



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Holz verarbeitende Berufe

Holztechnik – Mathematik

10. überarbeitete Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 4001X

Bearbeiter der „Holztechnik – Mathematik“ sind:

Nutsch, Wolfgang	Dipl.-Ing., Studiendirektor	Stuttgart
Spellenberg, Bernd	Dipl.-Ing., Studiendirektor	Stuttgart

Lektorat und Bildbearbeitung:

Wolfgang Nutsch, Stuttgart, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten

10. Auflage 2015, korrigierter Nachdruck 2023

Druck 5 4

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-4058-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz & Bild: Punkt für Punkt GmbH · Mediendesign, 40549 Düsseldorf

Druck: mediaprint solutions GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Das vorliegende Fachbuch „Holztechnik – Mathematik“ ist überarbeitet worden. Es ergänzt die erfolgreiche Europa-Fachbuchreihe für Berufe der Holztechnik.

Das Buch vermittelt mathematische Grund- und Fachkenntnisse für die Ausbildungsberufe zum Holzmechaniker, Tischler, Fensterbauer und Glaser. Es enthält außerdem wesentliche Ausbildungsinhalte für den Beruf der Technischen Zeichner und Zeichnerinnen mit dem Schwerpunkt Holztechnik. Die einschlägigen Normen wurden berücksichtigt.

Die Gliederung der „Holztechnik – Mathematik“ folgt im Wesentlichen dem zeitlichen Fortschreiten der Ausbildung sowie fachdidaktischen Grundsätzen. Alle zur Ausbildung notwendigen Informationen mit fachmathematischem Inhalt werden in diesem Buch dargestellt. Sie sind sachlogisch nach Leitthemen unterteilt und unter Berücksichtigung des jeweiligen Schwierigkeitsgrades geordnet. Zu jedem Teillernziel gehören Beispiele mit Lösungen und eine Vielzahl von Aufgaben, sodass der Schüler durch Üben der Rechenfertigkeiten eine unmittelbare Lernkontrolle erhält.

Das Buch ist in Text- und Bildteil sowie in lernstoffvermittelnde Abschnitte und Aufgabenblöcke klar gegliedert. Die zu den jeweiligen Abschnitten gehörenden mathematischen Formeln, Rechenregeln und Merksätze sind im Text farbig besonders hervorgehoben. Die über 600 praxisnahen Zeichnungen sind meistens zweifarbig angelegt. Sie erläutern lernstoffvermittelnden Text und Anwendungsbeispiele oder sind Bestandteil der Aufgabenstellungen. Parallel zur „Holztechnik – Mathematik“ erscheint ein Lösungsbuch, in dem sehr ausführlich die Lösungswege der gestellten Aufgaben aufgezeigt werden. Beide Fachbücher, das Mathematikbuch und das Lösungsbuch, sind für den projektorientierten Unterricht und ein erfolgreiches Selbststudium besonders geeignet.

Die „Holztechnik – Mathematik“ eignet sich als Lehr- und Übungsbuch für Auszubildende, Schüler und Schülerinnen in Berufs-, in Berufsfachschulen sowie in betrieblichen und überbetrieblichen Ausbildungsstätten. Den Schülern und Schülerinnen von Meister- und Fachschulen bietet dieses Buch Gelegenheit zur Wiederholung der fachmathematischen Grundlagen und zur Vorbereitung auf die Meisterprüfung im Schreinerhandwerk.

Herbst 2015

Wolfgang Nutsch

Hinweis:

Für die Holzarten werden vorwiegend die Kurzzeichen der in der DIN 919-1 aufgeführten Handelsnamen verwendet. Die Kurzzeichen der botanischen Namen der Holzarten sind auf Seite 137 angegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1	Mathematische und physikalische Begriffe	6
1.2	Genauigkeit der Rechenergebnisse	8
1.3	Grundrechenarten	10
1.3.1	Addition und Subtraktion	10
1.3.2	Multiplikation und Division	13
1.4	Rechnen mit positiven und negativen Zahlen	15
1.5	Bruchrechnen	17
1.5.1	Arten von Brüchen	17
1.5.2	Erweitern und Kürzen von Brüchen	17
1.5.3	Addieren und Subtrahieren von Brüchen	18
1.5.4	Multiplizieren und Dividieren von Brüchen	19
1.6	Potenzen	22
1.6.1	Allgemeine Regeln des Potenzierens	22
1.6.2	Addieren und Subtrahieren von Potenzen	22
1.6.3	Multiplizieren und Dividieren von Potenzen	23
1.7	Wurzeln	24
1.7.1	Allgemeines	24
1.7.2	Radizieren	24
1.7.3	Rechnen mit Wurzeln	25
1.8	Gleichungen	26
1.8.1	Bestimmungsgleichungen	26
1.8.2	Verhältnissgleichungen	28
1.8.3	Formeln umstellen	28
1.9	Dreisatz	30
1.9.1	Dreisatz mit geradem und mit umgekehrtem Verhältnis	30
1.9.2	Zusammengesetzter Dreisatz	30
1.10	Prozentrechnen	32
1.11	Zinsrechnen	34
1.12	Winkel, Steigung, Neigung, Gefälle	35
1.12.1	Winkelarten und Einheiten der Winkel	35
1.12.2	Steigung, Neigung, Gefälle	36
1.13	Schaubilder, Diagramme	38

2 Elektronischer Taschenrechner

2.1	Aufbau eines Taschenrechners und Zahleneingabe	42
2.2	Rechnen mit dem elektronischen Taschenrechner	43

3 Längen

3.1	Längeneinheiten und Formelzeichen	46
3.2	Maßstäbe	47
3.3	Streckenteilung	48
3.4	Maßordnung im Hochbau – Fenster- und Türmaße	53
3.4.1	Maßordnung im Hochbau – Mauermaße	53
3.4.2	Maueröffnungen für Fenster	54

3.4.3	Maueröffnungen für Türen und Fenstertüren	54
3.4.4	Türmaße	56
3.4.5	Fenstermaße	58
3.5	Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke	60
3.5.1	Lehrsatz des Pythagoras	60
3.5.2	Verreihung	60
3.6	Winkelfunktionen	62
3.7	Treppen	66
3.7.1	Steigungsverhältnis	66
3.7.2	Schrittmaßregel	67
3.7.3	Bequemlichkeitsregel	68
3.7.4	Sicherheitsregel	68
3.7.5	Treppenpodeste	68

4 Verschnittberechnungen

4.1	Holz mengenberechnungen – Rohmenge, Fertigmengen, Verschnitt	70
4.1.1	Verschnitt	70
4.1.2	Verschnittabschlag	70
4.1.3	Verschnittzuschlag	71
4.1.4	Roh mengenberechnung	71

5 Flächen

5.1	Flächeneinheiten und Formelzeichen	74
5.2	Geradlinig begrenzte Flächen	75
5.2.1	Rechteck	75
5.2.2	Quadrat	75
5.2.3	Raute (Rhombus)	78
5.2.4	Parallelogramm (Rhomboid)	78
5.2.5	Trapez	78
5.2.6	Dreieck	81
5.2.7	Regelmäßige Vielecke	83
5.2.8	Unregelmäßige Vielecke	85
5.2.9	Zusammengesetzte Flächen	85
5.3	Flächeninhalte von Brettern und Bohlen	88
5.4	Bogenförmig begrenzte Flächen	92
5.4.1	Kreis	92
5.4.2	Kreisausschnitt (Sektor)	94
5.4.3	Kreisabschnitt (Segment)	94
5.4.4	Kreisring	97
5.4.5	Kreisringausschnitt	97
5.4.6	Ellipse	99
5.4.7	Ellipsenring	99
5.4.8	Zusammengesetzte Flächen	99

6 Körper

6.1	Volumeneinheiten und Formelzeichen	103
6.2	Prismen und Zylinder	104
6.3	Volumenberechnungen von Schnittholz – Kanthölzer, Balken, Bretter und Bohlen	110
6.4	Pyramide und Kegel	112
6.5	Pyramidenstumpf und Kegelstumpf	116
6.6	Stamm berechnungen – Blockmaß, Würfelmaß	120
6.7	Kugel	122
6.8	Fass	122
6.9	Keil und Ponton	122

7	Masse – Dichte – Gewichtskraft	
7.1	Masse	124
7.2	Dichte	124
7.3	Gewichtskraft	126
8	Materialbedarf und Materialpreisberechnungen	
8.1	Umrechnungen von Holzmen- gen und Preisen bei Schnittholz	128
8.2	Plattenwerkstoffe	132
8.3	Belagstoffe	137
8.3.1	Furniere	137
8.3.2	Kunststoffplatten	140
8.4	Klebstoffe	142
8.4.1	Klebstoffbedarf	142
8.5	Mischungsrechnen	144
8.5.1	Begriff der Mischung	144
8.5.2	Einfaches Mischungsrechnen nach Massenteilen oder Volumenteilen	144
8.5.3	Kaufmännisches Mischungsrechnen	146
8.6	Stoffe zur Oberflächenbehandlung	147
8.6.1	Bedarfs- und Preisberechnungen	147
8.6.2	Mischungsrechnen	149
8.7	Glas und Dichtstoffe	150
8.8	Materialliste	158
9	Kräfte	
9.1	Darstellen von Kräften	160
9.2	Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften	161
10	Hebel	
10.1	Einseitiger Hebel, zweiseitiger Hebel, Winkelhebel	164
10.2	Drehmoment – Auflagerkräfte	166
11	Arbeit, Leistung, Reibung, Wirkungsgrad	
11.1	Mechanische Arbeit und mechanische Energie	168
11.2	Goldene Regel der Mechanik	170
11.3	Mechanische Leistung	173
11.4	Reibung, Wirkungsgrad	174
12	Druck	
12.1	Druckspannung und Zugspannung	176
12.2	Flächenpressung	177
12.3	Hydraulik – Druck in eingeschlossenen Flüssigkeiten	178
12.4	Pneumatik – Druck in eingeschlossenen Gasen	180
12.4.1	Luftdruck, absoluter Druck, Überdruck	180
12.4.2	Drucklufterzeugung	180
12.5	Kolbenkraft	182
13	Maschinelle Holzbearbeitung	
13.1	Vorschubgeschwindigkeit – gleichförmige geradlinige Bewegung ..	184
13.2	Schnittgeschwindigkeit – gleichförmige Kreisbewegung	186
13.3	Schnittgüte – Zahnvorschub	188
13.4	Riemetrieb und Zahnradtrieb	190
14	Elektrotechnik	
14.1	Ohmsches Gesetz	194
14.2	Leiterwiderstand	195
14.3	Reihen- und Parallelschaltungen	196
14.4	Elektrische Leistung	198
14.5	Elektrische Arbeit	201
15	Holztrocknung	
15.1	Holzfeuchte – Luftfeuchte	202
15.1.1	Holzfeuchte	202
15.1.2	Bestimmung der Holzfeuchte	203
15.1.3	Luftfeuchte	204
15.1.4	Holzfeuchtegleichgewicht	204
15.2	Holzschwund	206
15.2.1	Schwindung und Quellung des Holzes	206
15.2.2	Holzfeuchtegleichgewicht, Tabellen	207
15.2.3	Schwundberechnungen	208
16	Wärme und Wärmeschutz	
16.1	Längenänderung infolge von Temperatureinflüssen	211
16.2	Wärmeschutz	212
16.3	Anforderungen an den Wärmeschutz	218
17	Kostenrechnen, Kalkulation	
17.1	Kostenbegriffe	232
17.2	Materialeinzelkosten	233
17.3	Lohnarten	239
17.4	Lohnzuschläge, Zulagen, Lohnabzüge ..	243
17.5	Gemeinkosten	244
17.6	Betriebsabrechnungsbogen – BAB	246
17.7	Kosten der Maschinenarbeit	249
17.8	Zuschlagskalkulation für Tischlerarbeiten	252
17.9	Zuschlagskalkulation für Fenster	256
18	CNC-Technik	
18.1	Koordinatenmaße	260
18.2	Programmieren von Werkstückkonturen	263
19	Wichtige Größen, Formelzeichen und Einheiten	265
20	Zeichen und Symbole	266
	Tabellen	267
	Sachwortverzeichnis	269

