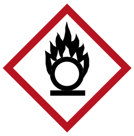
Sicherheitskennzeichnung für Gefahrstoffe (DIN EN ISO 7010, DIN 4844-1)

Piktogramm	Gefahrenklasse	Piktogramm	Gefahrenklasse
	Instabile explosive Stoffe, Gemische und Erzeugnisse mit Explosivstoffen, selbstzersetzliche Stoffe und Gemische Explosionsgefährlich E E: engl. explosive		Auf Metalle korrosiv wirkend, hautätzend, schwere Augenschädigung Ätzende Chemikalie C C: engl. corrosive
	Entzündbar, selbsterhitzungsfähig, selbstzersetzlich, pyrophor, Organische Peroxide Hochentzündlich F+ Leichtentzündlich F F: engl. flammable		Akute Toxizität Sehr giftig T+ Giftig T T: engl. toxic
	Entzündend (oxidierend) wirkend Brandfördernd O O: engl. oxidizing		Div. Gesundheitsgefahren
	Gase unter Druck, verdichtete; verflüssigte, tiefgekühlte; verflüssigte, gelöste Gase		Gewässergefährdend (Umwelt)

Sicherheitskennzeichnung am Arbeitsplatz (DIN EN ISO 7010, DIN 4844-1)

Zeichensorte	Bedeutung	Farbe	Form	Beispiel	
Verbotszeichen	Verbot	Rot	Kreis mit Diagonalbalken		keine offene Flamme, Feuer, offene Zündquelle
Gebotszeichen	Gebot	Blau	Kreis		Gehörschutz benutzen, weitere: Augenschutz benutzen
Warnzeichen	Warnung	Gelb	gleichseitiges Dreieck mit gerundeten Ecken		Warnung vor explosionsgefährlichen Stoffen
Rettungszeichen	Gefahrlosigkeit	Grün	Quadrat		Sammelstelle, weitere: Notausgang, Erste Hilfe
Brandschutzzeichen	Brandschutz	Rot	Quadrat		Feuerlöscher, weitere: Brandmeldetelefon

Signalwörter

Signalwörter sind Kennzeichnungselemente, die Auskunft über den relativen Gefährdungsgrad der Stoffe und Gemische geben und auf potenzielle Gefahren für die Menschen aufmerksam machen.

GEFAHR	Für die schwerwiegenden Gefahrenkategorien	Quelle der Piktogramme auf U2 und U3: UNECE/GHS
ACHTUNG	Für die weniger schwerwiegenden Gefahrenkategorien	

EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Bauberufe

Horst Mentlein
Peter Peschel

Tabellenbuch Hochbaufacharbeiter, Maurer, Beton- und Stahlbetonbauer

Tabellen – Formeln – Regeln – Bestimmungen

1. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 43234

Autoren des Tabellenbuches Hochbaufacharbeiter, Maurer, Beton- und Stahlbetonbauer

Mentlein, Horst	Dr.-Ing.	Lübeck
Peschel, Peter	OStD a.D.	Göttingen

Lektorat
Peter Peschel

Bildbearbeitung:
Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Die DIN-Angaben in diesem Tabellenbuch beziehen sich auf die neusten Ausgaben der Normblätter und sonstiger amtlicher Regelwerke (Redaktionsschluss 31.08.2023). Die dargestellten Angaben sind jedoch nur auf das Wesentliche beschränkte und didaktisch ausgewählte Teile der Originalquellen. Verbindlich sind jeweils nur die DIN-Blätter und jene Bestimmungen selbst. Die DIN-Blätter können von der Beuth-Verlag GmbH, Burggrafenstraße 6, 10787 Berlin, bezogen werden.
Der Bezug zu den DIN-Normen ist i. d. R. bei den jeweiligen Tabellen ausgewiesen. Quellenangaben zu Produktinformationen, Herstellerangaben, Richtlinien, Arbeits- und Merkblätter der bauspezifischen Verbände und Vereine sind an der jeweiligen Stelle vermerkt und im Quellenverzeichnis aufgeführt.

1. Auflage 2024

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-7585-4323-4

Satz: PER MEDIEN & MARKETING GmbH, 38102 Braunschweig, www.per-mm.de
Umschlag: Blick Kick Kreativ KG, 42699 Solingen
Umschlagfoto: © Wolfilser – stock.adobe.com
Druck: media print solutions GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Das Tabellenbuch „Hochbaufacharbeiter, Maurer, Beton- und Stahlbetonbauer“ erweitert die bewährte Europa-Fachbuchreihe für Bauberufe. Es kann jedoch seines eigenständigen Charakters wegen sowohl alleine als auch in Verbindung mit anderen Lehrbüchern in der Aus- und Weiterbildung sowie in der beruflichen Praxis verwendet werden. Es enthält Tabellen, DIN-Normen, Regeln und Bestimmungen von Behörden und Institutionen und viele Stoffwerte und Konstruktionslösungen.

In erster Linie ist dieses Tabellenbuch für die Ausbildung der Hochbaufacharbeiter, Maurer, Beton- und Stahlbetonbauer bestimmt. Um der beruflichen Praxis Rechnung zu tragen wurden Informationen für Fliesen-, Platten- und Mosaikleger sowie Estrichleger aufgenommen.
Die Auswahl der Inhalte erfolgte unter weitgehender Berücksichtigung der Bundesrahmenlehrpläne für die Bauberufe und wurde auf der Grundlage der neuesten Ausgaben aller einschlägigen deutschen und europäischen Regelwerke bearbeitet.

Der Inhalt des Buches gliedert sich in nebenstehend aufgeführten acht Themenbereiche. Die Vielfalt der Informationen bedingt, dass vereinzelt Informationen einem Kapitel zugeordnet werden, die auch an anderen Stellen stehen könnten. Dies gilt insbesondere für das Kapitel Baustoffe. Querverweise auf ähnliche Inhalte, verwendete Tabellen oder an anderer Stelle verwendete Formeln werden durch ein Dreieck ▶ mit Angabe der Seite gekennzeichnet.

Zum schnellen Auffinden bestimmter Sachverhalte dienen das umfangreiche Inhaltsverzeichnis, insbesondere ein ausführliches Sachwortverzeichnis mit über 1200 Begriffen und das bewährte Daumen-Griffregister. Im Bild- und Quellenverzeichnis sind die im Tabellenbuch zitierten aktuellen Normen aufgeführt.

Ergänzt wird das Medienangebot für Hochbaufacharbeiter, Maurer, Beton- und Stahlbetonbauer durch das Tabellenbuch in digitaler Form, das Fachbuch Bautechnik Grundbildung, das Fachbuch für die Fachstufen und das Übungsbuch Prüfungsvorbereitung aktuell für den Hochbau.

Alle, die durch ihre Anregungen zur Entwicklung des Tabellenbuches für Hochbaufacharbeiter, Maurer, Beton- und Stahlbetonbauer beigetragen haben, sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Ebenso bedanken sich die Autoren dieses Tabellenbuches bei den Autoren des Tabellenbuches Bautechnik im Verlag Europa-Lehrmittel für die Möglichkeit, Abbildungen und Textergänzungen zu entnehmen und für das vorliegende Werk anzupassen.

Für Anregungen zur Weiterentwicklung, Verbesserungsvorschläge, Fehlerhinweisen und Meinungsäußerungen sind wir stets dankbar. Sie können dafür unsere Adresse **lektorat@europa-lehrmittel.de** nutzen.

