \text{ mm}}{6+1} = 30 \text{ mm}$

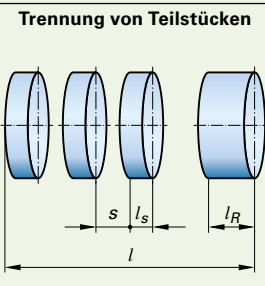


Teilung

$$p = \frac{l - (a + b)}{n - 1}$$

l Gesamtlänge in mm
 n Anzahl der Bohrungen
 p Teilung in mm
 a, b Randabstände in mm

Beispiel:
 $l = 3000 \text{ mm}; n = 31; a = 90 \text{ mm}; b = 60 \text{ mm}; p = ?$
 $p = \frac{l - (a + b)}{n - 1} = \frac{3000 \text{ mm} - 150 \text{ mm}}{31 - 1}$
 $p = 95 \text{ mm}$



Anzahl der Teilstücke z

$$z = \frac{l}{l_s + s}$$

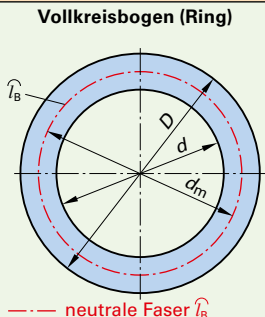
l Gesamtlänge in mm
 l_s Teillänge in mm
 s Schnittbreite in mm

Restlänge l_R in mm

$$l_R = l - z \cdot (l_s + s)$$

Beispiel:
 $l = 4500 \text{ mm}; l_s = 224 \text{ mm}; s = 1,3 \text{ mm}; z = ?; l_R = ?$
 $z = \frac{l}{l_s + s} = \frac{4500 \text{ mm}}{224 \text{ mm} + 1,3 \text{ mm}} = 19,97$
 $z = 19 \text{ Teile}$
 $l_R = l - z \cdot (l_s + s)$
 $= 4500 \text{ mm} - 19 \cdot (224 \text{ mm} + 1,3 \text{ mm})$
 $l_R = 219,3 \text{ mm}$

Bogenlänge bei gebogenen Werkstücken, gestreckte Länge der neutralen Faser



Bogenlänge \hat{l}_B in mm

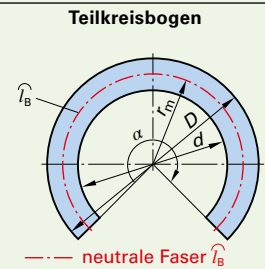
$$\hat{l}_B = d_m \cdot \pi$$

bei symmetrischen Querschnitten (Rohr, Vierkant) gilt:

$$d_m = \frac{D + d}{2}$$

d Innendurchmesser in mm
 D Außendurchmesser in mm
 d_m mittl. Durchmesser in mm

Beispiel:
 $d = 85 \text{ mm}; D = 95 \text{ mm}; \hat{l}_B = ?$
 $d_m = \frac{D + d}{2} = \frac{95 \text{ mm} + 85 \text{ mm}}{2} = 90 \text{ mm}$
 $\hat{l}_B = d_m \cdot \pi = 90 \text{ mm} \cdot \pi = 282,74 \text{ mm}$
Will man die äußere Bogenlänge berechnen, ersetzt man d_m durch D , bei der inneren Bogenlänge nimmt man d statt d_m .



Bogenlänge \hat{l}_B in mm

$$\hat{l}_B = \frac{d_m \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$

$$\hat{l}_B = \frac{r_m \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

r_m mittlerer Radius in mm
 α Mittelpunktswinkel in $^\circ$

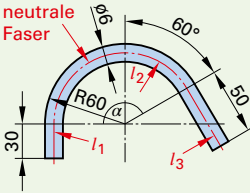
Beispiel:
 $d = 85 \text{ mm}; D = 95 \text{ mm}; \alpha = 310^\circ; \hat{l}_B = ?; d_m = ?; r_m = ?$
 $d_m = \frac{D + d}{2} = \frac{95 \text{ mm} + 85 \text{ mm}}{2} = 90 \text{ mm}$
 $r_m = \frac{d_m}{2} = \frac{90 \text{ mm}}{2} = 45 \text{ mm}$
 $\hat{l}_B = \frac{d_m \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{90 \text{ mm} \cdot \pi \cdot 310^\circ}{360^\circ}$
 $\hat{l}_B = 243,47 \text{ mm}$



Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

Gestreckte Länge bei zusammengesetzten Längen

zusammengesetzte Länge



Die **Gesamtlänge L** der neutralen Faser wird in Teillängen $l_1, l_2, l_3 \dots$ zerlegt.