1 Mathematische Grundlagen		
1.1 Mathematische und physikalische Begriffe		
Begriffe	Erklärung	Beispiele
Größen	Größen sind messbare physikalische Eigenschaften von Zuständen und Vorgängen. Größen kürzt man mit Formelzeichen ab. Der Wert der Größe wird dabei durch das Produkt aus Zahlenwert und Einheit angegeben.	Länge, Masse, Zeit, Kraft. Bei der Länge $l = 4,50 \text{ m}$ ist l das Formelzeichen, 4,50 der Zahlenwert und m (Meter) die Einheit.
Einheiten	Einheiten geben den festgelegten Wert für Größen an. Sie sind in Normen (z. B. SI-Einheiten) festgelegt oder bilden sich aus den Beziehungen der Größen in Formeln.	cm; kg; min; N $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m}^3 \cdot \text{min}}$
SI-Einheiten	SI-Basiseinheiten sind im „Gesetz über Einheiten im Messwesen“ vom 2. Juli 1969 festgelegt. SI = Système International d'Unités	Länge l in m; Masse m in kg; Zeit t in s; elektrische Stromstärke I in A; Temperatur θ in °C
Wert der Größe	Der Wert der Größe wird durch das Produkt aus Zahlenwert und dazugehöriger Einheit angegeben.	4,5 m; 8,5 kg; 35 s; 16 A; 273 K
Konstante	Eine Konstante ist ein Zeichen mit einer selbstständigen Bedeutung. Sie ist ein gleich bleibender Zahlenwert (Zahlenfaktor) oder Größe bei Berechnungen in der Mathematik oder Physik. Sie wird in Größengleichungen durch Buchstaben dargestellt.	π : Zahl Pi ($\pi = 3,14159\dots$)
Variable	Eine Variable ist ein Zeichen ohne eine selbstständige Bedeutung. Die Variablen werden auch als Leerstellen oder Platzhalter bezeichnet.	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ $x + 5 = 15$ $3z = 24$
Term	Ein Term ist ein Ausdruck aus zwei oder mehr Zeichen für Zahlen, Konstanten und Variablen, die durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder andere Rechenanweisungen verbunden sind.	$3 + 4$ 6^2 $l \cdot b$ $(x + y)$
Koeffizient	Größe, die den Einfluss einer Stoffeigenschaft auf einen physikalischen Vorgang kennzeichnet.	U : Wärmedurchgangskoeffizient μ : Reibungszahl
Potenz	Ein Produkt aus gleichen Faktoren kann man als Potenz schreiben. Eine Potenz besteht aus Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Den Rechengang nennt man Potenzieren.	$a \cdot a \cdot a = a^3$ Basis Exponent $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ Potenz Faktoren Potenzwert
Exponent	Hochzahl einer Potenz, die angibt, wie oft eine Zahl mit sich selbst multipliziert werden soll.	10^2 ; 10^{-4} ; d^2 ; m^3 ; a^n
Radizieren	Radizieren (Wurzelziehen) ist eine Umkehrung des Potenzierens.	Wurzel-exponent Radikant $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5$ Wurzel (Faktoren) Wurzelwert
Indizes (Index)	Indizes sind tiefgestellte Ziffern oder Buchstaben zur Unterscheidung gleichartiger Größen. Sie werden z. B. bei Formelzeichen angewendet.	$l_1 + l_2 + l_3$ d_m v_s

1 Mathematische Grundlagen		
1.1 Mathematische und physikalische Begriffe		
Begriffe	Erklärung	Beispiele
Formelzeichen	Formelzeichen ersetzen Größen und dienen zum Rechnen mit Formeln bzw. Größen-gleichungen. Sie stehen stellvertretend für das Produkt aus Zahlenwert und Maßeinheit. Formelzeichen werden <i>kursiv</i> geschrieben.	A = Fläche m = Masse F = Kraft t = Zeit V = Volumen
Formeln	Formeln sind technische, mathematische oder physikalische Gleichungen. Sie werden durch 2 Rechenausdrücke (Terme) mit dem Gleichheitszeichen verbunden. Durch Einsetzen der Zahlenwerte mit den gewählten Einheiten erhält man den Zahlenwert mit der entsprechenden Einheit.	$A = l \cdot b$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $= \frac{U}{R}$
Größen-gleichungen	Die Größengleichungen stellen Beziehungen zwischen Größen dar. Sie können Formel-zeichen, mathematische Zeichen, z. B. $\sqrt{}$ und Konstanten (Zahlenfaktoren), z. B. π enthalten. Sie sind unabhängig von der Wahl der Einheit.	$U = d \cdot \pi = 0,95 \text{ m} \cdot 3,14 = 2,98 \text{ m}$ $A = \frac{l \cdot b}{2} = \frac{1,25 \text{ m} \cdot 0,72 \text{ m}}{2}$ $A = 0,45 \text{ m}^2$
Zahlenwert-gleichungen	Bei den Zahlenwertgleichungen sind die Zahlenwerte an vorgeschriebene Einheiten gebunden. Den Zahlenwert des Ergebnisses erhält man nur, wenn alle Zahlenwerte der Gleichung in den jeweils vorgeschriebenen Einheiten eingesetzt werden.	$v_c = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{60}$ Schnittgeschwindigkeit v_c in m/s Durchmesser d in m Umdrehungsfrequenz n in 1/min
Einheiten-gleichungen	Die Einheitengleichungen enthalten nur Rechenausdrücke mit Einheiten. Sie dienen auch dem korrekten Umrechnen von Einheiten innerhalb von Größengleichungen.	$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1\,000 \text{ mm}$ $3\,600 \text{ s} = 60 \text{ min} = 1 \text{ h}$ $\frac{\text{km} \cdot 1 \text{ h} \cdot 1\,000 \text{ m}}{\text{h} \cdot 3\,600 \text{ s} \cdot 1 \text{ km}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Bestimmungs-gleichungen	Die Bestimmungsgleichungen sind algebraische Gleichungen, bei denen Werte bestimmter Variablen zu berechnen sind.	$x + a = b$ $x = b - a$
Verhältnis-gleichung (Proportion)	Eine Verhältnisgleichung wird gebildet, wenn zwei Quotienten den gleichen Wert haben. Sie werden gleichgesetzt. Man kann sie auch als Bruchgleichung schreiben.	$a : b = x : y$ (Proportion) $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ (andere Schreibweise als Bruchgleichung)
Runden	Für das Auf- oder Abrunden gelten folgende Regeln: ist die über die angegebene Stellenzahl hinausgehende Ziffer 5 oder größer 5, wird aufgerundet, ist die betreffende Ziffer kleiner als 5, wird abgerundet.	$24,8\textcolor{red}{2}7 \text{ m}^2 = 24,83 \text{ m}^2$ $13\textcolor{red}{8},744 \% = 139 \%$ $0,87\textcolor{red}{5}52 \text{ m}^3 = 0,876 \text{ m}^3$ $9,\textcolor{red}{4}95 \text{ €} = 9,50 \text{ €}$
Ergebnisse	Die Ergebnisse sind bei technischen Berechnungen sinnvoll oder bei Zahlen mit Einheiten nach vorliegenden Regeln zu runden. Die Ergebnisse sind bei handschriftlichen Berechnungen durch zweimaliges Unterstreichen hervorzuheben.	$A = l \cdot b$ $A = 3,45 \text{ m} \cdot 2,20 \text{ m}$ $A = 7,59 \text{ m}^2$
Genauigkeit siehe Seite 8	Die Genauigkeit eines Ergebnisses kann nicht höher sein, als die zugrunde liegenden Angaben	$2,5 \text{ m}/2 = (1,25 \text{ m}) = 1,\textcolor{red}{3} \text{ m}$ $2,50 \text{ m}/2 = (1,25 \text{ m}) = 1,\textcolor{red}{25} \text{ m}$

1 Mathematische Grundlagen

1.2 Genauigkeit der Rechenergebnisse

Die Genauigkeit des Ergebnisses einer Berechnung, der Messwerte zugrunde liegen, kann nicht größer sein, als die Genauigkeit der Messwerte selbst.

Die Genauigkeit der Messmittel, die in der Holztechnik zur Verfügung stehen und geeignet sind Holzwerkstoffe sinnvoll und hinreichend genau zu messen, bewegt sich im Zehntelmillimeterbereich, meist sogar nur im Millimeterbereich. Bei Massenangaben und Volumenangaben maximal im Gramm- bzw. im Milliliterbereich.

Das Ergebnis von Messungen ist immer relativ (ungenau), niemals absolut (exakt).

Dies stellt eine natürliche Grenze für die Angabengenauigkeit dar (**Bild 1**).

Es gibt Regeln und Vorschriften bezogen auf Toleranzen für Längenmaße, Gewichts- und Mengenangaben. (siehe z. B. DIN, EN, ISO, ÖNORM usw.)

