OSTWALDS KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 235

Euklid

OSTWALDS KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 235

Reprint der Bände 235, 236, 240, 241 und 243

Die Elemente

Bücher I-XIII

von

Euklid

aus dem Griechischen übersetzt
und herausgegeben von
Clemens Thaer

Einleitung von
Peter Schreiber

EUROPA LEHRMITTEL

Europa-Nr.: 54821

4. Auflage 2015
Druck 5 4

ISBN 978-3-8085-5482-1

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

©2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
http://www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: G. Kuhl · mediacreativ, 40724 Hilden
Druck: Totem, 88-100 Inowroclaw, Polen

Inhalt

VIII. Buch

IX. Buch

X. Buch

XI. Buch

XII. Buch

XIII. Buch

Anmerkungen

Berichtigungen

Einführung

Euklid und die Geschichte seines Werkes

von
Peter Schreiber

Die *Elemente* des Euklid gehören seit ihrer Entstehung vor rund 2300 Jahren zu den meistgelesenen, diskutierten und kommentierten Texten der Welt und seit der Erfindung des Buchdrucks auch zu den meist gedruckten und meist übersetzten Büchern. Über den Mann Euklid ist dagegen so gut wie nichts Sicheres bekannt. Gelegentlich wurde sogar bezweifelt, dass es ihn überhaupt gegeben hat. Einem solchen extravaganten Zweifel wollen wir uns nicht anschließen, halten es aber immerhin für möglich, dass Euklid den ihm zugeschriebenen Text nicht selbst aufgeschrieben hat, sondern dass er sich aus den Aufzeichnungen seiner Schüler, womöglich erst im Laufe einiger Generationen, entwickelt hat.

Ort der Handlung war sicher die um 300 vor Chr. aufblühende Hafenstadt Alexandria nahe dem Nildelta, die 332 von Alexander dem Großen gegründete Hauptstadt des Ptolemäischen Ägypten. Bereits unter der Herrschaft Ptolemäos des I. war dort das Museion gegründet worden, eine universelle antike Forschungs- und Lehrstätte, die für rund 500 Jahre das Zentrum der griechischen Wissenschaft und Kultur für den gesamten Mittelmeerraum werden sollte. Allgemein wird angenommen, dass Euklid bereits in der Gründungsphase dorthin gerufen wurde, und da sein Werk nicht nur deutliche Spuren der Philosophie Platons (427 – 348) und der Methodologie des Aristoteles (384 – 322), sondern auch die damals noch neuen mathematischen Theorien von Eudoxos (um 400 – um 347) und Theaitetos (um 417 – 369?) aus dem Umkreis Platons enthält, ist es sehr wahrscheinlich, dass er aus Athen nach Alexandria kam und dass er etwa zwischen 360 und 280 gelebt haben muss. Nur am Rande kann hier erwähnt werden, dass ihm außer den *Elementen* eine Reihe kleinerer Schriften über geometrische und physikalische Themen zugeschrieben werden, die teils erhalten, teils verloren sind und deren Kenntnis wichtig für das Gesamtbild der Persönlichkeit Euklids ist, einerseits, weil sie zumindest teilweise Gegenstände der damaligen „angewandten Mathematik" (Optik, Astronomie, Musiktheorie) betreffen und damit dem lange kultivierten Bild eines ganz der Platonischen Weltsicht verhafteten reinen Theoretikers widersprechen, andererseits weil Euklid in einigen von ihnen sehr originelle und weit in die Zukunft der Mathematik weisende Gedanken skizziert hat, was ihn vom ebenfalls oft geäußerten Vorwurf befreit, nur ein freilich sehr erfolgreicher und didaktisch geschickter Sammler und Aufbereiter vorhandenen Wissens gewesen zu sein. (Leider sind diese Schriften bis auf eine Ausnahme, die „Data", nicht in deutscher Übersetzung zugänglich.) Umgekehrt darf man aus heutiger Sicht gerade das didaktische Geschick Euklids mit einem Fragezeichen versehen. Zwar sind die *Elemente* reich an großartiger Mathematik, präsentiert wird sie aber in einem extrem trockenen Stil, so dass diese Reichtümer sich keineswegs beim einmaligen und systematischen „Durchlesen" oder „Durchnehmen" erschließen. Dass sie, bzw. Teile daraus, dennoch über Jahrhunderte hin in vielen europäischen Ländern das zentrale Schulbuch für den Mathematikunterricht waren, dass darüber hinaus der euklidische Stil mit der sturen Aufeinanderfolge von Satz und Beweis, ohne Motivation, Anwendung oder Kommentar, bis vor etwa 100 Jahren als didaktisch vorbildlich von allen Schulmathematikern nachgeahmt wurde, hat dem öffentlichen Bild von der Mathematik vermutlich mehr geschadet als irgendein anderer Umstand. Ein wesentlicher Zweck dieser Einleitung besteht daher darin, dem Leser die Augen für die verborgenen Schätze zu öffnen und ihn anzuregen, sich seinerseits Gedanken über die vielleicht noch unentdeckten Aspekte des euklidischen Textes zu machen.