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_n$$

$$r_m = R - \frac{s}{2}$$

α Biegewinkel in $^\circ$
 s Materialstärke in mm
 r_m mittlerer Radius in mm
 R Radius in mm

Beispiel:

Berechnung der gestreckten Länge L des Hakens

$$l_1 = 30 \text{ mm}; l_3 = 50 \text{ mm}$$

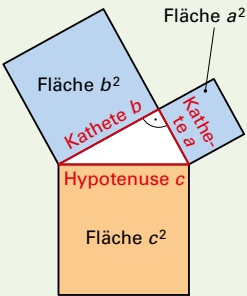
$$r_m = R - \frac{s}{2} = 60 \text{ mm} - \frac{6 \text{ mm}}{2} = 57 \text{ mm}$$

$$l_2 = \frac{r_m \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{57 \text{ mm} \cdot \pi \cdot 150^\circ}{180^\circ} = 149 \text{ mm}$$

$$L = l_1 + l_2 + l_3 = 30 \text{ mm} + 149 \text{ mm} + 50 \text{ mm}$$

$$L = 229 \text{ mm}$$

Satz des Pythagoras



Die Fläche des Quadrates über der Hypotenuse c ist gleich der Summe der beiden Quadrate über den Katheten a und b .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Länge der Hypotenuse

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Länge der Katheten

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

t Tiefe in mm
 D Durchmesser in mm
 r Radius in mm

Beispiel 1:

$$b = 24 \text{ mm}; c = 30 \text{ mm}; a = ?$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(30 \text{ mm})^2 - (24 \text{ mm})^2} = 18 \text{ mm}$$

Beispiel 2:

Eine Kugel mit $D = 130 \text{ mm}$ soll so abgeflacht werden, dass die Abflachung 24 mm breit ist. Gesucht ist die Tiefe t der Abflachung.

Im roten Dreieck gilt:

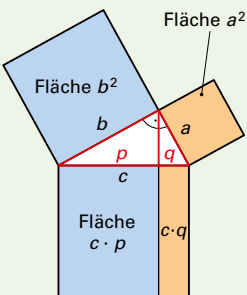
$$c = r = D/2 = 65 \text{ mm}; b = \frac{24}{2} \text{ mm} = 12 \text{ mm}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(65 \text{ mm})^2 - (12 \text{ mm})^2}$$

$$a = 63,9 \text{ mm}$$

$$t = \frac{D}{2} - a = \frac{130 \text{ mm}}{2} - 63,9 = 1,1 \text{ mm}$$

Satz des Euklid (Kathetensatz)



Die Fläche des Quadrates über einer Kathete ist gleich der Rechteckfläche aus Hypotenuse und Hypotenusenabschnitt.

$$a^2 = c \cdot q$$

$$b^2 = c \cdot p$$

a, b Katheten
 p, q Hypotenusenabschnitte
 c Hypotenuse

Beispiel:

Von einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a = 2 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, wie das rote Dreieck im Bild links, sollen die Maße c , p und q berechnet werden.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 4,47 \text{ m}$$

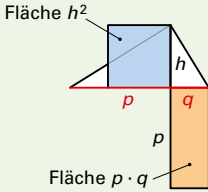
$$a^2 = c \cdot q \Rightarrow q = \frac{a^2}{c} = \frac{(2 \text{ m})^2}{4,47 \text{ m}} = 0,89 \text{ m}$$

$$b^2 = c \cdot p \Rightarrow p = \frac{b^2}{c} = \frac{(4 \text{ m})^2}{4,47 \text{ m}} = 3,58 \text{ m}$$

Es folgt der Höhensatz auf der **Seite 18**.

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Höhensatz



Die Fläche des Quadrates über der Höhe h ist gleich der Rechteckfläche aus den Hypotenusenabschnitten p und q .

$$h^2 = p \cdot q$$

h Höhe des Dreieckes
 p, q Hypotenusenabschnitte

Beispiel:

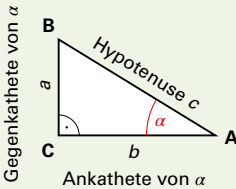
Berechnen Sie die Höhe h eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Hypotenusenabschnitten $p = 90 \text{ mm}$ und $q = 25 \text{ mm}$.

$$h^2 = p \cdot q$$

$$h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{(90 \text{ mm}) \cdot (25 \text{ mm})} = \sqrt{2250 \text{ mm}^2}$$

$h = 47,4 \text{ mm}$

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck und Winkelfunktionen



$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Umkehrung: \arcsin bzw. \sin^{-1}

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Umkehrung: \arccos bzw. \cos^{-1}

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Umkehrung: \arctan bzw. \tan^{-1}

$$\text{Kotangens} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Umkehrung: arc cot bzw. cot^{-1} ohne Einheit

Beispiel:

$\alpha = 30^\circ$; $b = 30 \text{ mm}$;
 $a = ?$; $c = ?$

b ist Ankathete zu α und Gegenkathete zu β

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \Rightarrow$$

$$c = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{30 \text{ mm}}{\cos 30^\circ} = \mathbf{34,6 \text{ mm}}$$

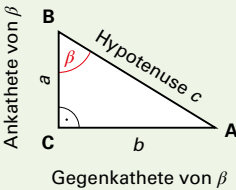
$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \Rightarrow$$

$$a = \sin \alpha \cdot c = \sin 30^\circ \cdot 34,6 \text{ mm} = \mathbf{17,3 \text{ mm}}$$

$$\tan \beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{30 \text{ mm}}{17,3 \text{ mm}} = 1,73$$

$$\Rightarrow \beta = \arctan 1,73 = 60,0^\circ$$

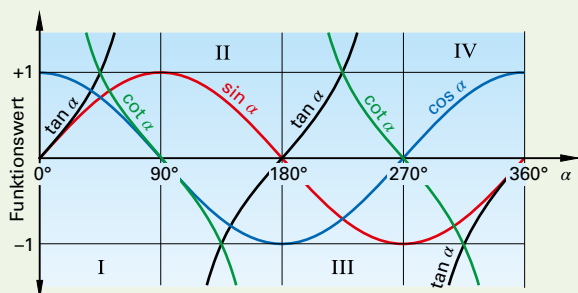
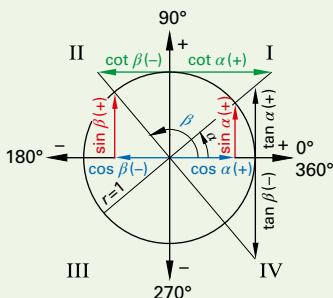
Taschenrechner: \tan^{-1} oder shift tan



Winkelfunktionswerte für spezielle Winkel

Funktion	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
sin	0	0,5	0,707	0,866	+1	0,866	0	-1	0
cos	+1	0,866	0,707	0,5	0	-0,5	-1	0	+1
tan	0	0,57	1	1,73	∞	-1,73	0	∞	0
cot	∞	1,73	1	0,57	0	-0,57	∞	0	∞

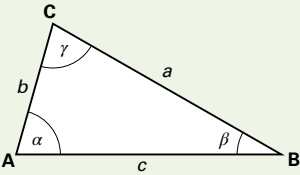
Grafische Darstellung der Winkelfunktionswerte





Winkelfunktionen im schiefwinkligen Dreieck

Sinussatz



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

aufgelöst z. B.:

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{b} \cdot a$$

Beispiel:

$\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $b = 30 \text{ mm}$;
 $c = 41 \text{ mm}$; $a = ?$; $\gamma = ?$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha$$

$$a = \frac{30 \text{ mm}}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 36,7 \text{ mm}$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sin \beta}{b} \cdot c$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin 45^\circ}{30 \text{ mm}} \cdot 41 \text{ mm} \Rightarrow \gamma = 75^\circ$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Seitenberechnung

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

Beispiel:

$\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $b = 30 \text{ mm}$;
 $c = 41 \text{ mm}$; $a = ?$

$$a = \sqrt{(30 \text{ mm})^2 + (41 \text{ mm})^2 - \dots} \\ 2 \cdot 30 \text{ mm} \cdot 41 \text{ mm} \cdot \cos 60^\circ$$

$$a = 36,7 \text{ mm}$$

Winkelberechnung

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

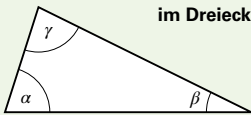
Beispiel:

$a = 36,7 \text{ mm}$; $\beta = 45^\circ$; $b = 30 \text{ mm}$;
 $c = 41 \text{ mm}$; $\alpha = ?$

$$\cos \alpha = \frac{(30 \text{ mm})^2 + (41 \text{ mm})^2 - (36,7 \text{ mm})^2}{2 \cdot 30 \text{ mm} \cdot 41 \text{ mm}}$$

$$\cos \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

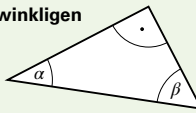
Winkelsummen der Innenwinkel



im Dreieck

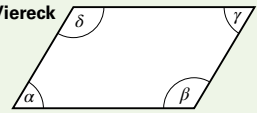
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

im rechtwinkligen
Dreieck



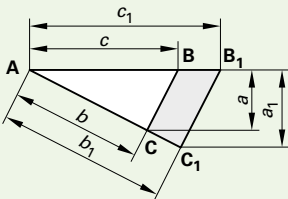
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

im Viereck



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Strahlensatz für Längenteilungen



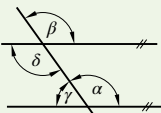
Die von A ausgehenden Geraden (Strahlen) werden von mehreren Parallelen geschnitten. Dabei bilden die Parallelenabschnitte und die zugehörigen Strahlenabschnitte gleiche Verhältnisse.