- Beispiele:**
- Ein Manometer zeigt am Kompressor den Druck nicht exakt an.
 - Eine Sitzgruppe mit 6 Stühlen besteht exakt aus 6 Stühlen.
 - Ein Millimeter auf dem Meterstab differiert sicher im 10tel Bereich.
 - 5 kg Leimflotte könnten auch nur 4,5 oder auch 5,4 kg sein.

Wir rechnen mit gemessenen, gerundeten oder gar geschätzten Werten, mit dem Ergebnis, dass sich Fehler fortpflanzen, addieren oder auch multiplizieren. Daraus resultiert, dass es in der Praxis sinnlos ist Ergebnisse auf unzählige Stellen genau anzugeben, da ja schon die zugrundeliegenden Werte ungenau (unscharf) und fehlerbehaftet waren.

Erste Überlegung bei Rechenergebnissen aufgrund von Messungen muss daher immer sein:

Welche Genauigkeit ist für das Ergebnis sinnvoll?

Ein Hilfsmittel dabei bieten die „signifikanten Stellen“ (zuverlässigen Ziffern) (**Bild 2**).

Signifikante Stellen

Die signifikanten Stellen sind in der DIN 1333 festgeschrieben. Sie sind definiert also die erste von Null unterschiedliche Stelle bis zur Rundungsstelle, welche die letzte zählbare Stelle ist. Die entfallenden Ziffern beim Runden sollten nicht durch Nullen aufgefüllt werden (**Bild 3**).

Beispiel:

Ein Messwert sei 25 kg, und es wurde auf kg gerundet. Der genaue Wert liegt also dabei zwischen 24 500 g und 25 499 g

$$24\,500\text{ g} \leq \text{Istwert} \leq 25\,499\text{ g}$$

Wird nun mit der Zahl 25 000 g weitergerechnet, macht man eventuell einen Fehler von bis zu 500 g.

Genau betrachtet sind die 3 letzten Ziffern unsicher, da der gerundete Wert mit Nullen aufgefüllt wurde.



Bild 1: Messgenauigkeit

Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.

Zitat von Carl Friedrich Gauss, deutscher Mathematiker

Messwert	signifikante Stellen	Nachkommastellen
200 cm	3	0
1,2 kg	2	1
0,003 m	1	3
0,340 m	3	3

Bild 2: Signifikante Stellen und Nachkommastellen

Rechnung	kleinste Zahl signifikanter Stellen	kleinste Zahl Nachkommastellen	Ergebnis
$12,5 + 0,88$		1	(13,38) 13,4
$0,357 - 0,03$		2	(0,387) 0,39
$1,50 + 0,5$		1	(2,00) 2,0
$4,33 \cdot 2,3$	2		(9,959) 10
$1,67 : 3$	1		(5,01) 5
$\pi \cdot 5,13$	3		(16,11...) 16,1
$24 \cdot 1,8$	2		(43,2) 43

Bild 3: Beispiele zur Signifikanz

1 Mathematische Grundlagen

1.2 Genauigkeit der Rechenergebnisse

Wäre der Wert genau 25 kg, so müsste er folgendermaßen geschrieben werden: 25,000 kg.

Bei 25 000 g sind allein die ersten beiden Ziffern, die 2 und 5, zuverlässig (signifikant).

Es gibt bei dieser Rechnung also 2 zuverlässige, signifikante Stellen.

Signifikanz einer Zahl sagt aus, wie viele signifikante Stellen vorhanden sind. Sie ist die Angabe der Genauigkeit!!!

Rechenergebnisse

Ergebnisse von Subtraktionen oder Additionen erhalten nur so viele Nachkommastellen, wie die Zahl mit den wenigsten Nachkommastellen.

Ergebnisse von Divisionen oder Multiplikationen erhalten nur so viele signifikante Stellen, wie die Zahl mit der kleinsten Signifikanz. (**Bild 3, Seite 8**)

Beispiel:

Eine Leimflotte wiegt 30,5 kg und besteht aus 75 % Leim, 10 % Härter und 15 % Streckmittel. Welche Menge an Streckmittel wurde dem Leim beigegeben?

Lösung:

$$100 \% \hat{=} 30,5 \text{ kg}$$

$$1 \% \hat{=} 0,305 \text{ kg}$$

$$15 \% \hat{=} 4,575 \text{ kg (mathematisch richtig aber Genauigkeit falsch)}$$

Angabengenauigkeit! 30,5 kg besitzt 3 signifikante Stellen, daher kann die Lösung auch nur 3 signifikante Stellen aufweisen. Das bedeutet die Lösung = 4,575 kg (4 signifikante Stellen) muss auf 3 signifikante Stellen gerundet werden. (4,575 kg) → **4,58 kg**

■ Aufgaben zu 1.2 Genauigkeit der Rechenergebnisse

9.1

Ermitteln Sie die, in der nachfolgenden Tabellen fehlenden Werte.

Messwert	signifikante Stellen	Nachkommastellen
20,0 kg		
2310 mm		
16,345 m		
1500 g		
134,0 cm		
0,750 m		
0,5 m		
0,050 kg		

9.2

Ermitteln Sie die, in der nachfolgenden Tabelle fehlenden Werte.

Rechnung	kleinste Zahl signifikanter Stellen	kleinste Zahl Nachkommastellen	Ergebnis
$3,54 + 15,357$		2	(18,897) 18,90
$0,85 - 0,043$		2	(0,807) 0,81
$1,507 + 0,5$		1	(2,007) 2,0
$3,33 \cdot 3,3$	2		(10,989) 11
$14 \cdot 1,80$	2		(25,2) 25
$\pi \cdot 4,13$	3		(12,974...) 13,0
$0,1 \cdot 0,012$	1		(0,0012) 0,001

9.3

Für einen 3-türigen Schrank schreibt der Auszubildende folgende gemessene Breitenmaße auf:

4 Seiten mit je 0,020 m Dicke, 2 kurze Fachböden mit 0,50 m Breite und ein langer Fachboden mit 0,8 m.

- Welche Breite darf für den Schrank angegeben werden?
- Ergibt das Ergebnis eine vernünftige Lösung? (Begründung)
- Sie würden selbst messen. Welche Werte würden Sie angeben, wenn bei oben genannten Bedingungen der Schrank eine Breite von 1880 m hätte?

9.4

Eine Glasscheibe für einen Verkaufsraum ist 1,28 m breit, 2,50 m hoch und 12 mm dick. Das Glas hat eine Dichte von $\rho = 2,6 \text{ kg/dm}^3$.

- Welche Masse hat die Glasscheibe in kg?
- Wie viele signifikante Stellen sind bei der Berechnung ausschlaggebend?

1 Mathematische Grundlagen

1.3 Grundrechenarten

Zu den Grundrechenarten gehören in der ersten Stufe die Addition und die Subtraktion sowie in der zweiten Stufe die Multiplikation und die Division.

1.3.1 Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion werden wegen ihrer Rechenzeichen als Strichrechnungen bezeichnet (**Tabelle 1**).

Die Addition der Summanden ergibt die Summe. Auf dem Zahlenstrahl werden die einzelnen Werte von links nach rechts aneinander gereiht (**Bild 1**).

Die Subtraktion von Minuend und Subtrahend ergibt die Differenz. Auf dem Zahlenstrahl werden die zu subtrahierenden Werte (der Subtrahend) von rechts nach links dargestellt (**Bild 2**).

Addition und Subtraktion sind entgegengesetzte Rechenarten, sie heben einander auf (**Bild 2**).

Beispiel: $2 + 4 - 4 = (2 + 4) - 4 = 6 - 4 = 2$
 $2 + (4 - 4) = 2 + 0 = 2$

In einer Summe kann man die Summanden beliebig vertauschen (Kommutativgesetz*). Dadurch kann der Rechengang manchmal vereinfacht werden.

Beispiel: $17 + 8 + 13 + 9 + 2 = 17 + 13 + 8 + 2 + 9 = 30 + 10 + 9 = 49$

Es können immer nur gleichartige Größen wie Meter mit Meter oder Stück einer bestimmten Sorte mit den Stückzahlen der gleichen Sorte addiert oder subtrahiert werden.

Gleichartige Größen in einer Aufgabe werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zahlenwerte der verschiedenen Arten addiert oder subtrahiert und die Einheit beibehält.

Beispiel: Aus dem Materiallager wurden ein 20-Liter-Gebinde Einkomponentenlack (20 l), zwei Stück Einsteckschlösser (2 Stück), drei Pakete Schrauben (3 Pakete), ein 5-Liter- (5 l) und ein 10-Liter-Gebinde Einkomponentenlack (10 l) entnommen. Fassen Sie die Lagerentnahmen zusammen (**Bild 3**).

Lösung: $20 \text{ l} + 2 \text{ Stück} + 3 \text{ Pakete} + 5 \text{ l} + 10 \text{ l} =$
 $20 \text{ l} + 5 \text{ l} + 10 \text{ l} + 2 \text{ Stück} + 3 \text{ Pakete} = 35 \text{ l} + 2 \text{ Stück} + 3 \text{ Pakete}$

Dezimalzahlen

Dezimalzahlen sind auf dem Zehnersystem aufgebaut und bestehen aus Ziffernfolgen vor und hinter dem Komma. Die Stellen vom Komma beginnend nach links sind die Einer (E), die Zehner (Z), die Hunderter (H), die Tausender (T), die Zehntausender (ZT), die Hunderttausender (HT) usw. Die Stellen vom Komma beginnend nach rechts heißen Zehntel (z), Hundertstel (h), Tausendstel (t) usw.

Das Dezimalsystem ist ein **Stellenwertsystem**. Jede Ziffer bekommt erst ihre Bedeutung durch die Stelle, die sie innerhalb der Dezimalzahl einnimmt (**Bild 4**).