Damit sind wir beim nächsten Thema. Seit Menschen sich mit den *Elementen* wissenschaftlich beschäftigen, und das setzte bereits in der Antike ein, ist die Art dieser Beschäftigung nicht nur deutlich zweigeteilt, sondern die Anhänger dieser beiden Richtungen befehden sich, freilich mit im Laufe der Zeit wechselnden Stilmitteln, bis auf den heutigen Tag. Der einen Partei ging und geht es sozusagen um die „Denkmalspflege", was unter den Bedingungen zahlreicher einander widersprechender teils griechischer, teils spätantiker lateinischer und teils aus dem Arabischen ins Lateinische rückübersetzter Texte zunächst die Jagd nach dem „authentischen Originaltext" bedeutete. Dass es den vielleicht nie gegeben hat, hören die Anhänger dieser Partei nicht gern, zumal seit zu Beginn des 19. Jhs. die vermutlich älteste erhaltene griechische Textfassung (Manuskript „P") aus der Bibliothek des Vatikan entdeckt wurde, die allen modernen Übersetzungen in lebende Sprachen, auch der hier vorliegenden deutschen, zugrunde liegt. Sie ist, soweit es die *Elemente* betrifft, auch die Grundlage der griechisch-lateinischen Standardausgabe der *Opera omnia* Euklids, die zwischen 1883 und 1916 von dem dänischen Altphilologen Johan Ludvig Heiberg (1854 – 1928) und Heinrich Menge herausgegeben wurde. Abgesehen davon, dass die richtige Übersetzung eines Textes ein über philologisches Wissen hinausgehendes tiefes Verstehen des Inhalts voraussetzt, können moderne computergestützte Methoden der historischen Linguistik Interpretationshilfen für Wörter und Wendungen liefern, von denen man sich am Ende des 19. Jhs. noch nichts träumen ließ. Somit sind vermutlich auch der Heiberg-Text und die von ihm abhängigen Übersetzungen nicht so endgültig, wie man lange geglaubt hat.

Der anderen Partei ging es immer, ohne allzu großen Respekt vor dem jeweils gültigen Wortlaut, um einen kreativen Umgang mit der euklidischen Vorgabe. Hier gingen die Mathematiker des mittelalterlichen islamischen Kulturkreises voran. Sie haben ein ebenso umfangreiches wie inhaltlich reiches Erbe hinterlassen, das trotz vieler Bemühungen der letzten Jahrzehnte noch längst nicht voll erschlossen ist. Dies leitet zur dritten Art des wissenschaftlichen Umgangs mit Euklids Erbe über: der Erforschung der Tradierungs- und Wirkungsgeschichte. Diese Geschichte kann hier über das schon Gesagte hinaus nur grob angedeutet werden. 1482 wurden die *Elemente* in Venedig auf der Grundlage einer rund 200 Jahre älteren lateinischen Bearbeitung von Giovanni Campano erstmals gedruckt. 1533 folgte der erste Druck in altgriechisch. Den zahlreichen weiteren griechischen und lateinischen Druckausgaben gesellte sich ab 1543 eine Flut von meist volkstümlichen Übersetzungen und Bearbeitungen in lebenden Sprachen bei. Welche Rolle diese Bücher einmal im Leben des Volkes gespielt haben, darüber wissen wir leider wenig. Eine kleine Ahnung vermittelt die auf wahren Begebenheiten beruhende Novelle *Der Schimmelreiter* von Theodor Storm. Die (nochmalige) Lektüre ihrer ersten Seiten unter diesem Aspekt sei unserem Leser ans Herz gelegt. Am Ende des 19. Jhs. setzten dann die neuen „wissenschaftlichen" Übersetzungen in lebende Sprachen ein, deren Kette bis heute nicht abreißt. Sie wendeten sich wiederum an ein anderes Publikum als die beiden zuvor genannten Arten von Druckausgaben: vor allem an professionelle Mathematiker und Mathematiklehrer, Mathematikhistoriker, Kulturhistoriker und Studenten dieser Fächer, nun natürlich auch an Sie, lieber Leser, was immer Sie sein mögen.