Göttingen, im Winter 2023/24 — Autoren und Verlag

Mathematik 1 — 1

Physik, Chemie, Statik 2 — 2

Bauzeichnungen 3 — 3

Baustoffe 4 — 4

Mauerwerksbau 5 — 5

Beton- und Stahlbetonbau 6 — 6

Baukonstruktionen und Bautenschutz 7 — 7

Baubetrieb 8 — 8

Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . 3
1 **Inhalt** . . . 4

1 Mathematik . . . 5
1.1 Zeichen, Begriffe und Tafeln . . . 5
1.2 Rechenarten . . . 7
1.3 Dreisatzrechnung . . . 10
1.4 Prozentrechnung und Zinsrechnung . . . 11
1.5 Längen und Winkel . . . 12
2 1.6 Flächen . . . 13
1.7 Körper . . . 15
1.8 Geometrie . . . 18
1.9 Flächen und Flächenschwerpunkte . . . 21
1.10 Gleichungen und Ungleichungen . . . 22

2 Physik, Chemie, Statik . . . 23
2.1 Physikalische Größen, Einheiten und
3 Formelzeichen . . . 23
2.2 Physikalische Grundlagen . . . 24
2.3 Arbeit, Energie, Leistung und Wirkungsgrad . . . 26
2.4 Wärmelehre . . . 27
2.5 Chemie . . . 28
2.6 Statik . . . 32
4 2.7 Spannungen . . . 38
2.8 Lastannahmen . . . 39
2.9 Sicherheitskonzept . . . 40

3 Bauzeichnungen . . . 41
3.1 Zeichengeräte und Materialien . . . 41
3.2 Ausführungshinweise . . . 42
3.3 Bemaßung . . . 45
5 3.4 Symbole in verschiedenen Bauzeichnungen . . . 46
3.5 Treppen (DIN 18065) . . . 50
3.6 Darstellende Geometrie . . . 53

4 Baustoffe . . . 55
4.1 Natürliche Gesteine . . . 55
4.2 Ziegel und Klinker . . . 58
4.3 Kalksandsteine . . . 62
6 4.4 Mauersteine aus Beton/Betonsteine . . . 64
4.5 Porenbetonsteine . . . 65
4.6 Fliesen und Platten . . . 66
4.7 Gipsplatten, Wandbauplatten . . . 68
4.8 Pflastersteine . . . 69
4.9 Rohre für Abwasserleitungen . . . 70
4.10 Baukalk . . . 71
7 4.11 Zement . . . 72
4.12 Gips, Gips-Trockenmörtel, Calciumsulfatmörtel . . . 75
4.13 Gesteinskörnungen . . . 76
4.14 Gesteinskörnung für Beton . . . 77
4.15 Estrichmörtel . . . 81
4.16 Mauermörtel . . . 82
4.17 Putzmörtel . . . 84
8 4.18 Dünnbettmörtel . . . 86
4.19 Mörtel und Kleber für Fliesen und Platten . . . 86
4.20 Spezialmörtel und Kleber . . . 87
4.21 Beton . . . 88
4.22 Stahl . . . 101
4.23 Betonstähle . . . 102
4.24 Kunststoffe . . . 105
4.25 Dämmstoffe, Dichtungsstoffe und Sperrstoffe . . . 106
4.26 Holz . . . 108

5 Mauerwerksbau . . . **111**
5.1 Maßordnung im Hochbau . . . 111
5.2 Gemauerte Wände . . . 111
5.3 Statische und konstruktive Maßnahmen . . . 113
5.4 Vereinfachte Mauerwerksbemessung . . . 114
5.5 Charakteristische Druckfestigkeiten . . . 115
5.6 Nichttragende innere Trennwände . . . 116
5.7 Kelleraußenwände . . . 117
5.8 Mauerwerksarten . . . 118
5.9 Bauteile und Konstruktionsdetails . . . 121
5.10 Mauerwerk aus Naturstein . . . 123
5.11 Umweltbedingungen des Mauerwerks . . . 124
5.12 Mauerwerksverbände . . . 125
5.13 Hausschornsteine . . . 127

6 Beton- und Stahlbetonbau . . . **129**
6.1 Betondruck- und Betonzugfestigkeiten . . . 129
6.2 Deckensysteme . . . 130
6.3 Fundamente aus unbewehrtem Beton 131
6.4 Allgemeine Bewehrungsregeln . . . 132
6.5 Konstruktionshinweise für Stahlbetonbauteile . . . 137
6.6 Querschnittstafeln für Balken- und Plattenbewehrung . . . 140
6.7 Schalungsbau . . . 141

7 Baukonstruktionen und Bautenschutz . . . **145**
7.1 Gerüstbau . . . 145
7.2 Baugruben . . . 148
7.3 Bauvermessung . . . 150
7.4 Befestigungssysteme . . . 153
7.5 Wärmeschutz . . . 155
7.6 Feuchteschutz . . . 160
7.7 Schallschutz . . . 162
7.7 Brandschutz . . . 165

8 Baubetrieb . . . **166**
8.1 Kalkulation und Lohnkosten . . . 166
8.2 Bauvertragsrecht und Abrechnung . . . 167
8.3 Baustoffbedarf und Arbeitszeitbedarf 173
8.4 Gefahrstoffe im Bauwesen . . . 175

Bild- und Quellenverzeichnis . . . **176**

Sachwortverzeichnis . . . **179**

1 Mathematik

1.1 Zeichen, Begriffe und Tafeln

Mathematische Zeichen

Mathem. Zeichen	Sprechweise
$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$:=$	definitionsgemäß gleich
$\approx$	ungefähr gleich
$\ldots$	usw., bis
$\triangleq$	entspricht
$<$	kleiner als
$\leq$	kleiner oder gleich
$>$	größer als
$\geq$	größer oder gleich
$\gg$	sehr groß gegen
$\ll$	sehr klein gegen
$\sim$	proportional
$\cong$	kongruent zu

Mathem. Zeichen	Sprechweise
$\perp$	senkrecht auf
$\parallel$	parallel zu
$+$	plus
$-$	minus
$\times, \cdot$	mal
$:, /$	durch, geteilt durch
$\sum$	Summe von, Summe aller
$\prod$	Produkt von, Produkt aller
$\sqrt{\ }$	Quadratwurzel aus
$\sqrt[n]{\ }$	n-te Wurzel aus
Δx	Delta-x
%	Prozent
‰	Promille

Mathem. Zeichen	Sprechweise
$\overline{AB}$	Strecke
$\overset{\frown}{AB}$	Bogen
g	Gerade
$\sphericalangle$	Winkel
⊾ ∟	rechter Winkel
m	Steigung
P, Q	Punkte
x, y, z	Koordinaten
∞	unendlich
$\Rightarrow$	daraus folgt

Technische Zusammenhänge werden meist in ihrer kürzesten Form durch Formeln beschrieben. Allgemeine Formelzeichen werden *kursiv* geschrieben.

Römische Zahlen

I = 1	XL = 40
II = 2	L = 50
III = 3	LX = 60
IV = 4	LXX = 70
V = 5	LXXX = 80
VI = 6	XC = 90
VII = 7	C = 100
VIII = 8	CCC = 300
IX = 9	CD = 400
X = 10	D = 500
XI = 11	DCCC = 800
XIV = 14	CM = 900
XIX = 19	XM = 990
XX = 20	IM = 999
XXI = 21	MMXXIII = 2023

Konstanten

Größe	Zahlenwert
π	3,141 593
$\pi : 4$	0,785 398
$\pi : 180$	0,017 453
π^2	9,869 604
$1 : \pi$	0,318 310
$180 : \pi$	57,295 780
$\sqrt{1/\pi}$	0,564 190
$\sqrt{2}$	1,414 214
$\sqrt{3}$	1,732 051
e	2,718 282

Auf- und Abrunden

Aufrunden: Die letzte Ziffer einer gerundeten Zahl ist um 1 zu erhöhen, wenn die nächste Ziffer der nichtgerundeten Zahl kleiner als 5 ist.