*kommutativ – lat. umstellbar, vertauschbar

Tabelle 1: Rechenarten

Rechenarten	Rechenzeichen
Strichrechnung	Addition
	Subtraktion
	+
	-

Rechengang Addition

Summand plus Summand gleich Summe
 $5 + 2 = 7$

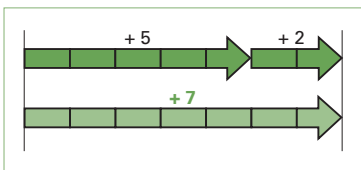


Bild 1: Addition mit Zahlenstrahl

Rechengang Subtraktion

Minuend minus Subtrahend gleich Summe
 $7 - 5 = 2$

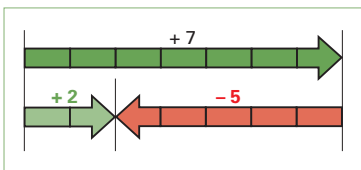


Bild 2: Subtraktion mit Zahlenstrahl

2 Einsteckschlösser

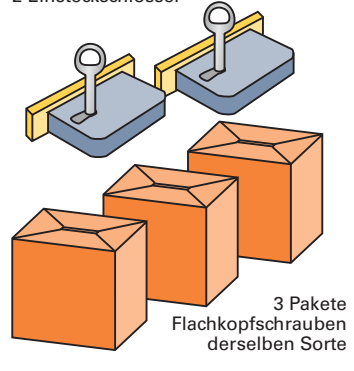


Bild 3: Nur Gleichartiges addieren oder subtrahieren

Stelle	T	H	Z	E	,	z	h	t
Ziffer	3	8	4	2	,	5	6	7

Bild 4: Stellen der Zahl 3 842,567

1 Mathematische Grundlagen

1.3 Grundrechenarten

Beim Addieren und Subtrahieren von Dezimalzahlen müssen Kommata und Ziffern an derselben Stelle bleiben. Am übersichtlichsten wird dies, wenn man die Dezimalstellen zum Addieren und Subtrahieren untereinander schreibt (**Tabelle 1**).

Runden von Dezimalzahlen

Unter Runden von Dezimalzahlen versteht man das Auf- oder Abrunden der Dezimalzahlen hinter dem Komma auf eine, zwei oder drei Stellen. Die letzte gewünschte Ziffer in der Dezimalzahl ist dabei die Rundungsstelle. Steht rechts neben der Rundungsstelle eine Ziffer von 0 bis 4, wird abgerundet, d. h. die Ziffer der Rundungsstelle bleibt wie sie ist. Steht rechts neben der Rundungsstelle eine Ziffer von 5 bis 9, wird aufgerundet, d. h. die Ziffer der Rundungsstelle um eins erhöht (**Beispiel 1**).

Algebraische Summen

Algebraische Zahlen bestehen aus der Vorzahl, auch Koeffizient genannt, und der Variablen. Innerhalb einer Aufgabe haben die Variablen jeweils einen bestimmten Wert, sie sind Platzhalter dieses Wertes. Sie werden durch Kleinbuchstaben, z. B. a , b , c ... oder x , y , z ... ersetzt.

Die Zahl $4a$ entsteht, wenn man viermal den Wert a hat. Ein Malzeichen zwischen Koeffizienten und Variablen darf man weglassen: $4 \cdot a = 4a$. Nicht so zwischen Zahlen: $4 \cdot 5 \neq 45$.

Ist der Koeffizient 1, wird dieser nicht geschrieben.

Für das Rechnen mit algebraischen Zahlen gelten die gleichen Rechengesetze wie für das Rechnen mit bestimmten Zahlen. Es kann nur Gleichnamiges (gleiche Buchstaben) addiert oder subtrahiert werden (**Beispiel 2**).

Gleichnamiges wird addiert oder subtrahiert, indem man nur die Koeffizienten der jeweiligen Variablen addiert oder subtrahiert.

Rechnen mit Klammern

Mathematische Ausdrücke können durch Klammern zusammengefasst werden. Es handelt sich hier dann um Werte gleichartiger oder zusammengehörender Größen.

Man löst die Klammern auf, indem man zuerst die Werte in der Klammer berechnet (**Beispiel 3**).

In **algebraischen Summen** sind die Klammerwerte meistens nicht gleichartig, sodass man diese nicht miteinander verrechnen kann.

Steht vor der Klammer ein **positives** Rechenzeichen, löst man die Klammer auf, indem man sie einfach weglässt.

Steht vor der Klammer ein **negatives** Rechenzeichen, kann man die Klammer auflösen, indem man alle Rechenzeichen in der Klammer umdreht (Beispiel 3).

Tabelle 1: Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Stellen	H	Z	E	z	h	t
Summanden	4	8	7	9	5	0
			0	0	3	5
+		9	9	9	7	0
Zwischensumme	4	9	7	9	5	5
Subtrahend	3	7	6	8	0	6
-						
Ergebnis	1	2	1	1	4	9

$487,95 - 376,806 + 0,035 + 9,97 = 121,149$

Beispiel 1: Runden

Auf zwei Stellen runden:

$$39,374 \text{ m} = 39,37 \text{ m}$$

$$25,285 \text{ m}^2 = 25,29 \text{ m}^2$$

$$173,344 \text{ €} = 173,34 \text{ €}$$

Auf drei Stellen runden:

$$9,437 \text{ m}^3 = 9,438 \text{ m}^3$$

$$62,354 \text{ kg} = 62,354 \text{ kg}$$

$$2 \text{ 412,999 N} = 2 \text{ 413,000 N}$$

Vorzahl
oder
Koeffizient

4

a

Variable

$$a + a + a + a = 4 \cdot a = 4a$$
$$a = 1a$$

Beispiel 2: Algebraische Summen

$$a + b + b + c + d + c = a + 2b + 2c + d$$

$$a - b + b - c + d = a - c + d$$

$$2a + 3b + a - 2c + 4b$$

$$= 2a + (1)a + 3b + 4b - 2c$$

$$= 3a + 7b - 2c$$

Beispiel 3: Klammerrechnungen

Zahlenbeispiel:

$$15 + (7 - 4) = 15 + 7 - 4 = 18$$

$$15 + 3 = 18$$

Algebraische Beispiele:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$7a + (4b - 3a) + 2b$$

$$= 7a + 4b - 3a + 2b = 4a + 6b$$

Zahlenbeispiel:

$$18 - (25 - 13) = 18 - 25 + 13 = 6$$

$$18 - 12 = 6$$

Algebraische Beispiele:

$$a - (b - c) = a - b + c$$

$$42a - (3a + 4b - 6c)$$

$$= 42a - 3a - 4b + 6c = 39a - 4b + 6c$$

1 Mathematische Grundlagen

1.3 Grundrechenarten

■ Aufgaben zu 1.3.1 Addition und Subtraktion

12.1 Rechenvorgänge durch Vertauschen vereinfachen

- a) $256 + 310 + 44 + 90 + 87$
- b) $488 + 368 + 12 + 37 + 68 + 13$
- c) $132,5 + 416 + 32,5 + 184 + 19$
- d) $1468 + 4320 + 532 + 1320 + 68$
- e) $55,68 + 128,37 + 0,13 + 14,32 + 2,50$
- f) $18 - 27 + 57 + 52 + 230 + 82$
- g) $1352 - 437 + 4248 - 147 + 2437 + 47$
- h) $377 + 226 + 253 + 444 - 88 + 168$

12.2 Addition von Dezimalzahlen

- a) $4,6 + 10340 + 0,64 + 0,083 + 2480 + 0,36$
- b) $42348 + 176,38 + 0,018 + 4,013 + 246,24$
- c) $738,40 + 4,382 + 256,14 + 50368,12 + 0,025$
- d) $0,009 + 2418,76 + 312,186 + 433,33 + 166,67$
- e) $310488,68 + 212,887 + 0,4481 + 312,48 + 1289$
- f) $3488244,68 + 4522,235 + 18478,778 + 345,222$
- g) $0,0014 + 0,037 + 3,64 + 0,0018 + 0,1984$
- h) $0,1028 + 2,887 + 0,0064 + 22,683 + 0,5942$

12.3 Subtraktion von Dezimalzahlen

- a) $4568,63 - 598,62$
- b) $723,587 - 256,09$
- c) $9454,19 - 5467,12$
- d) $0,0547 - 0,0389$
- e) $9685,37 - 8796,38$
- f) $10866,38 - 985,42$
- g) $4588122,89 - 1996485,93$
- h) $8005649,57 - 6891760,59$

12.4 Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

- a) $24,6 + 18340 + 10,64 + 0,2083 - 4680 + 20,36$
- b) $745,48 + 2176,38 + 0,918 + 42,013 - 146,284$
- c) $9739,40 - 45,282 + 1256,94 + 69368,12 - 208,025$
- d) $0,209 + 9128,76 + 512,187 + 2333,33 - 166,67$
- e) $310488,68 + 5218,887 + 40,481 + 3152,78 - 12989$
- f) $4988244,67 + 8952,265 - 18778,778 + 75469,163$
- g) $0,4016 + 0,039 + 5,264 - 0,0918 - 0,1984$
- h) $0,1028 + 62,888 - 10,0078 + 212,699 - 0,6943$

12.5 Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma runden

- a) $0,2579 \text{ m}^2 + 25,68 \text{ m}^2$
- b) $8,7965 \text{ m}^2 + 1798,698 \text{ m}^2$
- c) $7,8346 \text{ m}^2 + 12,1637 \text{ m}^2$
- d) $0,3425 \text{ m}^2 + 0,7844 \text{ m}^2$
- e) $458,479 \text{ m} - 396,8975 \text{ m}$
- f) $6489,6999 \text{ m} - 245,3554 \text{ m}$
- g) $93,789 \text{ m} - 42,244 \text{ m}$
- h) $0,5783 \text{ m} - 0,3333 \text{ m}$

12.6 Ergebnis auf drei Stellen nach dem Komma runden

- a) $149,156 \text{ N} + 498,299 \text{ N}$
- b) $487,5933 \text{ m}^3 + 24,1452 \text{ m}^3$
- c) $82,6978 \text{ m}^3 + 17,3032 \text{ m}^3$
- d) $121,4456 \text{ m}^3 + 8,554 \text{ m}^3$
- e) $891,678 \text{ N} - 129,324 \text{ N}$
- f) $467,376 \text{ m}^3 - 267,4825 \text{ m}^3$
- g) $72,434 \text{ kg} - 1,5283 \text{ kg}$
- h) $12,344 \text{ kg} - 2,4555 \text{ kg}$

12.7 Algebraische Summen

Fassen Sie Gleichnamiges zusammen und berechnen Sie die algebraischen Summen.

- a) $2a + b + b + c + 2c$
- b) $28a - 12b - 13a + 24b$
- c) $14a + 15b - 14a + 12$
- d) $27a + 69b - 18a + b$
- e) $5a + 3b + 6a + 2b + 0,5$
- f) $58a + 587b - 124a + 12b$
- g) $29a + 17b - 13a + 256b$
- h) $2759a + 13b + b - 327a$
- i) $12a + b + b + c + 2c - 4b + 5a + 3b + 6a + 2b + 4$
- j) $528a - 127b - 123a + 124b + 56a + 587b - 124a + a$
- k) $124a + 215b - 46a + 12 - 29a + 37b - 13a + 256b$
- l) $267a + 165b - 118a + 4b + 2756c + 83b + b - 317c$

Alternativaufgabe:

Berechnen Sie die Summen der Aufgaben a bis l, wenn für a der Wert 2, für b = 3 und für c = 4 einzusetzen ist.