Dies kann zum Zerlegen von Längen in gleiche Abstände, z. B. bei Abwicklungen, verwendet werden.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$$

Winkelarten



Stufenwinkel

$$\alpha = \beta$$

Scheitelwinkel

$$\beta = \delta$$

Wechselwinkel

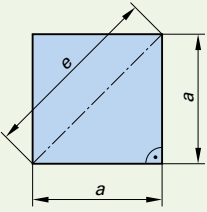
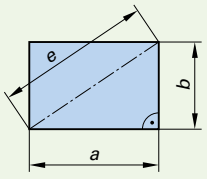
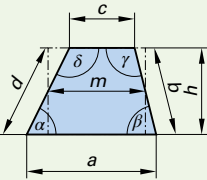
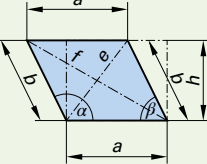
$$\alpha = \delta$$

Nebwinkel

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

Flächenberechnungen

Geradlinig begrenzte Flächen

<p>Quadrat</p> 	<p>Fläche</p> $A = a^2$ <p>Eckenmaß</p> $e = \sqrt{2} \cdot a$ <p>A Fläche e Eckenmaß oder Diagonalenlänge U Umfang</p>	<p>Seitenlänge</p> $a = \sqrt{A}$ <p>Umfang</p> $U = 4 \cdot a$	<p>Beispiel: $a = 11 \text{ mm};$ $A = ?; U = ?; e = ?$ $A = a^2 = (11 \text{ mm})^2 = 121 \text{ mm}^2$ $U = 4 \cdot a = 4 \cdot 11 \text{ mm} = 44 \text{ mm}$ $e = \sqrt{2} \cdot 11 \text{ mm} = 1,4142 \cdot 11 \text{ mm}$ $e = 15,556 \text{ mm}$</p>
<p>Rechteck</p> 	<p>Fläche</p> $A = a \cdot b$ <p>Eckenmaß</p> $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ <p>A Fläche a, b Seitenlängen e Eckenmaß oder Diagonalenlänge U Umfang</p>	<p>Seitenlänge</p> $a = \frac{A}{b}$ <p>Umfang</p> $U = 2 \cdot (a + b)$	<p>Beispiel: $a = 20 \text{ mm}; b = 10 \text{ mm};$ $A = ?; U = ?; e = ?$ $A = 20 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 200 \text{ mm}^2$ $U = 2 \cdot (20 + 10) \text{ mm} = 60 \text{ mm}$ $e = \sqrt{20^2 \text{ mm}^2 + 10^2 \text{ mm}^2}$ $e = 22,361 \text{ mm}$</p>
<p>Trapez</p> 	<p>Fläche</p> $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$ <p>Höhe</p> $h = d \cdot \sin \alpha$ <p>$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^\circ$ A Fläche a, b, c, d Seitenlängen m mittlere Länge h Höhe U Umfang</p>	<p>mittlere Länge</p> $m = \frac{a + c}{2}$ <p>Umfang</p> $U = a + b + c + d$	<p>Beispiel: $a = 20 \text{ mm}; c = 11 \text{ mm}; d = 15 \text{ mm};$ $\sin \alpha = \sin 60^\circ = 0,86603;$ $m = ?; h = ?; A = ?$ $m = \frac{20 \text{ mm} + 11 \text{ mm}}{2} = 15,5 \text{ mm}$ $h = 15 \text{ mm} \cdot 0,86603 = 12,99 \text{ mm}$ $A = 15,5 \text{ mm} \cdot 12,99 \text{ mm}$ $A = 201,35 \text{ mm}^2$</p>
<p>Parallelogramm, Rhomboid</p> 	<p>Fläche</p> $A = a \cdot h$ <p>Eckenmaß</p> $e = \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \beta + b^2}$ $f = \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha + b^2}$ <p>Höhe</p> $h = \frac{A}{a}$ <p>A Fläche a, b Seitenlängen e, f Diagonalenlängen h Höhe U Umfang</p>	<p>Umfang</p> $U = 2 \cdot (a + b)$	<p>Beispiel: $a = 26 \text{ mm}; b = 23 \text{ mm};$ $h = 21,3 \text{ mm};$ $A = ?; U = ?$ $A = 26 \text{ mm} \cdot 21,3 \text{ mm}$ $A = 553,8 \text{ mm}^2$ $U = 2 \cdot (26 \text{ mm} + 23 \text{ mm})$ $U = 98 \text{ mm}$</p>