Abrunden: DIe letzte Ziffer einer gerundeten Zahl bleibt unverändert, wenn die nächste Ziffer der nichtgerundeten Zahl kleiner als 5 ist

Beispiele

$\pi = 3{,}14159265\ldots$ wird durch

3,1416	aufgerundet (Zehntausendstel)
3,142	aufgerundet (Tausendstel)
3,14	abgerundet (Hundertstel)
3,1	abgerundet (Zehntel)

Große Zahlen

10^6 = 1 000 000 = Million
10^9 = 1 000 000 000 = Milliarde
10^{12} = Billion
10^{18} = Trillion
10^{24} = Quadrillion
10^{30} = Quintillion
10^{36} = Sextillion

Griechisches Alphabet

A α Alpha	B β Beta	Γ γ Gamma	Δ δ Delta	E ε Epsilon	Z ζ Zeta	H η Eta	Θ ϑ Theta
I ι Iota	K $\varkappa$ Kappa	Λ λ Lambda	M μ My	N ν Ny	Ξ ξ Xi	O o Omikron	Π π Pi
P ϱ Rho	Σ σ Sigma	T τ Tau	Υ υ Ypsilon	Φ φ Phi	X χ Chi	Ψ ψ Psi	Ω ω Omega

Umwandlungstabellen

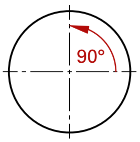
Längeneinheiten	**1 km = 1000 m**		
1 ⇒ **× 10**	**× 10**	**× 10**	
1 m 0,1 m 0,01 m 0,001 m	10 dm 1 dm 0,1 dm 0,01 dm	100 cm 10 cm 1 cm 0,1 cm	1 000 mm 100 mm 10 mm 1 mm
: 10	**: 10**	**: 10** ⇐	

Flächeneinheiten	**1 km² = 1 000 000 m²**		
⇒ **× 100**	**× 100**	**× 100**	
1 m² 0,01 m² 0,0001 m² 0,000 001 m²	100 dm² 1 dm² 0,01 dm² 0,0001 dm²	10 000 cm² 100 cm² 1 cm² 0,01 cm²	1 000 000 mm² 10 000 mm² 100 mm² 1 mm²
: 100	**: 100**	**: 100** ⇐	

Volumeneinheiten	**1 km³ = 1 000 000 000 m³**		
⇒ **× 1000**	**× 1000**	**× 1000**	
1 m³ 0,001 m³ 0,000 001 m³ 0,000 000 001 m³	1 000 dm³ 1 dm³ 0,001 dm³ 0,000 001 dm³	1 000 000 cm³ 1 000 cm³ 1 cm³ 0,001 cm³	1 000 000 000 mm³ 1 000 000 mm³ 1 000 mm³ 1 mm³
: 1000	**: 1000**	**: 1000** ⇐	

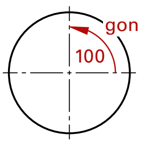
Zeiteinheiten			
(Jahr) 1 a = 365 d (Monat) 1 m = (1/12) a	(Tag) 1 d = 24 h (Stunde) 1 h = 60‘	(Minute) 1‘ = 60“ (Sekunde) 1“ = (1/60)‘	

Umrechnung Winkeleinheiten — 180° ≙ 200^{gon}



Grad (°; auch Altgrad, Taschenrechneranzeige: DEG von englisch Degree)
Vollkreis = 4 × 90° = 360°
Unterteilungen: 1° = 60' (Minuten, Winkel-Minuten)
1' = 60" (Sekunden, Winkel-Sekunden)
Umrechnungen: $1{,}4° = 1° + 0{,}4° \cdot \frac{60'}{1°} = 1° + 24' = 1°24'$

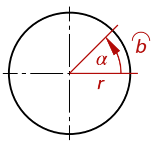
$1°24' = 1° + 24' \cdot \frac{1°}{60'} = 1° + 0{,}4° = 1{,}4°$



Gon (^{gon}; auch Neugrad, Taschenrechneranzeige: GRAD)
Vollkreis = 4 x 100^{gon} = 400^{gon}
Umrechnungen: $1^{gon} = \frac{360°}{400^{gon}} \cdot 1^{gon} = 0{,}9°$

$1{,}4^{gon} = 1{,}4^{gon} \cdot 9°/10^{gon}$ — $1{,}26° = 1{,}26° \cdot 10^{gon}/9°$

$1{,}4^{gon} = 1{,}26°$ — $1{,}26° = 1{,}4^{gon}$



Radiant oder Bogenmaß (rad, Taschenrechneranzeige: RAD)

Definition $\alpha = \frac{\widehat{b}}{r}$

Vollkreis $\alpha = 2\pi = 6{,}28 \ldots$
Umrechnungen: 1 rad = 180°/π = 57,296°
1° = π/180° = 0,0175 rad
1^{gon} = π/200^{gon} = 0,0157 rad

Besondere Längeneinheiten	**Besondere Flächeneinheiten**	**Besondere Volumeneinheiten**
1 Zoll (”) = 2,54 cm	1 km² = 100 ha	1 hℓ = 100 ℓ
1 inch = 1 Zoll	1 ha = 100 a	1 barrel = 1,59 hℓ
1 mile = 1609 m	1 a = 100 m²	1 gallone = 4,546 ℓ
1 mil = 0,0245 mm	1 Morgen = 25 a	1 ℓ = 1 dm³

1

1.2 Rechenarten

Grundrechenarten

Rechenart	a	b	c
Addition	Summand	Summand	Summenwert
	Beispiel	$a + b = c$	
Subtraktion	Minuend	Subtrahend	Differenzwert
	Beispiel	$a - b = c$	
Multiplikation	Faktor	Faktor	Produktwert
	Beispiel	$a \cdot b = c$	
Division	Dividend	Divisor	Quotientenwert
	Beispiel	$a : b = c$	

Addition und Multiplikation

Kommutativität	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivität	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Stufen der Rechenarten

Stufe 1	Addition, Subtraktion
Stufe 2	Multiplikation, Division
Stufe 3	Potenzierung, Radizierung

Beispiele **Addition, Subtraktion**

$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$
$$a - 0 = a \quad \text{aber} \quad 0 - a = -a$$
$$a + (-b) = a - b$$
$$a - (-b) = a + b$$
$$-(a + b) = -a - b$$
$$-(a - b) = -a + b = b - a$$

Beispiele **Multiplikation**

- Schreibweise: $a \cdot b = ab$, $2 \cdot a = 2a$
  $(a) \cdot (b) = (b) \cdot (a)$, $ab = ba$
  $abc = acb = bac = bca = cab = cba$
- Der Multiplikationspunkt kann laut Definition in der Mathematik entfallen.
  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0\,a = 0$
  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1\,a = a$
- Gleiche Vorzeichen ergeben plus, ungleiche Vorzeichen ergeben minus:
  $(+a)\,(+b) = (-a)\,(-b) = +ab = ab$
  $(+a)\,(-b) = (-a)\,(+b) = -ab$

Sonstige Rechenarten

Rechenart	a	b	c
Potenzierung	Basis	Exponent	Potenzwert
	Beispiel	$a^b = c$	
Radizierung	Radikant	Wurzelexponent	Wurzelwert
	Beispiel	$\sqrt[b]{a} = c$	

Rechenregeln ohne Klammern

Gleichstufige Rechenarten werden von links nach rechts ausgeführt.

Beispiel $8 - 2 + 3 = 6 + 3 = 9$

Bei ungleichstufigen Rechenarten wird die Rechenart höherer Stufe zuerst ausgeführt. Es gilt Punktrechnung vor Strichrechnung sowie Potenzieren und Radizieren vor Punktrechnung und Strichrechnung.

Beispiel

$$8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$$
$$20 : 5 + 3 \cdot 7 = 4 + 21 = 25$$
$$14 + 3 \cdot 2^3 = 14 + 3 \cdot 8 = 38$$

Klammerregeln

Die Rechnung innerhalb einer Klammer wird stets vor der Rechnung außerhalb der Klammer ausgeführt.

Beispiel $(2 + 9) \cdot 6 = 11 \cdot 6 = 66$

Bei mehrfacher Klammerung werden von innen nach außen runde, eckige und geschweifte Klammern benutzt. Die Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

Beispiel

$$2 \cdot \{3 + 4 \cdot [26 - 2 \cdot (3 + 4)] : 3\} =$$
$$2 \cdot \{3 + 4 \cdot [26 - 2 \cdot 7] : 3\} =$$
$$2 \cdot \{3 + 4 \cdot 12 : 3\} =$$
$$2 \cdot 19 = 38$$

Auflösen der Klammer mit **PLUS (+)** vor der Klammer ⇒ Klammer kann entfallen.
Auflösen der Klammer mit **MINUS (–)** vor der Klammer ⇒ Klammer kann entfallen, wenn alle Vorzeichen in der Klammer umgekehrt werden.
Faktor vor der Klammer mit Summanden ⇒ Jeder Wert in der Klammer wird mit dem Faktor multipliziert.