Bevor wir uns einer kurzen Einführung in wesentliche Inhalte und Gesichtspunkte der *Elemente* zuwenden, einige Sätze über Clemens Thaer (1883 – 1974), der 1933-37 die vorliegende deutsche Übersetzung schuf. Nach dem Studium der Mathematik in Gießen lehrte er ab 1913 an der Universität Greifswald (ab 1916 als Professor) und seit 1921 hauptamtlich am Greifswalder

Gymnasium. Dieser freiwillige weitgehende Rückzug aus der akademischen Laufbahn war einerseits durch aktive politische Tätigkeit in diesen Jahren, vor allem aber durch die ungewöhnlich selbstkritische Haltung Thaers begründet, der nach eigener Aussage mangelnde Begabung für eigentlich mathematische Forschung spürte. Daher wendete er sich ganz der Geschichte der Mathematik zu. Auf Grund seiner mutigen antifaschistischen Haltung wurde er 1935 an eine Schule in Cammin (Hinterpommern) strafversetzt und ging nach weiteren Auseinandersetzungen mit den Nazis 1939 vorzeitig in den Ruhestand. Er lebte danach bis zu seinem Tode im wesentlichen in Detmold. Seine wissenschaftliche Tätigkeit, die er noch bis in die siebziger Jahre fortsetzte, umfasst die Übersetzung (1962) der „Data“ Euklids und viele Artikel und Referate zur Geschichte der antiken und der mittelalterlichen islamischen Mathematik.

Die Elemente

Dieses Hauptwerk Euklids ist in 13, üblicherweise römisch numerierte „Bücher“ gegliedert. Die Bücher I bis IV und VI behandeln die ebene Geometrie, die Bücher XI bis XIII die räumliche Geometrie. Eingeschaltet sind drei Bücher VII bis IX über die heute meist als „natürliche“ bezeichneten positiven ganzen Zahlen, das Buch V, welches die eudoxische Proportionentheorie enthält, und das Buch X, dessen Gegenstand die von Theaitetos stammende Theorie der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen ist. Jeder dieser Komplexe hat seine eigenen Kerngedanken und Probleme. Es gibt aber auch einige übergreifende Gesichtspunkte, denen wir uns zunächst zuwenden.

Definitionen und Axiomatik. Euklid beginnt jeden neuen Gegenstand mit Definitionen. Einige von ihnen sind auch aus moderner Sicht Definitionen, d.h. gewisse Begriffe, deren Benutzung lediglich Formulierungen vereinfacht, werden in solcher Weise auf andere Begriffe zurückgeführt, dass sich daraus ergibt, wie man ihren Gebrauch prinzipiell vermeiden könnte. Beispiel DI,11: „Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist.“ Wenn man weiß, was Winkel sind, was ein rechter Winkel ist und was Größenvergleich für Winkel bedeutet, ist die Bedeutung der Eigenschaft „stumpf“ von Winkeln eindeutig, und man könnte an jeder Stelle, wo ein Winkel alpha als stumpf bezeichnet wird, statt dessen sagen „alpha ist größer als ein rechter Winkel“. Andere Definitionen Euklids versuchen, einen Begriff möglichst gut zu beschreiben, z.B. DI,1: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“ Offenbar ermöglicht diese Erklärung nicht, den Begriff Punkt in jedem Zusammenhang durch andere Begriffe auszudrücken, und er ersetzt auch nicht eine Erklärung mit Hilfe von vorgezeigten Beispielen und Gegenbeispielen (wie der Mathematiker Oskar Perron (1880 – 1975) am Beispiel der Erklärung des Begriffes „Hund“ erläuterte).