12.8 Klammerausdrücke auflösen

- a) $345 + (125 - 68)$
- b) $246 - (128 + 1287)$
- c) $18x + (22x - 24y) - y$
- d) $6a - (4a - 5b + 9c)$
- e) $25a - (25b + 12a) + 325b$
- f) $(14a - 32b) - (3a - 52b)$
- g) $24u - (14v - 18u + 13w)$
- h) $(9,7x - 0,5z) - (8x - 0,9z)$
- i) $36a + (4a - 6b + 3c) + 45a - (38a - 14b + 4c) - 7a$
- j) $286x - (46x - 54y + 23z) + 44x - (53x - 67y + 33z)$
- k) $(34a + 58b - 87c + 56d) - (12a + 12b - 125c + 36d)$
- l) $59x - (13x - 34y) - (23x + 14x - 35y + 36z) + 18y$
- m) Ermitteln Sie die Summen der Aufgaben i bis l, wenn für a = 3, b = 5, c = 4, d = 6 und für x = 2, y = 6 und z = 7 eingesetzt wird.
- n) $1245a - (987a + 356b - 459c) - (368a - 422b + 419c)$
- o) $0,768a + (0,32a - 9,15b) - (0,125a - 0,038b - 0,15c)$
- p) $645a - (457a - 365b + 43c - 0,94) + 935b - 12c$
- q) $0,32a + 0,45b - (0,23a + 0,012b + 0,125c) + 123,9c$
- r) Wie groß sind die Endsummen der Aufgaben n bis q, wenn für a = 0,5, für b = 5 und für c = 4 eingesetzt wird?

12.9 Klammerausdrücke bilden

Setzen Sie die letzten zwei Glieder der Aufgabe in Klammern.

- a) $555 + 1252 - 168$
- b) $2476 - 2128 + 1287$
- c) $18x + 292y - 1024z$
- d) $16a - 34d - 5b + 9c$
- e) $135a - 225b - 32c + 35d$
- f) $314a - 312b - 13c - 82d$
- g) $24u - 214v - 61 + 13w$
- h) $9,7x - 0,5y - 8z - 0,9$

Setzen Sie die letzten drei Glieder der Aufgabe in Klammern.

- i) $2a + 4b - 7c + 3d$
- j) $7x - 473y + 235z - 473$
- k) $5u - 5v - 4w + 126$
- l) $8o - 897p + 312q - 317r$

1 Mathematische Grundlagen

1.3 Grundrechenarten

1.3.2 Multiplikation und Division

Multiplikation und Division werden wegen ihrer Rechenzeichen (Punkt oder Doppelpunkt) als Punktrechnungen bezeichnet (**Tabelle 1**). Die **Multiplikation** ist eine vereinfachte Addition.

Beispiel: In einem Sprudelkasten sind vier Reihen zu je fünf Flaschen untergebracht (**Bild 1**), das sind: $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5 = 20$.

Beim **Multiplizieren** werden die Faktoren miteinander multipliziert. Das Ergebnis ist das Produkt. Die Faktoren können vertauscht werden (Kommutativgesetz).

Das neutrale Glied der **Multiplikation** ist der Faktor eins.

Beispiel: $1 \cdot 5 = 5$ $1 \cdot 7 = 7$

Ist ein Faktor im unausgerechneten Produkt **null**, ist auch das ausgerechnete Produkt **null**.

Beispiel: $5 \cdot 0 = 0$ $4 \cdot 3 \cdot 0 = 0$

Die **Division** ist die Umkehrung der Multiplikation. Dadurch ist für die Division eine Proberechnung durch Multiplikation (Quotient mal Divisor) möglich.

Beispiel: $20 : 5 = 4$ $4 \cdot 5 = 20$

Eine **Division** kann statt mit Doppelpunkt mit Bruchstrich geschrieben werden, dabei steht der Dividend im Zähler, also auf dem Bruchstrich und der Divisor im Nenner unter dem Bruchstrich. In einer **Division** dürfen Zähler und Nenner bzw. Dividend und Divisor **nicht** vertauscht werden.

Beispiel: $\frac{20}{4} \neq \frac{4}{20}$ (Kommutativgesetz gilt hier nicht)

Neutrales Glied der **Division** ist die Zahl eins im Nenner bzw. als Divisor.

Beispiel: $5 : 1 = 5$ $\frac{20}{1} = 20$

Ist in einer Division der **Dividend null**, ist auch der Quotientwert **null**. Ist der **Divisor null**, ist die Rechnung **nicht erlaubt**.

Beispiel: $0 : 5 = 0$ denn $0 \cdot 5 = 0$

Kommen in einer Rechnung Punktrechnung und Strichrechnung vor, dann ist immer die Punktrechnung vor der Strichrechnung durchzuführen.

Beispiel: $\boxed{3 \cdot 4} + 5 - 2 =$ $3 \cdot \boxed{4 + 5 - 2} =$
 $\boxed{12} + 5 - 2 = 15$ (richtig) $3 \cdot \boxed{7} = 21$ (falsch)

Dezimalzahlen

Beim **Multiplizieren** von Dezimalzahlen ist die Zahl der Stellen nach dem Komma im Produkt gleich der Summe der Stellen nach dem Komma der beiden Faktoren (**Beispiel 1**).

Beim **Dividieren** von Dezimalzahlen muss das Komma vom Dividend und Divisor so weit in gleicher Weise nach rechts verschoben werden, bis beide ganze Zahlen sind (**Beispiel 2**).

Tabelle 1: Rechenarten

Rechenarten		Rechenzeichen
Punktrechnung	Multiplikation	$\cdot$ ($\times$)
	Division	:

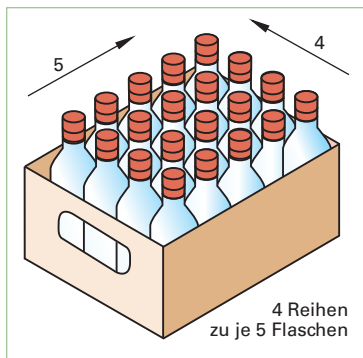


Bild 1

Rechenvorgang Multiplikation

Faktor mal Faktor gleich Produkt
 $4 \cdot 5 = 20$

$5 \cdot 4 = 20$
 Kommutativgesetz

Rechenvorgang Division

Dividend durch Divisor gleich Quotient
 $20 : 4 = 5$
 (Zähler) (Nenner)

als Bruch $\frac{20}{4} = 5$

Merke: Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

Beispiel 1:

$2 + 3 = 5$ Stellen
 $8,35 \cdot 0,125 = 1,04375$

Beispiel 2:

$142,375 : 0,25 =$
 $142375 : 250 = 569,5$
 1250 | 0 Null hinzugefügt
 1737
 1500
 2375
 2250 | Komma setzen
 1250
 1250

1 Mathematische Grundlagen

1.3 Grundrechenarten

Klammern

Sollen Summen multipliziert oder dividiert werden, sind diese in Klammern zu setzen. Diese Klammerausdrücke werden multipliziert oder dividiert, indem man erst den Inhalt der Klammer berechnet und danach mit dem Faktor multipliziert oder mit dem Divisor dividiert.

Beispiele: Ohne Klammern

$$5 \cdot 3 + 4 =$$

$$15 + 4 = 19$$

(Malzeichen vor der Klammer müssen nicht geschrieben werden.)

$$6 + 8 : 2 =$$

$$6 + 4 = 10$$

Mit Klammern

$$5 \cdot (3 + 4) =$$

$$5 \cdot 7 = 35$$

$$(6 + 8) : 2 =$$

$$14 : 2 = 7$$

Sind mehrere Klammerausdrücke miteinander zu multiplizieren, sind erst die Klammerwerte auszurechnen und diese dann zu multiplizieren.

Beispiele: $(7 + 31) \cdot (5 + 3) =$

$$38 \cdot 8 = 304$$

$$(2 + 6 - 5) \cdot (9 - 5 + 3) =$$

$$3 \cdot 7 = 21$$

(Das Malzeichen zwischen den Klammern muss nicht geschrieben werden.)

Man dividiert eine algebraische Summe durch eine Zahl, indem man jedes Glied der Klammer durch diese Zahl dividiert und die Teilquotienten zu einer algebraischen Summe vereinigt.

Beispiele: $(a + b) : m = (a : m) + (b : m) = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$

$$(a - b) : m = (a : m) - (b : m) = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

(Setzen Sie für $a = 15$, für $b = 25$ und für $m = 5$ und kontrollieren Sie den Lehrsatz.)

Algebraische Summen

Handelt es sich um algebraische Summen, ist ein Berechnen des Ausdrucks in der Klammer wegen der Variablen meistens nicht möglich.

Für das Multiplizieren von Klammerausdrücken mit algebraischen Summen gelten folgende Regeln:

Eine algebraische Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied in der Klammer mit der Zahl multipliziert und die Teilprodukte zu einer algebraischen Summe zusammenfasst (**Bild 1**).

Beispiele: $3 \cdot (4a + 3b - 2c) = 12a + 9b - 6c$

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

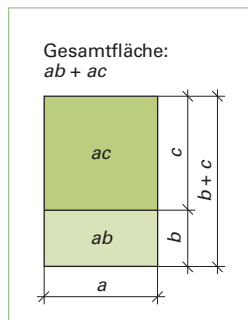


Bild 1

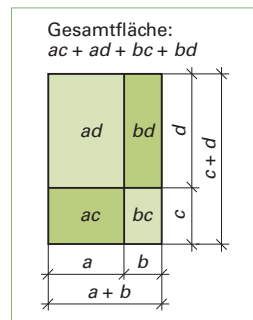


Bild 2

Eine algebraische Summe wird mit einer algebraischen Summe multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert und die Teilprodukte zu einer algebraischen Summe zusammenfasst (**Bild 2**).