Beispiele

$$(a - b) \cdot c = c \cdot (a - b) = ac - bc$$
$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a - b) \cdot (c + d) = ac + ad - bc - bd$$
$$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$$
$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Bruchrechnung

Rechenoperation	Formeln und Rechenregeln	Beispiele
1 **Erweitern**	Multiplikation von Zähler und Nenner mit gleicher Zahl. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$	$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$ Der Wert bleibt gleich.
Kürzen	Division von Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} : \frac{n}{n} = \frac{a : n}{b : n}$	$\frac{14}{21} = \frac{14}{21} : \frac{7}{7} = \frac{14 : 7}{21 : 7} = \frac{2}{3}$ Der Wert bleibt gleich.
Hauptnenner (HN) bestimmen	Der Hauptnenner (HN) ist das kleinste gemeinsame Vielfache (KgV) der Nenner. Berechnung durch Zerlegung der Nenner in Primfaktoren.	HN von $\frac{1}{4}; \frac{2}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{30}$ $4 = 2 \cdot 2$ $\quad 6 = 2 \cdot 3$ $5 = 5$ $\quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\text{HN} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$
Addition gleichnamige Brüche ungleichnamige Brüche	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{(a \cdot d) + (c \cdot b)}{b \cdot d}$	$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5 + 3}{8} = \frac{8}{8} = 1$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$
Subtraktion gleichnamige Brüche ungleichnamige Brüche	$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{(a \cdot d) - (c \cdot b)}{b \cdot d}$	$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$
Multiplikation Bruch mit Zahl Bruch mit Bruch	$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{3}{8} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$
Division Bruch durch Zahl Bruch durch Bruch	$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \cdot n$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{3}{8} : 5 = \frac{3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{40}$ $\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}$
Umwandeln gemeiner Bruch in Dezimalzahl	übliches Teilen des Zählers durch den Nenner	$\frac{8}{3} = 8 : 3 = 2{,}66... = 2{,}\overline{6}$ $\quad$ $8 : 3 = 2{,}66...$ periodische Wiederholung $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$
Umwandeln endliche Dezimalbrüche reinperiodische Dezimalbrüche unreinperiodische Dezimalbrüche	Erweitern mit 10, 100, 1000 usw., ggf. anschließend kürzen } Rechnung gemäß Beispiel für unreinperiodische Dezimalbrüche	$0{,}375 = \frac{0{,}375 \cdot 1000}{1000} = \frac{3}{8}$ $0{,}\overline{42} = \frac{42}{99}$ $x = 2{,}3\overline{42}$ $\quad$ $1000 \cdot x = 2342{,}\overline{42}$ $-10 \cdot x = -23{,}\overline{42}$ $x = \frac{2319}{990}$ $\quad$ $990 \cdot x = 2319{,}00$
Vorzeichenregeln beim Dividieren	$(+a) : (+b) = +a : b = +\frac{a}{b} \quad b \neq 0$ $(+a) : (-b) = -a : b = -\frac{a}{b} \quad b \neq 0$ $(-a) : (-b) = +a : b = +\frac{a}{b} \quad b \neq 0$	$(+3) : (+8) = +3 : 8 = +\frac{3}{8}$ $(+3) : (-8) = -3 : 8 = -\frac{3}{8}$ $(-3) : (-8) = +3 : 8 = +\frac{3}{8}$
Division durch 0	Eine Division durch 0 ist unzulässig. $+\infty$ bzw. $-\infty$ sind keine reellen Zahlen.	

1

Potenzen

Definition (Sprechweise: a hoch n)	$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ n Anzahl der Faktoren
Spezialfälle (für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$)	$a^1 = a$; $a^0 = 1$ $1^n = 1$; $0^n = 0$
Potenzen mit negativen Exponenten	$a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Vorzeichen beim Potenzieren (für $n \in \mathbb{N}^*$)	$(+a)^n = +a^n$ für alle n $(-a)^n = +a^n$ für gerade n $(-a)^n = -a^n$ für ungerades n
Beispiele	$2a^3 + 3a^3 - a^3 = 4a^3$ $3a^4 + 4a^2 - 2a^2 = 3a^4 + 2a^2$
Produkt von Potenzen	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Quotient von Potenzen	$a^m : a^n = a^{m-n}$ $a^m : b^m = (a : b)^m$

Zehnerpotenzen

0,001	=	10^{-3}	1000	=	10^3
0,01	=	10^{-2}	100	=	10^2
0,1	=	10^{-1}	10	=	10^1
1	=	10^0	1	=	10^0

1 000 000	$= 10^6$	= 1 Million
10 000 000	$= 10^7$	= 10 Millionen
100 000 000	$= 10^8$	= 100 Millionen
1 000 000 000	$= 10^9$	= 1 Milliarde

Beispiele

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$

$10^{-4} = 0{,}0001$

1 ist die vierte Stelle nach dem Komma

Zahlenmengen

Symbol	Zahlenmenge	Menge aller …
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	positiven ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	positiven und negativen ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	endlichen und periodischen Dezimalzahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	endlichen und unendlichen Dezimalzahlen
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen	imaginäre Einheit $i^2 = -1$

Wurzeln

Definition (für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$)	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$
Darstellung mit Bruchpotenzen (für $a \geq 0$)	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
Produkte von Wurzeln (für $a \geq 0$ und $b \geq 0$)	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^q} = a^{\frac{m+q}{n}}$
Eindeutigkeit von Wurzeln (für $a \geq 0$)	$\sqrt[n]{a^n} = a$ $\sqrt[2]{4} = +2$ $\sqrt[3]{27} = +3$

- Wurzeln positiver Radianten sind positiv.
- Wurzeln negativer Radikanden sind für den reellen Zahlenbereich nicht definiert.
  $\sqrt{-5}$ nicht definiert
- Wurzel aus null ist gleich null:
  $\sqrt{0} = 0$

Beispiel (Hinweis auf ± Zeichen)

Sei $x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3} = \pm 1{,}7321\ldots$

(nicht $x = \sqrt{3} = \pm 1{,}7321\ldots$)

Binomische Formeln

1. binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Höhere Potenzen

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots \pm \ldots$

Spezialfälle

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2)$

$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + ab^{n-2} + \ldots + b^{n-1})$

Logarithmen

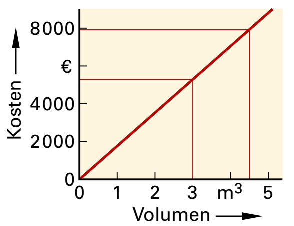
Definition	$\log_b a = c$, wenn $b^c = a$ für $b > 0$ und $a > 0$
Brigg'scher (dekadischer) **Logarithmus**	$\lg a = \log_{10} a$

1.3 Dreisatzrechnung

1

Dreisatzarten	direkter Dreisatz		indirekter Dreisatz	
1. Aussagesatz	$x \Rightarrow y$	je mehr desto mehr	$x \Rightarrow y$	je mehr desto weniger
2. Einheitssatz	$1 \Rightarrow \frac{y}{x}$	oder	$1 \Rightarrow y \cdot x$	oder
3. Schlusssatz	$x_1 \Rightarrow \frac{y \cdot x_1}{x}$	je weniger desto weniger	$x_1 \Rightarrow \frac{y \cdot x}{x_1}$	je weniger desto mehr

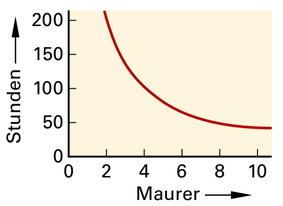
Dreisatz mit geradem Verhältnis (direkt oder proportional)



Beispiel 4,50 m³ Eichenholz kosten 7875,00 €. Wieviel kosten 3,00 m³ Eichenholz?

1. 4,50 m³ Eichenholz kosten 7875,00 €
2. 1,00 m³ Eichenholz kostet $\frac{7875{,}00\ €}{4{,}50\ m^3}$
3. 3,00 m³ Eichenholz kosten $\frac{7875{,}00\ € \cdot 3{,}00\ m^3}{4{,}50\ m^3} = \mathbf{5250{,}00\ €}$

Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis (indirekt oder antiproportional)



Beispiel 5 Maurer benötigen für eine Montagearbeit 80 Stunden. Wie lange dauert die Montage, wenn 8 Maurer zur Verfügung stehen?