Buch I und nur dieses beginnt weiterhin mit Postulaten und Axiomen. Dabei sind, entsprechend der Methodologie des Aristoteles, Axiome Grundsätze, die allgemein und unbezweifelbar sind (Man mache sich also z.B. klar, dass die Natur der Objekte, von denen hier gesprochen wird, ebenso offen bleibt wie die spezielle Art des Hinzufügens und Wegnehmens. Vielmehr wird aus moderner Sicht der Umgang mit dem Begriff „gleich“ charakterisiert.) Postulate sind nach Aristoteles solche Grundsätze, die man akzeptieren oder ablehnen kann. Im Fall von Euklids ebener Geometrie betreffen sie die angenommene Ausführbarkeit gewisser Operationen: „Gefordert soll sein...“. Dass zwei beliebig nahe benachbarte oder beliebig weit voneinander entfernte Punkte in eindeutiger Weise geradlinig verbunden werden können (Es geht nicht um die *Existenz* der betreffenden Geraden, sondern um die *Ausführbarkeit*!), könnte man mit guten Gründen bezweifeln. Die Postulate sind somit gewissermaßen Spielregeln. Akzeptiert man sie, so muss man auch alle Folgen akzeptieren. Man entnimmt den Postulaten 1 und 2 auch, dass Euklid unter geraden Linien stets begrenzte Geradenstücke versteht. Sie entstehen durch Verbindung zweier Punkte und können bei Bedarf beliebig verlängert werden. Dies ist für das Verständnis alles Folgenden besonders wichtig, weil die moderne Geometrie stets mit der Vorstellung der unendlich langen Geraden operiert. Nur aus der Begrenztheit der euklidischen Geraden ist auch das folgenreiche 5. Postulat richtig zu verstehen, welches in der ursprünglichen euklidischen Formulierung besagt, dass unter den dort genannten Voraussetzungen die sukzessive Verlängerung der beiden Strecken in der genannten Richtung (also aus heutiger Sicht ein zyklischer Algorithmus) irgendwann einen Schnittpunkt liefern wird. Anders formuliert besagt es, dass die in §17 bewiesene notwendige Bedingung dafür, dass ein Dreieck aus einer Seite und zwei anliegenden Winkeln konstruierbar ist, auch hinreichend ist. Dass dieses Postulat nicht akzeptiert werden muss, wurde im Laufe des 19. Jhs. durch die Entdeckung der logischen Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie (von Bolyai und Lobatschewski) klar. Als Satz einer axiomatischen Theorie ist das 5. Postulat zur Eindeutigkeit der Parallelen durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden gleichwertig.

In der euklidischen Formulierung, die sich auf *Ausführbarkeit* bezieht, besagt es mehr.

Euklids *Elemente* sind seither als Vorbild für den axiomatisch-deduktiven Aufbau von Systemen wahrer Sätze aufgefasst worden. Dagegegen gibt es den Einwand, dass Euklids Begriffssystem ebenso unvollständig ist (z.B. wird mit allen Anordnungsfragen intuitiv umgegangen) wie sein Axiomensystem. Außerdem besitzen die zahlentheoretischen Bücher VII-IX und die stereometrischen Bücher XI-XIII überhaupt keine axiomatische Basis. Wenn also Euklid womöglich gar nicht diese Absicht hatte, was wollte er dann?