Beispiele: $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

$$(3 + a) \cdot (5 + b + c) = 15 + 3b + 3c + 5a + ab + ac$$

Aufgaben zu 1.3.2

Multiplikation und Division

14.1 Dezimalzahlen multiplizieren

- a) $8,98 \cdot 2,45$ b) $97,03 \cdot 0,054$
c) $2,75 \cdot 7,34 \cdot 0,5$ d) $0,87 \cdot 0,35 \cdot 0,7$

14.2 Dezimalzahlen dividieren

- a) $7\,456,7 : 0,5$ b) $0,768\,6 : 0,252$
c) $87,97 : 0,876$ d) $0,564 : 0,125$

14.3 Punkt- und Strichrechnung

- a) $23 - 3 \cdot 4 + 5$ b) $250 - 6 + 25 \cdot 4 - 2$
c) $75 : 3 + 2 \cdot 5 - 5$ d) $0,48 \cdot 4 + 8 - 12 : 3$

14.4 Klammeraufgaben

- a) $(23 + 12) \cdot 7$ b) $21 \cdot (125 - 85) - 12$
c) $56 - 0,25 \cdot (34,7 + 5,3)$ d) $77,9 + 13 \cdot (4,5 - 2,5) - 5$
e) $(35 - 17) \cdot (94 - 6)$ f) $(12,5 + 125,5)(7 + 2)$
g) $(245 - 113) : 17$ h) $(23 - 15) \cdot (17 + 12) + 89$
i) $1\,258 \cdot (243 + 156)(7 - 4)$ j) $(1276 - 126) : (344 - 12)$

14.5 Algebraische Summen

- a) $25(4a + 3b)$ b) $5a(3b - 5c + 6d)$
c) $4,5(25a - 36b)$ d) $3a(5x + 3y - 8z)$
e) $7 + 5(a + 3b - 2c)$ f) $(2a + 3b)(4c + 5d)$
g) $354 - 64(2,5 + a - 4b + 3c)$ h) $(x + 3z)(48y - 34)$

1 Mathematische Grundlagen

1.4 Rechnen mit positiven und negativen Zahlen

Positive und negative Zahlen kommen zum Beispiel beim Messen von Temperaturen, beim Kontostand und bei Kräften vor. Wir sprechen von Plusgraden und Minusgraden auf dem Thermometer, von Guthaben und Schulden auf dem Kontostand und von Druckkräften und Zugkräften. Sind diese ausgeglichen, haben sie den Wert null (**Bild 1**).

Es gibt also Zahlen, die von Null aus ansteigen bzw. auf dem Zahlenstrahl von Null aus nach rechts gehen, das sind die **positiven Zahlen**. Sie erhalten das Vorzeichen **Plus (+)** oder kein Vorzeichen. Es gibt die negativen Zahlen, die von Null aus abfallen bzw. auf dem Zahlenstrahl von Null aus nach links gehen. Die **negativen Zahlen** erhalten das Vorzeichen **Minus (-)**.

Addition und Subtraktion relativer Zahlen

Man unterscheidet zwei Möglichkeiten der Addition und zwei Möglichkeiten der Subtraktion positiver und negativer Zahlen:

1. Positive Zahlen addieren (**Bild 2**).

Beispiel: Zum Guthaben auf dem Konto eine Einzahlung hinzufügen (Zahlen in tausend €).

2. Negative Zahlen addieren (**Bild 3**).

Beispiel: Zum Guthaben auf dem Konto eine Lastschrift hinzufügen.

3. Positive Zahlen subtrahieren (**Bild 4**).

Beispiel: Vom Guthaben auf dem Konto Geld auszahlen lassen.

4. Negative Zahlen subtrahieren (**Bild 5**).

Beispiel: Das Guthaben um Schulden vermindern.

Sind Rechenzeichen und Vorzeichen gleich, so wird die relative Zahl addiert. Sind Rechenzeichen und Vorzeichen ungleich, so wird die Zahl subtrahiert.

Beispiel: $(13a) + (-7b) - (-34a) + (+25b) - (+24a) + (-12b) =$
 $13a - 7b + 34a + 25b - 24a - 12b = 23a + 6b$

Vereinfacht gilt für das Beseitigen von Klammern bei algebraischen Summen:

Eine positive Klammer wird aufgelöst, indem man die Klammer weglässt. Eine negative Klammer (Minusklammer) wird aufgelöst, indem man die Klammer weglässt und die Rechenzeichen der Klammerglieder umdreht (Seite 11).

Beispiel: $22a + (12a - 65b) - (32a - 7b) =$
 $22a + 12a - 65b - 32a + 7b = 2a - 58b$

Kommen in einem Ausdruck verschiedene Klammerarten vor, so löst man am besten erst die inneren (), dann die äußeren Klammern [].

Beispiel: $120a + [128b - (7a - 4b) - (20a - 9b - 2)] =$
 $120a + [128b - 7a + 4b - 20a + 9b + 2] =$
 $120a + 128b - 7a + 4b - 20a + 9b + 2 = 93a + 141b + 2$

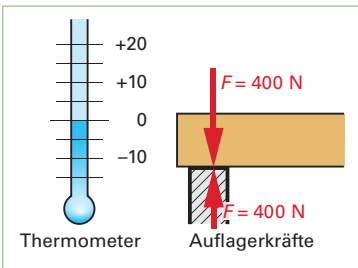


Bild 1

Die positiven Zahlen (+) und die negativen Zahlen (-) einschließlich der Null heißen rationale Zahlen.

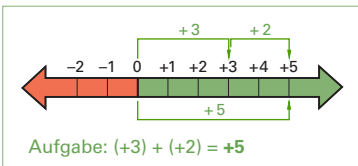


Bild 2

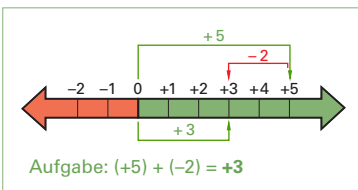


Bild 3

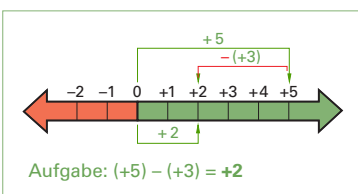


Bild 4

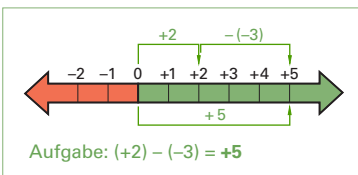


Bild 5

1 Mathematische Grundlagen

1.4 Rechnen mit positiven und negativen Zahlen

Multiplikation positiver und negativer Zahlen

Da die Multiplikation eine erweiterte Addition ist, kann hier die gleiche Vorzeichenregel angewendet werden. Als Regel gilt:

Das Produkt aus zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv – mit entgegengesetzten Vorzeichen negativ (**Bild 1**).

Beispiele:

$$\begin{aligned} (+4) \cdot (+12a) &= +48a & (+5b) \cdot (-7) &= -35b \\ (-8x) \cdot (-6) &= +48x & (-6u) \cdot (+9v) &= -54uv \\ (-3a) \cdot (-5 + 4b - c + 8d) &= +15a - 12ab + 3ac - 24ad \\ (4a - 3b) \cdot (12c + 2) &= 48ac + 8a - 36bc - 6b \end{aligned}$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} (+1) \cdot (+1) &= +1 & (+1) \cdot (-1) &= -1 \\ (-1) \cdot (-1) &= +1 & (-1) \cdot (+1) &= -1 \end{aligned}$$

(Erklärung auch mit dem Koordinatensystem, S. 40).

Division:

$$\begin{aligned} (+1) : (+1) &= +1 & (+1) : (-1) &= -1 \\ (-1) : (-1) &= +1 & (-1) : (+1) &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{oder } \frac{+1}{+1} = +1 \quad \frac{-1}{-1} = +1$$

$$\frac{+1}{-1} = -1 \quad \frac{-1}{+1} = -1$$

Bild 1: Vorzeichenregel

Division positiver und negativer Zahlen

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation, daher gelten die Vorzeichenregeln sinngemäß wie bei der Multiplikation. Als Regel gilt:

Der Quotient von Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv. Der Quotient von Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ist negativ (**Bild 1**).

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } (+35) : (+7) &= +5 & (-75a) : (-25a) &= +3 \\ (-72a) : (+8) &= -9a & (+25c) : (-5) &= -5c \\ (48ab + 60b) : (-12b) &= -4a - 5 \end{aligned}$$

■ Aufgaben zu 1.4

Rechnen mit positiven und negativen Zahlen

16.1 Addition und Subtraktion positiver und negativer Zahlen

- a) $275 + (+235) + 322 - 45$
- b) $4 - (-2) - (-7) - 5$
- c) $365 + (-187) - (-269)$
- d) $1,5a + (+2,1a) + (-a)$
- e) $6,3v - (-2,8v) - 2,5u$
- f) $-1,5x - (+1,2x)$

- g) $1,7c - (-4,8c) + 3,6c$
- h) $63,36 - (-12,64) - 75$
- i) $4,75x + (-32,9y) - (+68,65z) + (+53,7x) - (-38,35z)$
- j) $978u + (+34,6v) - (-296u) + (-45,2v) - (-1472u)$
- k) $x + (-y) - (+2z) - (-42) + (-86x) + 87 - (-34x)$
- l) $0,765a - (-0,043b) + (-0,34a) - (+0,456b) + 342,87$
- m) $-0,67 - (-75,25a) + (-89,33) + (-0,045b) + 0,055$
- n) $456 - (-254a) + (+546a) - (-654b) - (+645) + 655$

16.2 Verschiedene Klammern auflösen

- a) $27 - (18 - 19) + 13$
- b) $23x + (23y - 46x) - 7y$
- c) $7c - [(8b + 9c) - 5c]$
- d) $6a - (23b - 8a + 4b)$
- e) $4a - [34a - (a + 6a)]$
- f) $3x - [(13y + 12x) + y]$
- g) $121a - \{[14 - (2a + b)] - [25 + (a - 5b + 126)]\}$
- h) $37x - \{+32x - [3x - (35x + 42y) - (23x - 12y)]\}$
- i) $7u - 9v + \{12u - [(3u - 7v) - (21u - 12v)] - 2u\}$
- j) $\{-3x + [(2x - 5y) - (12x - 15y) + 31] - 136\}$
- k) $[12a - (13a + 12b - 7c)] - [13a + 17b - (a + b)]$
- l) $9x - [6x - (12x + 8y - 19z) - (-12x + 23y - 18z)]$
- m) $7a - \{5b - [71a - 18b - (21a - 31b + 55)] - 14a\}$
- n) $5x - \{[(32x - 44y + 55z) - 13x - (12x + 4z) + y]\}$

16.3 Multiplikation positiver und negativer Zahlen

- a) $24 \cdot (-12 + 4 - 5)$
- b) $-14 \cdot (-14a - 12b + 13)$
- c) $(75 - 25a + 16b) \cdot (-5)$
- d) $-2a \cdot (12 - 51b + 3c)$
- e) $-1,8 \cdot (120a - 1000b)$
- f) $(0,5a - 0,25b) \cdot (-0,1)$
- g) $[12a - (14b - 7a + 3) - (121 + 24a - 4b)] \cdot (-3)$
- h) $17a - [4a - 2b - (3a + 4b)] \cdot (-2) + 123a - 6b$
- i) $-0,5 \cdot [12a - (16a + 14b - 121) - (144 + 17a - 4b)]$
- j) $(2a - 3b) \cdot (3 + 4c)$
- k) $(7x - 9y) \cdot (-9 + 8z)$
- l) $(9x - 7y + 8) \cdot (-2 + z)$
- m) $(3a - 4b - 7) \cdot (4 - c)$
- n) $(6x - 9 + 3y) \cdot (-5z)$
- o) $(-17a - 81b) \cdot (-0,5)$