1. 5 Maurer benötigen 80 h
2. 1 Maurer benötigt $5 \cdot 80$ h
3. 8 Maurer benötigen $\frac{5 \cdot 80\ h}{8} = \mathbf{50\ h}$

Zusammengesetzter Dreisatz (doppelter Dreisatz)

Es werden 3 Größen gegenübergestellt. Die gesuchte Größe wird stufenweise errechnet. In jeder Stufe wird nur eine Größe verändert.

Beispiel 6 Fliesenleger verlegen bei 8-stündiger Arbeitszeit pro Tag 58 m² Mosaik. Wie viel m² Mosaik verlegen 5 Fliesenleger bei einer Arbeitszeit von 9 h/Tag?

1. Dreisatz: 6 Fliesenleger verlegen in 8 h $58\ m^2$

1 Fliesenleger verlegt in 8 h $\frac{58\ m^2}{6}$

5 Fliesenleger verlegen in 8 h $\frac{58\ m^2 \cdot 5}{6}$

2. Dreisatz: 5 Fliesenleger verlegen in 1 h $\frac{58\ m^2 \cdot 5}{6 \cdot 8}$

5 Fliesenleger verlegen in 9 h $\frac{58\ m^2 \cdot 5 \cdot 9}{6 \cdot 8} = 54{,}375\ m^2 \approx 54\ m^2$

Verhältnisgleichung, Proportionen

Zwei Verhältnisse mit gleichen Werten können gleichgesetzt und als Gleichung geschrieben werden. Das Verhältnis (eine Proportion) kann auch als Bruchgleichung geschrieben werden.

Außenglieder

a : b = 3 : 4 oder $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

Innenglieder Bruchgleichung

Eine Verhältnisgleichung kann als Produktengleichung geschrieben werden.

a : b = 3 : 4 oder **3 · b = 4 · a**

Innenglied × Innenglied = Außenglied 2 Außenglied

1.4 Prozentrechnung und Zinsrechnung

Prozentrechnung

Rechnen mit reinem Grundwert

- Prozent % ≙ 1/100
- Grundwert G
- Prozentwert PW
- Prozentsatz p (%)

$$G = \frac{PW \cdot 100\,\%}{p}$$

$$PW = \frac{G \cdot p}{100\,\%}$$

$$p = \frac{PW \cdot 100\,\%}{G}$$

Beispiel

Eichenholz hat einen tangentialen Schwindverlust von 8,9 %. Um wie viel mm schwindet ein Seitenbrett mit einer Breite $b = 320$ mm?

Lösung

$$PW = \frac{320\text{ mm} \cdot 8{,}9\,\%}{100\,\%} = 28{,}5\text{ mm}$$

Rechnen mit vermindertem Grundwert

- Verminderter Grundwert G_{min}

Verminderter Grundwert	Prozentwert (PW)
100 % – p %	p %
100 % = Grundwert (G)	

$$G_{min} = G - PW$$

$$G = \frac{G_{min} \cdot 100\,\%}{100\,\% - p}$$

Beispiel

Ein Kunde bezahlt wegen mangelhafter Arbeit 10 % des Bruttopreises weniger und überweist 16 500,00 €. Wie hoch war der Bruttopreis?

Lösung

$$G = \frac{16\,500{,}00\text{ €} \cdot 100\,\%}{100\,\% - 10\,\%} = 18\,333{,}33\text{ €}$$

Rechnen mit vermehrtem Grundwert

- Vermehrter Grundwert G_{mehr}

Grundwert (G)	Prozentwert (PW)
100 %	p %
100 % + p % = vermehrter Grundwert	

$$G_{mehr} = G + PW$$

$$G = \frac{G_{mehr} \cdot 100\,\%}{100\,\% + p}$$

Beispiel

Ein Arbeiter erhält nach der Lohnerhöhung von 3,5 % einen Stundenlohn von 13,40 €. Errechnen Sie den vorherigen Lohn.

Lösung

$$G = \frac{13{,}40\text{ €} \cdot 100\,\%}{100\,\% + 3{,}5\,\%} = 12{,}95\text{ €}$$

Zinsrechnung

- Kapital K (€)
- Zinsen Z (€)
- Zinssatz p (%/Jahr)
- Laufzeit t (Jahre)
- 1 Zinsjahr 360 Tage
- 1 Zinsmonat 30 Tage

Kapital	Z

Mit dem Zinssatz werden die Zinsen für ein Jahr berechnet.

$$K = \frac{Z \cdot 100\,\%}{p \cdot t}$$

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100\,\%}$$

$$p = \frac{Z \cdot 100\,\%}{K \cdot t}$$

$$t = \frac{Z \cdot 100\,\%}{K \cdot p}$$

Beispiel

Ein Betrieb erhält einen Kredit über 40 000,00 € mit Zinssatz von 8,5 %.

a) Berechnen Sie die Zinsen.

b) Wie hoch wäre der Zinssatz, wenn 3700,00 € Zinsen bei gleicher Laufzeit anfallen würden?

Lösung (Berechnung für ein Jahr)

$$Z = \frac{40\,000{,}00\text{ €} \cdot 8{,}5\,\%}{100\,\%} = 3400{,}00\text{ €}$$

$$p = \frac{3700{,}00\text{ €} \cdot 100\,\%}{40\,000{,}00\text{ €}} = 9{,}25\,\%$$

Zinseszinsrechnung

Die Zinsen werden dem Kapital am Jahresende zugerechnet und mitverzinst.

- Anzahl der Jahre n

Kapital nach n Jahren:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Beispiel

Ein Maurer legt 5000,00 € festverzinslich mit p = 4,5 % an. Wie hoch ist sein Kapital nach 10 Jahren?

Lösung

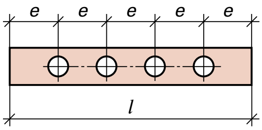
$$K_{10} = 5000{,}00\text{ €} \cdot \left(1 + \frac{4{,}5\,\%}{100\,\%}\right)^{10} =$$

$$K_{10} = 7764{,}85\text{ €}$$

1.5 Längen und Winkel

Teilen der Gesamtlänge in gleiche Abstände

1

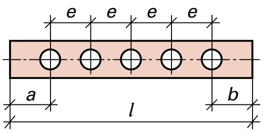


$$e = \frac{l}{n+1}$$

$$z = n+1$$

l	Gesamtlänge, Teilungsstrecke
e	Länge der Abstände
n	Anzahl der Teilungselemente
z	Anzahl der Abstände

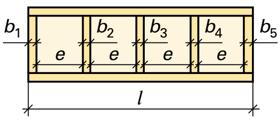
Teilen der Gesamtlänge in gleiche Abstände mit Randabstand



$$e = \frac{l-(a+b)}{n-1}$$

a, b	Randabstände
l	Gesamtlänge, Teilungsstrecke
e	Länge der Abstände
n	Anzahl der Teilungselemente

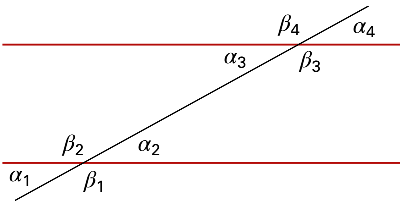
Teilen der Gesamtlänge in gleiche Abstände mit Unterbrechungen



$$e = \frac{l-(b_1+\ldots+b_n)}{n-1}$$

$b_1, \ldots, b_n$	Unterbrechungen
l	Gesamtlänge, Teilungsstrecke
e	Länge der Abstände
n	Anzahl der Teilungselemente

Winkelarten



Scheitelwinkel sind gleich groß.
Scheitelwinkel liegen am Winkelscheitel einander gegenüber.

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \alpha_4$$

Wechselwinkel sind gleich groß.
Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen liegen dem Winkel auf der anderen Seite gegenüber.

$$\alpha_1 = \alpha_3 \quad \text{und} \quad \beta_1 = \beta_4$$

Stufenwinkel sind gleich groß.
Stufenwinkel liegen auf der anderen Stufe der gleichen Seite der Geraden.

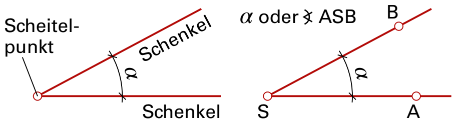
$$\alpha_1 = \alpha_3 \quad \text{und} \quad \beta_1 = \beta_3$$

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.
Nebenwinkel sind Nachbarwinkel auf derselben Seite der Parallelen.