Der konstruktive Aspekt. Die als Propositionen bezeichneten kleinsten Einheiten der *Elemente* lassen sich in Sätze mit Beweis und in Konstruktionsaufgaben mit Beschreibung des Lösungsverfahrens und Beweis der Korrektheit der Lösung einteilen. Dies ist auch in der Thaerschen Übersetzung dadurch gekennzeichnet, dass hinter den §§ in Klammern L (Lehrsatz) oder A (Aufgabe) steht. Es gibt jedoch auch unter den als L gekennzeichneten Propositionen einige Aufgaben mit Lösung. Z. B. beschreibt IX.20 das berühmte Verfahren, zu einer gegebenen endlichen Menge von Primzahlen eine weitere Primzahl zu *konstruieren*. Dass es folglich unendlich viele Primzahlen gibt, ist erst eine Folgerung daraus. Damit ist zweierlei illustriert: Der konstruktive Aspekt der *Elemente*, nämlich der Beweis der Existenz gewisser Objekte, die zu gegebenen Objekten in einer vorausgesetzten Beziehung stehen, durch Angabe eines *Verfahrens* zur Beschaffung solcher Objekte, ist nicht auf die Geometrie beschränkt, und die Lehrsätze Euklids sind häufig Sätze über die Konstruktionsaufgaben. Sie weisen bestimmte Voraussetzungen über die gegebenen Objekte als notwendig nach, sagen etwas über die Eindeutigkeit der Resultate oder ziehen Folgerungen aus der Existenz der konstruierten Objekte. Somit ist denkbar, dass Euklids Hauptabsicht war, die von den Ägyptern und Babyloniern überlieferte mathematische Kultur der Angabe von Lösungsverfahren für Aufgabentypen durch die argumentative Rechtfertigung der angegebenen Verfahren zu ergänzen, wobei er zwangsläufig erste Fragmente von deduktiven Theorien schuf. Dabei ist von neuzeitlichen Historikern zu recht immer wieder hervorgehoben worden, dass der Übergang von der autoritären Mitteilung der Lösungsmethoden zu ihrer Begründung vor dem Hintergrund des Überganges zu demokratischen Staatsformen zu sehen ist, in deren öffentlichem Leben das Vertreten des eigenen Standpunktes mit logischen Argumenten allgemein eine große Rolle spielte.

Gebrauch des Zirkels. Unter dem Eindruck des üblichen Zirkelgebrauchs, bei dem von zwei gegebenen Punkten B, C ein Radius abgegriffen und dann mit diesem Radius der Kreis Z(A;B,C) um den Mittelpunkt A geschlagen wird, kann man Euklids 3. Postulat leicht missverstehen. Erst die Aufgaben A1 und A2 machen deutlich, was gemeint ist. A1 benötigt nur den Spezialfall Z(A;A,B), also den Kreis um einen gegebenen Punkt durch einen gegebenen Punkt. A2 führt den allgemeinen Fall mit einem listigen Trick auf diesen Spezialfall zurück. Postulat 3 fordert demnach nur die Ausführbarkeit des Spezialfalles. Wenn es noch eines Beweises für das „konstruktivistische“, verfahrensorientierte Denken Euklids bedarf, so nehme man diesen und vergleiche Euklids Vorgehen mit wohlbekannten Techniken der Rekursionstheorie, die bestimmte nötige Operationen mittels Unterprogrammen auf scheinbar weniger leistungsfähige Operationen zurückführen.

Geometrische Algebra. Die Entdeckung inkommensurabler Strecken durch die Pythagoreer (d.h. Paare von Strecken, die bei keiner Wahl der Maßeinheit gleichzeitig in ganzen Zahlen gemessen werden können) führte bei den Griechen zu einer völligen Verwerfung des zahlorientierten Größenbegriffs: Größen sind in der Geometrie Strecken, Winkel, Flächen oder Körper. Gleichartige Größen kann man addieren, subtrahieren und der Größe nach vergleichen. Multiplikation wird –modern gesagt- durch kartesische Produktbildung realisiert, so dass das Produkt zweier Strecken ein Rechteck, das Produkt einer Strecke und einer Fläche F ein zylindrischer Körper mit der Grundfläche F wird. Damit hatte die griechische Mathematik sich zwei wesentliche Beschränkungen auferlegt, die erst durch René Descartes (1594 – 1650) beseitigt werden konnten: Gleichungen zwischen Größen mussten bei den Griechen homogen sein, d.h. nur Größen gleicher Natur (Dimension) können addiert, subtrahiert und verglichen werden, und die Dimension geometrischer Größen ist höchstens drei. Innerhalb dieser Grenzen leistet die Algebra der Griechen für die Geometrie etwa das, was heute die Koordinatenmethode leistet: die Übersetzung geometrischer Beziehungen zwischen Objekten in die Sprache der Algebra und die Lösung so übersetzter Aufgaben mit im wesentlichen algebraischen Methoden. Buch II gibt eine systematische Einführung in diese geometrisch eingekleidete Algebra, wobei alle Operationen durch geometrische Konstruktion ausgeführt und alle Sätze auf geometrischem Wege bewiesen werden. Am Eingang steht als letzter Teil von Buch I der Satz des Pythagoras: Zum ersten Mal wird hier eine rein geometrische Beziehung zwischen drei Punkten, nämlich einen rechten Winkel aufzuspannen, in eine rein algebraische Aussage über Größen verwandelt, die die gegenseitige Lage dieser Punkte charakterisieren.