16.4 Division positiver und negativer Zahlen

- a) $(+125) : (-25)$
- b) $(-1254) : (-0,5)$
- c) $(+0,5) : (+0,025)$
- d) $(-14a) : (+0,7)$
- e) $(+144a) : (-12a)$
- f) $(-1467b) : (-b)$
- g) $(+365288,98) : (-0,1)$
- h) $(-24ab) : (+12a)$
- i) $(24a - 36b) : 12$
- j) $(-29a + 54b) : (-0,5b)$
- k) $(575x - 725y) : (-25xy)$
- l) $(+264ab - 344b) : (-4a)$
- m) $(-75xyz - 25x) : (-25x)$
- n) $(+68ab - 42abc) : (4ab)$

16.5 Gemischte Aufgaben

- a) $[(-4a + 4b) - 5b] \cdot 5c - (75c - 25bc) : 5c + 125$
- b) $[35x - (30x + 20xy)] : (-5x) + (254x - 987y) - 375$
- c) $-45a - (45b - 75c) + 873 - (24a + 97b) - 543c + 27$
- d) $[35a - 45b - (35a + 15b)] : (-5a) - (-254 + 56b)$
- e) $(0,048x - 0,012y) : (-0,04y) + (0,34x - 8,5) + 12x$

1 Mathematische Grundlagen

1.5 Bruchrechnen

Brüche entstehen durch Teilen von ganzen Zahlen. Der Quotient wird statt mit Doppelpunkt mit Bruchstrich geschrieben.

1.5.1 Arten von Brüchen

Man unterscheidet echte Brüche und unechte Brüche, gleichnamige und ungleichnamige Brüche sowie Scheinbrüche.

Ein **echter Bruch** ist ein Teil eines Ganzen. Hier ist der Zähler immer kleiner als der Nenner (**Bild 2**).

Ein **unechter Bruch** ist größer als ein Ganzes und wird so geschrieben, dass der Zähler größer als der Nenner ist (**Bild 3**).

Ein unechter Bruch lässt sich in eine gemischte Zahl umwandeln, zum Beispiel: $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

Gleichnamige Brüche weisen den gleichen Nenner auf (**Bild 4**).

Ungleichnamige Brüche haben ungleiche Nenner (**Bild 5**).

Ein **Scheinbruch** liegt vor, wenn der Nenner 1 ist wie zum Beispiel: $\frac{4}{1} = 4$.

1.5.2 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Brüche können durch Zahlen erweitert oder gekürzt werden, ohne dass sich der Wert des Bruches verändert.

Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.

Beispiele: $\frac{1}{3}$ erweitert mit der Zahl $5 = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}$

$\frac{x}{y}$ erweitert mit der Variablen $z = \frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{xz}{yz}$

Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert.

Beispiele: $\frac{4}{6}$ gekürzt durch die Zahl $2 = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$

$\frac{xz}{yz}$ gekürzt durch die Variable $z = \frac{xz:z}{yz:z} = \frac{x}{y}$

Summen und Differenzen können im Allgemeinen nicht gekürzt werden. Sie sind vorher zu berechnen.

Beispiel: $\frac{3+5}{6+15} = \frac{8}{21} \neq \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$ $\frac{3+4}{6+15} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

Lösung ist **falsch!** Lösung ist **richtig!**

Algebraische Summen kann man nur dann kürzen, wenn man sie vorher in ein Produkt verwandelt.

Beispiel: $\frac{6x+6y}{4x-8y} = \frac{2(3x+3y)}{2(2x-4y)} = \frac{(3x+3y)}{(2x-4y)} = \frac{3(x+y)}{2(x-2y)}$

$$4:5 = \frac{4 \text{ Zähler}}{5 \text{ Nenner}}$$

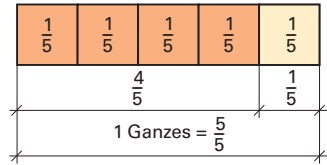


Bild 1

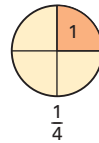


Bild 2: Echter Bruch

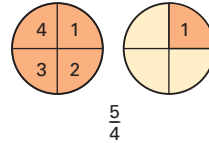


Bild 3: Unechter Bruch

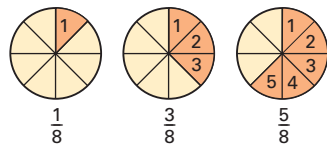


Bild 4: Gleichnamige Brüche

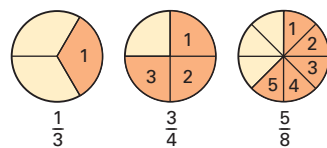


Bild 5: Ungleichnamige Brüche

1 Mathematische Grundlagen

1.5 Bruchrechnen

1.5.3 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Nur **gleichnamige Brüche** können addiert oder subtrahiert werden.

Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner beibehält (**Bild 1**).

Beispiele: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\frac{3}{a} + \frac{2}{a} - \frac{1}{a} = \frac{4}{a}$

Ungleichnamige Brüche kann man durch Erweitern einzelner Brüche gleichnamig machen. Der Hauptnenner (HN) ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner.

Man findet den Hauptnenner, indem man die einzelnen Nenner in Primzahlen zerlegt. Das Produkt der größten Gruppen gleicher Faktoren ergibt den Hauptnenner (**Bild 3**).

Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie erst gleichnamig macht, indem man den Hauptnenner bildet, und dann die Zähler addiert bzw. subtrahiert (**Bild 2**).

Beispiel 1: $\frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{3}{5} - \frac{4}{15} = \frac{15 + 40 + 54 - 24}{90} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18}$

Der **Hauptnenner** ist 90. Bei Nenner 6 ist der Zähler mit 90 : 6 = 15 zu erweitern, bei Nenner 9 mit 10, bei Nenner 5 mit 18, bei Nenner 15 mit 6 (**Bild 4**).

Beispiel 2: $\frac{a}{bc} + \frac{a}{b} - \frac{3}{c} = \frac{a + ac - 3b}{bc}$ HN = bc

■ Aufgaben zu 1.5.2 – Erweitern und Kürzen von Brüchen

18.1 Erweitern mit der Zahl 3 (5)

$\frac{8}{9}, \frac{3}{3}, \frac{14}{27}, \frac{18}{23}, \frac{125}{250}, \frac{a}{b}, \frac{3xy}{5z}$

18.2 Erweitern mit dem Term 2x (3y)

$\frac{13ab}{cd}, \frac{89z}{141}, \frac{64u}{87v}, \frac{0,67a}{0,87b}$

18.3 Wandeln Sie gemischte Zahlen in unechte Brüche um

$2\frac{1}{2}, 4\frac{3}{4}, 2\frac{8}{16}, 8\frac{1}{9}, 7\frac{25}{36}, 4\frac{3}{8}$

18.4 Kürzen Sie die Brüche

$\frac{15}{75}, \frac{27a}{99}, \frac{33ab}{121a}, \frac{84x}{636xy}, \frac{72a}{88b}$

18.5 Verwandeln Sie algebraische Summen zum Kürzen in Produkte

a) $\frac{12x+4y}{4z-8y}$ b) $\frac{7a+21b}{14z-7b}$ c) $\frac{18a-6b}{54a+12b}$ d) $\frac{121x+99z}{22y}$

■ Aufgaben zu 1.5.3 – Addition und Subtraktion von Brüchen

18.6 Gleichnamige Brüche addieren oder subtrahieren

a) $\frac{15}{7} + \frac{2}{7} - \frac{5}{7}$ b) $\frac{4a}{b} - \frac{6a}{b} + \frac{8a}{b}$ c) $\frac{15}{ab} - \frac{5}{ab} + \frac{20}{ab}$

18.7 Ungleichnamige Brüche addieren oder subtrahieren

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{4}{5}$ c) $5 - \frac{5}{6} - \frac{1}{15}$
d) $\frac{8a}{b} + \frac{2c}{d} - \frac{1}{4}$ e) $10 + \frac{7}{12} - 2\frac{4}{15} - \frac{7}{9} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3}$

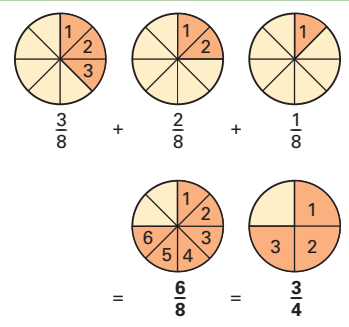


Bild 1: Addition gleichnamiger Brüche

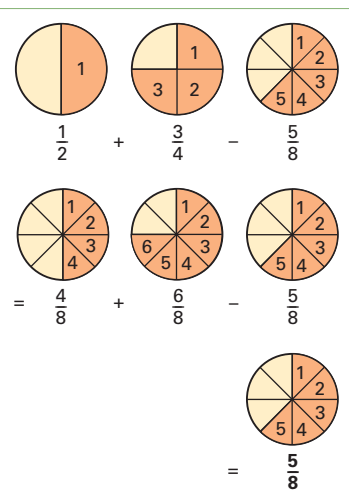


Bild 2: Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Nenner	Primzahlzerlegung
6	2 · 3
9	3 · 3
5	5
15	3 · 5
HN =	2 · 3 · 3 · 5 = 90

Bild 3

Erweiterungszahlen der Zähler

Bei Nenner 6 $\Rightarrow 90 : 6 = 15$
Bei Nenner 9 $\Rightarrow 90 : 9 = 10$
Bei Nenner 5 $\Rightarrow 90 : 5 = 18$
Bei Nenner 15 $\Rightarrow 90 : 15 = 6$

Bild 4

1 Mathematische Grundlagen

1.5 Bruchrechnen

1.5.4 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Multiplizieren von Brüchen

Brüche kann man mit einer ganzen Zahl oder mit einem anderen Bruch multiplizieren.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert (**Bild 1**).

Beispiele: $\frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{1 \cdot 3}{8} = \frac{3}{8}$ $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

Ein Bruch wird mit einem anderen Bruch multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert (**Bild 2**).

Beispiele: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{28}$ $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

Dividieren von Brüchen

Brüche kann man durch eine ganze Zahl oder durch einen anderen Bruch dividieren. Außerdem kann eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiert werden.

Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert oder den Nenner mit dieser Zahl multipliziert (**Bild 3**).

Beispiele: $\frac{4}{9} : 2 = \frac{4 : 2}{9} = \frac{2}{9}$ $\frac{3}{7} : 4 = \frac{3}{7 \cdot 4} = \frac{3}{28}$

$\frac{ab}{c} : a = \frac{b}{c}$ $\frac{ab}{c} : d = \frac{ab}{cd}$

Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man ihn mit dem Kehrwert des anderen Bruches multipliziert. Vertauscht man Zähler und Nenner, so entsteht der Kehrwert (**Bild 4**).

Beispiele: $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{15}{16}$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$

Ist ein Bruch eine gemischte Zahl, muss man diese erst in einen unechten Bruch umwandeln (**Bild 5**).

Beispiele: $1\frac{3}{4} : 3 = \frac{7}{4} : 3 = \frac{7}{12}$ $4\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{14}{3} : \frac{2}{3} = \frac{14 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{14}{2} = 7$

Durch Kürzen entsteht der Scheinbruch $\frac{7}{1}$.

Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man die ganze Zahl zu einem Scheinbruch macht und diesen mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.

Beispiel: $5 : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ $a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{1 \cdot b} = \frac{ac}{b}$

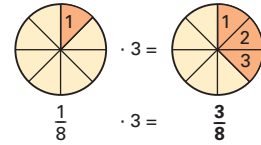


Bild 1: Bruch mal Zahl

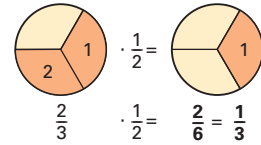


Bild 2: Bruch mal Bruch

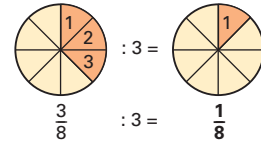


Bild 3: Bruch durch ganze Zahl

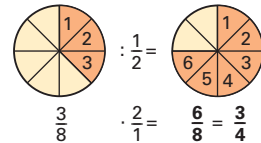


Bild 4: Bruch durch Bruch

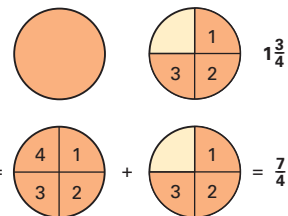


Bild 5: Gemischte Zahl in unechten Bruch verwandeln

1 Mathematische Grundlagen

1.5 Bruchrechnen

■ Aufgaben zu 1.5.4

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

20.1 Bruch mit ganzer Zahl multiplizieren

a) $4 \cdot \frac{2}{5}$; $8 \cdot \frac{62}{87}$; $9 \cdot \frac{79}{81}$; $76 \cdot \frac{17}{18}$; $823 \cdot \frac{13}{15}$

b) $\frac{17}{c} \cdot ab$; $\frac{137}{xy} \cdot x$; $\frac{4a}{36b} \cdot 6b$; $\frac{78x}{125y} \cdot 5y$

20.2 Bruch mit Bruch multiplizieren

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{18}$; $\frac{13}{28} \cdot \frac{14}{39}$; $\frac{12}{57} \cdot \frac{19}{144}$; $\frac{16}{99} \cdot \frac{9}{32}$; $\frac{185}{240} \cdot \frac{12}{15}$

b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$; $\frac{xy}{24} \cdot \frac{12}{x}$; $\frac{ab}{c} \cdot \frac{3c}{ab}$; $\frac{17a}{b} \cdot \frac{b}{34a}$

c) $\frac{21 \cdot 45 \cdot 16}{15 \cdot 35 \cdot 20}$; $\frac{100 \cdot 72 \cdot 75}{45 \cdot 25 \cdot 30}$; $\frac{350 \cdot 88 \cdot 18}{16 \cdot 70 \cdot 90}$

d) $\frac{5 \cdot 25 \cdot 12a}{6 \cdot 145 \cdot 5}$; $\frac{3a \cdot 7b \cdot 125}{7 \cdot 5a \cdot 6b}$; $\frac{28x \cdot 7y \cdot 5}{91y \cdot 15y \cdot 3}$

e) $\frac{(a+3)}{(9+a)} \cdot \frac{(5+b)}{(b-8)}$; $\frac{(2a-3b)}{(3a-2b)} \cdot \frac{(5+c)}{(24c+4)}$

f) $\frac{a-b}{5} \cdot 20 \cdot \frac{10}{a-b}$; $\left(\frac{m+n}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a-b}{m-x}\right)$;

$\frac{a+b}{4x+4y} \cdot \frac{5x+5y}{a-b}$; $\frac{(x-y)}{(y+z)} \cdot \frac{(-45)}{(12)}$

(Die Länge des Bruchstrichs ersetzt die Klammer.)

20.3 Bruch durch eine ganze Zahl dividieren

a) $\frac{54}{76} : 27$; $\frac{125}{512} : 25$; $\frac{63}{87} : 9$; $\frac{89}{121} : (-2)$; $\frac{71}{90} : 3a$

b) $\frac{25a}{12b} : 5a$; $\frac{37b}{13} : 37b$; $\frac{9ac}{11b} : (-9c)$; $\frac{144bc}{156d} : 12b$;

$\frac{12xy}{55z} : 6x$; $\frac{29z}{31} : 2z$

c) $\frac{-32}{5bc} : (-16)$; $\frac{7ab}{-8c} : (-7a)$; $\frac{-76c}{+17a} : (-38)$;

$\frac{3ax}{-7by} : (-3a)$; $\frac{-18x}{144bc} : 9x$; $\frac{2b}{-7c} : 4b$

d) $\frac{(12a-48b)}{37b} : (-12)$; $\frac{(121x+88y)}{23x} : 11y$

20.4 Bruch durch einen anderen Bruch dividieren

a) $\frac{14}{32} : \frac{7}{8}$; $\frac{76}{26} : \frac{4}{13}$; $\frac{81}{94} : \frac{9}{47}$; $\frac{12}{37} : \frac{4}{37}$; $\frac{72}{121} : \frac{36}{77}$

b) $\frac{ab}{c} : \frac{b}{d}$; $\frac{xy}{24} : \frac{x}{4}$; $\frac{5x}{136} : \frac{x}{13}$; $\frac{14z}{45x} : \frac{7z}{9}$

c) $\frac{136x+81y}{12x-12y} : \frac{3}{5}$; $\frac{72a-81b}{9a-9b} : \frac{4c}{3}$

d) $\frac{6x+3y}{4a-4b} : \frac{12ax+6ay}{7ax-7bx}$; $\frac{8x+8y}{3a-3b} : \frac{4x+4y}{9a-9b}$

20.5 Gemischte Zahlen dividieren

(Vereinfachen Sie die Brüche so weit wie möglich)

a) $4\frac{3}{8} : 2\frac{2}{5}$; $5\frac{6}{4} : 7\frac{2}{3}$; $1\frac{5}{8} : -\frac{3}{4}$; $2\frac{3}{7} : 4\frac{5}{6}$

b) $5\frac{a}{b} : 7\frac{c}{d}$; $4\frac{x}{y} : -5\frac{3}{4}$; $8\frac{4}{13x} : \frac{2y}{5x}$

20.6 Ganze Zahl durch Bruch dividieren

a) $121 : \frac{11}{40}$; $13 : \frac{26}{19}$; $25 : \frac{5}{7}$; $14 : \frac{7}{9}$; $3 : \frac{5}{7}$

b) $25 : \frac{a}{b}$; $27 : \frac{9a}{b}$; $3ab : \frac{6a}{c}$; $5xy : \frac{15x}{7}$

20.7 Gemischte Aufgaben – Multiplizieren von Brüchen

a) $\left(\frac{4}{a} + \frac{3}{b-c}\right) \cdot 5a$; $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{9} - \frac{8}{9}\right) \cdot 7a$

b) $\frac{2a-6b+8c-12d}{14a} \cdot 7$; $\frac{25+35a-40b}{5b} \cdot 15$

c) $\frac{[(32a-40b+72)-24]}{8a} \cdot 48c$; $\frac{7a-5b}{4c} \cdot 12c$

d) $\frac{[66-(56-72a)-40a]}{16a+32} \cdot 8c$; $\frac{8x+4y}{14a} \cdot -7a$

e) $\frac{3a}{17} \cdot \frac{17b}{33a}$; $\frac{5x}{45} \cdot \frac{90}{25xy}$; $\frac{12ab}{15c} \cdot \frac{5a}{24a}$

f) $\frac{25a}{20c} \cdot \frac{4c}{5a}$; $\frac{121x}{81x} \cdot \frac{9z}{11x}$; $\frac{143a}{56b} \cdot \frac{6b}{13a}$

g) $\frac{abc}{4xy} \cdot \frac{xy}{2ab}$; $\frac{45ab}{60c} \cdot \frac{2c}{9b}$; $\frac{11xy}{50ab} \cdot \frac{5a}{55}$

h) $\frac{a+b}{4x+4y} \cdot \frac{5x+5y}{a-b}$; $\frac{3a+3b}{5x-5y} \cdot \frac{10x-10y}{9a+9b}$

i) $\frac{3a-5b}{2a-7b} \cdot \frac{2c+4d}{6c+4d}$; $\frac{24x+24y}{12x-28y} \cdot \frac{13z}{9z}$

20.8 Gemischte Aufgaben – Dividieren von Brüchen

a) $\frac{56}{59} : 8$; $\frac{48a}{63b} : 6a$; $\frac{16x}{81y} : 8x$; $\frac{72ab}{125} : 8a$

b) $\frac{5a}{6b} : 12a$; $\frac{9xy}{13y} : -2x$; $\frac{13ab}{15} : 13a$; $\frac{121}{13a} : 11b$

c) $4\frac{1}{3} : 15$; $7\frac{7}{9b} : 6b$; $8\frac{5x}{7y} : \frac{4}{7x}$; $5\frac{9a}{10} : \frac{3}{10}$

d) $\frac{3}{5} : \frac{4}{10}$; $\frac{5a}{8c} : \frac{3ab}{4c}$; $\frac{7x}{8} : \frac{21x}{48y}$; $\frac{3a}{8b} : \frac{9}{16}$

e) $\frac{ab}{12} : \frac{b}{4}$; $\frac{4xy}{13} : \frac{8yz}{39}$; $\frac{6a}{21} : \frac{48ab}{7c}$; $\frac{3x}{14} : \frac{6xy}{21z}$

f) $\frac{a}{a+b} : \frac{x}{a+b}$; $\frac{6x+6y}{4a-4b} : \frac{12}{ab}$