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180° \quad \text{und} \quad \alpha_4 + \beta_4 = 180°$$

Winkeleinheiten

Zwei von einem Punkt ausgehende Halbgeraden bilden einen Winkel. Die Benennung erfolgt mit griechischen Buchstaben α, β, γ.

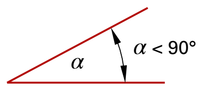


Die Einheiten der Winkel sind Grad (°), Minuten (′) und Sekunden (″). Es gelten dieselben Umrechnungsregeln wie bei den Zeiteinheiten.

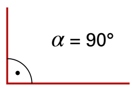
Umrechnung 1° = 60′ 1′ = 60″

0,56666° = 0,56666° · 60′/je 1° → 34′
21′ = 21′ : 60′/je 1° → 0,35°

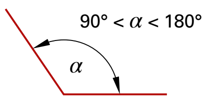
Winkelbenennungen



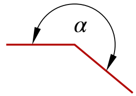
Spitzer Winkel



Rechter Winkel (R)

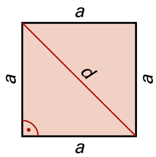
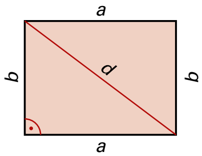
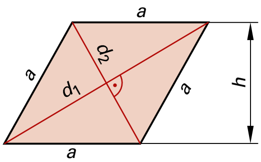
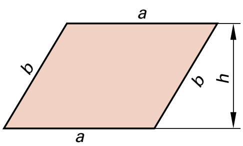
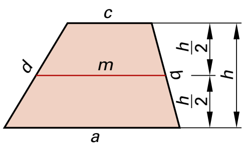
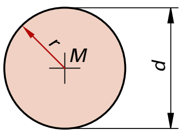
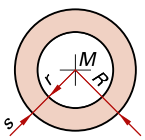


Stumpfer Winkel

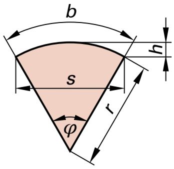
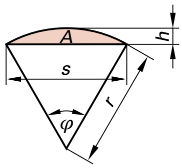
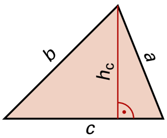
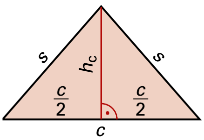
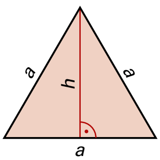
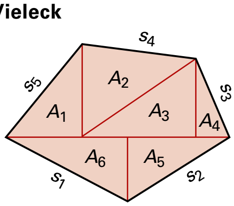


Überstumpfer Winkel

1.6 Flächen

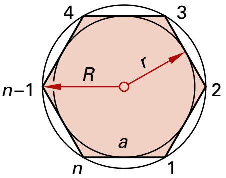
Quadrat 	A Fläche a Seitenlänge d Diagonalenlänge U Umfang	$A = a \cdot a = a^2$ $U = 4 \cdot a$ $d = \sqrt{2} \cdot a \approx 1{,}414 \cdot a$
Rechteck 	A Fläche a Länge (Grundlinie) b Breite (Höhe) d Diagonalenlänge U Umfang	$A = a \cdot b$ (Fläche = Grundlinie mal Höhe) $U = 2 \cdot (a + b)$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$
Rhombus, Raute 	A Fläche a Seitenlänge (Grundlinie) h Höhe d_1, d_2 Diagonalenlängen U Umfang $d_1 \perp d_2$	$A = a \cdot h$ $A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ $a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ $U = 4 \cdot a = 2 \cdot \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$
Parallelogramm 	A Fläche a, b Seitenlängen a Grundlinie h Höhe U Umfang	$A = a \cdot h$ (Fläche = Grundlinie mal Höhe) $U = 2 \cdot (a + b)$
Trapez 	A Fläche a, b, c, d Seitenlängen m mittlere Länge h Höhe U Umfang	$A = m \cdot h = \frac{a + c}{2} \cdot h$ $m = \frac{a + c}{2}$ $U = a + b + c + d$
Kreis 	A Fläche r Radius (Halbmesser) d Durchmesser U Umfang M Kreismittelpunkt	$A = \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot d_2$ $d = 2 \cdot r$ $U = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$
Kreisring 	R Außenradius r Innenradius s Kreisringdicke	$A = A_{\text{Außenkreis}} - A_{\text{Innenkreis}}$ $A = (R^2 - r^2) \cdot \pi$ $s = R - r$

1.6 Flächen

Kreisausschnitt 	A Fläche (Kreisausschnitt) r Radius s Sehnenlänge b Bogenlänge $\varphi°$ Zentriwinkel im Altgradmaß	$A = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot \varphi°}{4 \cdot 360°}$ $b = \frac{d \cdot \pi \cdot \varphi°}{360°}$ $s = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\varphi°}{2}\right)$ $s = 2 \cdot \sqrt{h \cdot (2 \cdot r - h)}$
Kreisabschnitt 	r Halbmesser b Bogenlänge h Bogenhöhe s Sehnenlänge A Fläche des Kreisabschnitts $\varphi°$ Zentriwinkel im Altgradmaß	$A \approx \frac{2}{3} \cdot s \cdot h$ $A = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot \varphi°}{4 \cdot 360°} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$ $s = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\varphi°}{2}\right)$
Dreieck  ► S. 19, 21	A Fläche a, b, c Seitenlängen c Grundlinie h_c Höhe U Umfang s halber Umfang	$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ (Fläche = $\frac{1}{2}$ mal Grundlinie mal Höhe) $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ $U = a + b + c = 2 \cdot s$
Gleichschenkliges Dreieck 	A Fläche s Schenkellänge c Grundlinie h_c Höhe U Umfang	$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ $A = \frac{1}{4} \cdot c \cdot \sqrt{4 \cdot s^2 - c^2}$ $h_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot s^2 - c^2}$ $U = 2 \cdot s + c$
Gleichseitiges Dreieck 	A *Fläche* a *Seitenlänge* h *Höhe* U *Umfang*	$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \approx 0{,}433 \cdot a^2$ $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \approx 0{,}866 \cdot a$ $U = 3 \cdot a$
Unregelmäßiges Vieleck 	A Fläche A_i Teilflächen ($i = 1, 2, ..., m$) s_i Seitenlängen ($i = 1, 2, ..., n$) n Anzahl der Ecken m Anzahl der Teilflächen U Umfang	$A = A_1 + A_2 + ... + A_m$ $U = s_1 + s_2 + ... + s_n$

1.6 Flächen

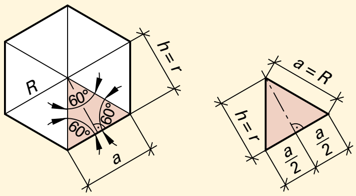
Regelmäßiges Vieleck



A	Fläche
a	Seitenlänge
R	Umkreisradius
r	Inkreisradius
n	Anzahl der Ecken
U	Umfang
$\varphi°$	Mittelpunktswinkel

$$A = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot r$$
$$R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + 4 \cdot r^2}$$
$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$r = R \cdot \cos(\varphi°/2)$$
$$U = n \cdot a$$

Beispiel **Sechseck**



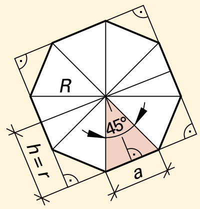
Sechseck

$$A = 6 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$
$$A = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$A \approx 2{,}598 \cdot R^2$$

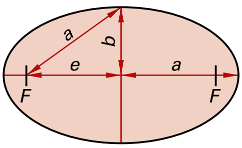
Achteck

$$A = 8 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot r$$
$$A \approx 2{,}828 \cdot R^2$$

Beispiel **Achteck**



Ellipse



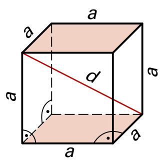
A	Fläche
a	großer Halbmesser
b	kleiner Halbmesser
e	Brennpunktabstand
U	Umfang
F	Brennpunkte

$$A = \pi \cdot a \cdot b \qquad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$U \approx \pi \cdot (a + b)$$
$$U = \pi \cdot (a + b) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{64}\lambda^4 + \ldots\right)$$
$$\text{mit } \lambda = \frac{a - b}{a + 4}$$

1.7 Körper

V = Grundfläche × Höhe

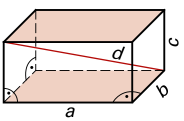
Würfel



A	Grundfläche
V	Volumen
O	Oberfläche
a	Seitenlänge
d	Raumdiagonale

$$A = a^2$$
$$V = A \cdot a$$
$$V = a^3$$
$$O = 6 \cdot a^2$$
$$d = \sqrt{3} \cdot a$$
$$d \approx 1{,}732 \cdot a$$

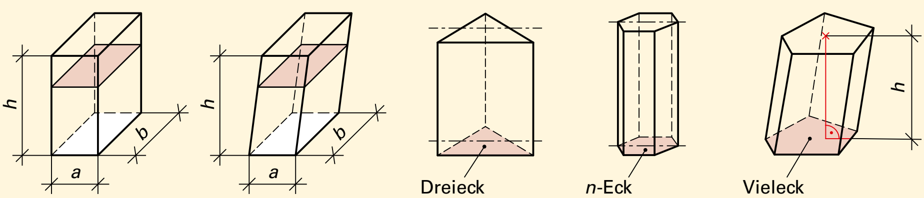
Quader, Rechtkant



A	Grundfläche
V	Volumen
O	Oberfläche
a, b, c	Seitenlängen
d	Raumdiagonale

$$A = a \cdot b$$
$$V = A \cdot c$$
$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Prismen, gerade und schief



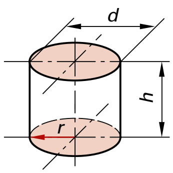
$$V = A \cdot h \qquad O = A_u + A_o + M$$

1

1.7 Körper

$V = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$

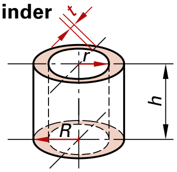
Zylinder
gerade und schief



A	Grundfläche
V	Volumen
O	Oberfläche
R	Außenradius
r	Innenradius
t	Wanddicke
h	Höhe

$A = \pi \cdot r^2$
$V = A \cdot h$
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$
$d = 2 \cdot r$

Hohlzylinder
gerade und schief

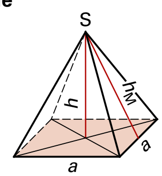


A	Grundfläche
V	Volumen
O	Oberfläche
R	Außenradius
r	Innenradius
t	Wanddicke
h	Höhe

$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
$V = A \cdot h$
$V = \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2)$
$V = \pi \cdot h \cdot t \cdot (R + r)$
$t = R - r$
$O = 2 \cdot \pi \cdot (R + r) \cdot (h + t)$

$V_{\text{Spitzer Körper}} = \frac{1}{3}\,\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$

Pyramide
gerade und schief

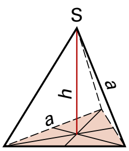


quadratische Grundfläche

V	Volumen
A	Grundfläche
U	Grundumfang
h_M	Mantelhöhe
O	Oberfläche
M	Mantelfläche
h	Höhe
a	Seitenlänge

$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$
$M = \frac{1}{2} \cdot U \cdot h_M$
$A = a^2$
$O = M + A$
$U = 4 \cdot a$

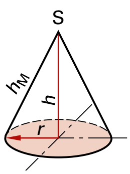
Tetraeder



V	Volumen
A	Grundfläche
a	Seitenlänge
h	Höhe
O	Oberfläche (vier gleichgroße Flächen)

$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3 \approx 0{,}118 \cdot a^3$
$O = \sqrt{3} \cdot a^2 \approx 1{,}732 \cdot a^2$
$A = \frac{1}{4} \cdot O \approx 0{,}433 \cdot a^2$
$h = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a \approx 0{,}816 \cdot a$

Kegel
gerade und schief

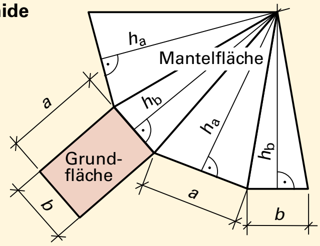


V	Volumen
A	Grundfläche
r	Radius
h	Höhe
h_M	Mantelhöhe
M	Mantelfläche
O	Oberfläche

$A = \pi \cdot r^2$
$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$
$M = \pi \cdot r \cdot h_M$
$O = \pi \cdot r \cdot (h_M + r)$
$h_M = \sqrt{r^2 + h^2}$
$h = \sqrt{h_M^2 - r^2}$

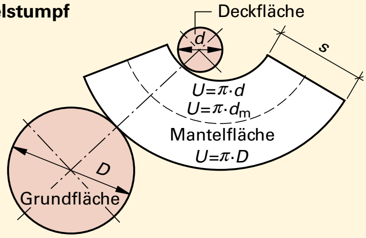
Abwicklung einer Pyramide und eines Kegelstumpfes

Pyramide

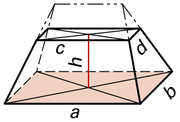
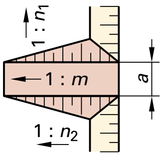
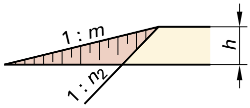
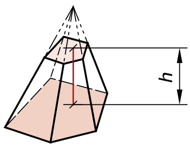
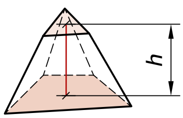
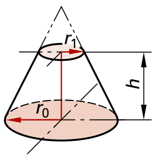
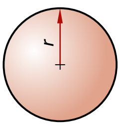
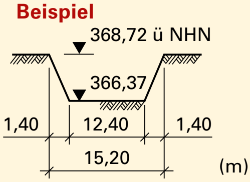


$O = M + A \qquad M = a \cdot h_a + b \cdot h_b$

Kegelstumpf



$O = M + A_o + A_u \qquad M = \pi \cdot d_m \cdot s$

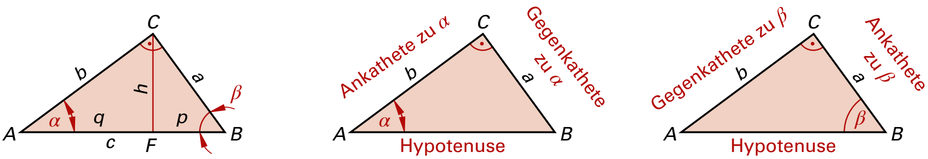
<table>
<tr>
<td>Obelisk (Ponton)
Keil (d = o)
(Baugrube)
</td>
<td>V Volumen
a, b Seitenlängen der Grundfläche
c, d Seitenlängen der Deckfläche
h Höhe
A_0 Grundfläche
A_1 Deckfläche</td>
<td>$V = \frac{h}{6} \cdot [a \cdot b + c \cdot d + (a + c) \cdot (b + d)]$
$A_0 = a \cdot b \qquad A_1 = c \cdot d$
$V \approx \frac{1}{2} \cdot (A_o + A_1) \cdot h$
Sonderfall Keil/Walmdach: $d = 0$
$V = \frac{1}{6} \cdot h \cdot b \cdot (2 \cdot a + c)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Rampe
</td>
<td>$1 : m$ Steigung der Rampe
$1 : n_1$ Steigung der Böschung
</td>
<td>$V = \frac{h^2}{6} \cdot \left(3 \cdot a + 2 \cdot n_1 \cdot h \cdot \frac{m - n_2}{m}\right) \cdot (m - n_2)$
für $n_2 = 0$ (z.B. lotrechte Wand)
$V = \frac{h^2}{6} \cdot (3 \cdot a + 2 \cdot n_1 \cdot h) \cdot m$</td>
</tr>
<tr>
<td>Pyramidenstumpf
gerade und schief
</td>
<td>V Volumen
A_0 Grundfläche
A_1 Deckfläche
h Höhe</td>
<td>Simpsonsche Regel
$V = \frac{h}{3} \cdot \left(A_0 + A_1 + \sqrt{A_0 \cdot A_1}\right)$
Näherungsformel
$V \approx \frac{h}{2} \cdot (A_0 + A_1)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Prismatoid
</td>
<td>A_0, A_1 Deck- und Grundfläche sind parallel, können aber unterschiedliche Formen haben</td>
<td>$A_m = \frac{1}{4} \cdot \left(A_0 + A_1 + 2 \cdot \sqrt{A_0 \cdot A_1}\right)$
$V = \frac{h}{6} \cdot (A_0 + A_1 + 4 \cdot A_m)$
A_m ist der zur Grundfläche parallele Querschnitt in halber Höhe</td>
</tr>
<tr>
<td>Kegelstumpf
gerade und schief
</td>
<td>r_0 Radius der Grundfläche
r_1 Radius der Deckfläche
h Höhe
h_M Mantelhöhe
M Mantelfläche
O Oberfläche</td>
<td>$V = \frac{h}{3} \cdot \pi \cdot (r_0^2 + r_0 \cdot r_1 + r_1^2)$
$h_M = \sqrt{(r_0 - r_1)^2 + h^2}$
$M = \pi \cdot h_M \cdot (r_0 + r_1)$
$O = \pi \cdot (r_0^2 + r_1^2 + h_M \cdot r_0 + h_M \cdot r_1)$
Mantelfläche =
Oberfläche – Deckfläche – Grundfläche</td>
</tr>
<tr>
<td>Kugel
</td>
<td>V Volumen
O Oberfläche
r Radius
d Durchmesser</td>
<td>$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad V \approx 4{,}189 \cdot r^3$
$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$d = 2 \cdot r \qquad d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Beispiel
</td>
<td colspan="2">Rechteckige Baugrube mit den Abmessungen A_u = 12,40 m × 8,65 m und A_o = 15,20 m × 11,45 m. Der Aushub in m³ ist zu berechnen.
$h = 368{,}72 - 366{,}37 = 2{,}35$ m
Näherungsformel (in der Baupraxis bevorzugt)
$V \approx (1/2) \cdot (12{,}40 \cdot 8{,}65 + 15{,}20 \cdot 11{,}45) \cdot (368{,}72 - 366{,}37)$
$V \approx (1/2) \cdot (107{,}26 + 174{,}04) \cdot 2{,}35 \approx 330{,}5\ m^3$
Genaue Formel
$V = (2{,}35/6) \cdot [15{,}20 \cdot 11{,}45 + 12{,}40 \cdot 8{,}25 + (12{,}40 + 15{,}20) \cdot (11{,}45 + 8{,}65)]$
$V = (2{,}35/6) \cdot [174{,}04 + 107{,}26 + 554{,}76] = 327{,}5\ m^3$</td>
</tr>
</table>

1.8 Geometrie

1.8.1 Rechtwinklige Dreiecke

1

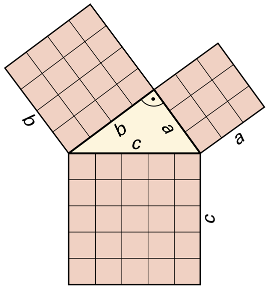
Bezeichnungen



A, B, C	Eckpunkte
h	Höhe
p, q	Hypotenusenabschnitte

Die dem rechten Winkel (1 R = 90°) gegenüberliegende Seite heißt Hypotenuse (c). Die beiden anderen Seiten heißen Katheten (a und b). Bezogen auf die an der Hypotenuse liegenden Winkel heißt die gegenüberliegende Kathete Gegenkathete und die anliegende Kathete Ankathete.

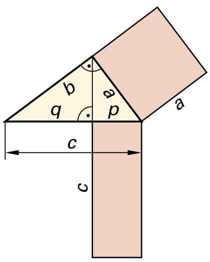
Satz des Pythagoras



Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

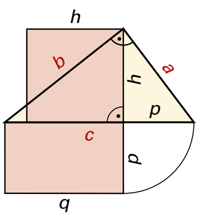
Kathetensatz (Euklid)



Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über einer Kathete gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:

$$a^2 = c \cdot p$$
$$b^2 = c \cdot q$$
$$a^2 + b^2 = c \cdot (p + q) = c^2$$

Höhensatz (Euklid)



Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den Hypotenusenabschnitten:

$$h^2 = p \cdot q$$
$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot c}$$
$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot c}$$

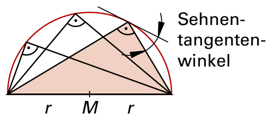
Trigonometrische Funktionen

Sinus	$= \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
Kosinus	$= \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
Tangens	$= \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
Kotangens	$= \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\sin\beta = \dfrac{b}{c}$
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$
$\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$	$\tan\beta = \dfrac{b}{a}$
$\cot\alpha = \dfrac{b}{a}$	$\cot\beta = \dfrac{a}{b}$

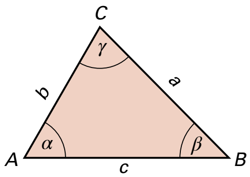
Im rechtwinkligen Dreieck besteht ein Zusammenhang zwischen den Winkeln und den Seiten.

Satz des Thales

Über dem Durchmesser eines Kreises als Grundlinie ist jedes Dreieck, dessen Spitze auf dem Kreisbogen liegt, ein rechtwinkliges Dreieck.
Der Sehnentangentenwinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel über demselben Bogen.

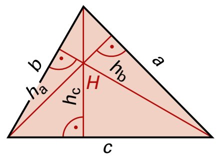


1.8.2 Schiefwinklige Dreiecke



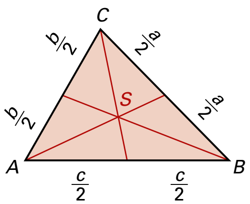
Winkelsumme

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Höhen

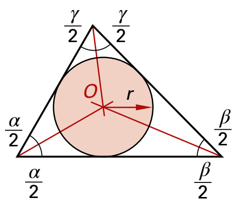
$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$



Inkreis

$r = \frac{2 \cdot A}{a + b + c}$

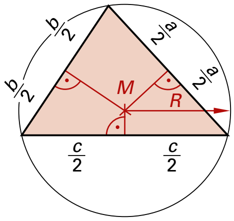
$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot R \cdot (a + b + c)}$



Umkreis

$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta}$

$R = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$



a, b, c	Seiten des Dreiecks
α, β, γ	Winkel im Dreieck (den Seiten a, b, c gegenüber)
A	Flächeninhalt
h_a, h_b, h_c	den Seiten des Dreiecks zugeordnete Höhen
R	Radius des umbeschriebenen Kreises (Umkreis)
r	Radius des eingeschriebenen Kreises (Inkreis)

Die **Höhen** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt (Höhenschnittpunkt H).

Die **Seitenhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Es ist der Flächenschwerpunkt S der Dreiecksfläche.

Der Schwerpunkt ist von den Seitenmitten halb so weit entfernt wie von den gegenüberliegenden Ecken. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

Schwerpunktkoordinaten

Mit $A(x_A/y_A)$, $B(x_B/y_B)$ und $C(x_C/y_C)$ folgt für $S(x_S/y_S)$ $\Rightarrow$

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Die **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Es ist der Mittelpunkt O des Inkreises.

Die **Mittelsenkrechten** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Es ist der Mittelpunkt M des Umkreises.

Euler-Gerade

In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten auf einer Geraden, der sogenannten Euler-Geraden.

Flächenformeln

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \quad$ mit $h_c \perp c$

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$

$A = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$

Heron'sche Formel

$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

mit $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$

Seitensätze

$a + b > c$
$b + c > a$
$a + c > b$

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Bestimmung fehlender Stücke

- Drei Seiten sind gegeben: a, b, c

  $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \Rightarrow \alpha$

  $\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot c \cdot a} \Rightarrow \beta$

  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot a} \Rightarrow \gamma$

- Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben: a, b, γ

  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\, a \cdot b \cdot \cos \gamma}$

  $\sin \alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin \gamma$

  $\sin \beta = \frac{b}{c} \cdot \sin \gamma$

  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$

- Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben: a, b, α mit $a > b$

  $\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha$

  $\gamma = 180° - \alpha - \beta$

  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\, a \cdot b \cdot \sin \gamma}$

Für den Fall $a < b$ können zwei Lösungen existieren: eine (Doppel-)Lösung oder keine Lösung.