Proportionen (Buch V). Was das Verhältnis zweier Größen ist, könnte man nur mittels eines Zahlbegriffs definieren, der dem Begriff der reellen Zahl zumindest nahe kommt. Definition V.3 ist noch ein Relikt eines älteren, vermutlich prozedural orientierten Verhältnisbegriffs, (d.h. sukzessive konstruktive Annäherung mit rationalen Verhältnissen), mit dem im Folgenden nicht mehr gearbeitet wird. Die geniale Idee des Eudoxos bestand darin, dass man den Verhältnisbegriff gar nicht braucht, sondern nur erklären muss, wann zwei Verhältnisse gleich sind, also eine vierstellige Relation A:B = C:D zwischen Größen A, B, C, D.

Definition V.5 ist so beschaffen, dass sie nur voraussetzt, dass A,B von gleicher Art und C,D von gleicher Art sind. Man kann also mit ihrer Hilfe ganz exakt aussagen, dass zwei Strecken sich wie zwei ganze Zahlen oder dass die Inhalte zweier Pyramiden mit gleicher Grundfläche sich wie ihre Höhen verhalten. Indem man eine Proportion von vier Volumina aufstellt, kann man sogar implizit eine Gleichung zwischen Größen der Dimension 6 ausdrücken (die sich ergeben würde, wenn man über Kreuz multipliziert). Definition V,4 beschränkt übrigens die betrachteten Größenbereiche auf solche, die man heute archimedisch nennt: Eine beliebig große Größe soll durch hinreichend oftes Addieren einer beliebig kleinen Größe der gleichen Art übertroffen werden können. Fläche und Strecke können sich demnach nicht im gleichen Größenbereich befinden. In X.1 wird aus Definition V,4 gefolgert: Nimmt man von einer (beliebig großen) Größe immer wieder die Hälfte oder mehr weg, so kann man (nach einer nicht im voraus angebbaren Zahl von Schritten) eine gegebene beliebig kleine Größe der gleichen Art unterschreiten. Archimedisch, gelegentlich und mit größerem Recht Eudoxisch, heißen diese Größenbereiche bzw. das Axiom, das der Aussage entspricht heute, weil Archimedes es bei seinen nichtelementaren Flächeninhalts- und Volumenaussagen extensiv benutzt hat.

Diese Art der Benutzung in indirekten Beweisen für Inhaltsformeln findet man aber auch schon in Buch XII, z.B. §§1, 10.

Zahlentheorie. Eine Schwierigkeit für den heutigen Leser besteht darin, dass die Griechen die Eins (Einheit) nicht als Zahl gelten ließen (vgl. Definitionen VII.1,2). Das hat zur Folge, dass Euklid häufig Sonderfälle behandeln muss. Z.B. ordnet sich aus heutiger Sicht der in V.1 behandelte Fall zwanglos in die allgemeineren Fälle V.2 bzw. V.3 ein. Besondere Beachtung verdienen die Aufgaben IX.18,19. Hier wird womöglich erstmals in der Geschichte der Mathematik eine Aufgabe formuliert, deren Ergebnis nicht ein mathematisches Objekt im damaligen Sinn, sondern eine ja – nein - Antwort und erst im ja - Fall zusätzlich eine Zahl ist. Dementsprechend hat die Lösung den Charakter eines „verzweigten" Algorithmus, in dem außer Rechenschritten Testschritte (hier zwei) auftreten, die ihrerseits mit Hilfe von vorher entwickelten „Unterprogrammen" (ggT, Division mit Rest) bewältigt werden.

Buch X. ist bedeutend länger als alle anderen Bücher der *Elemente* und unterscheidet sich schon äußerlich dadurch, dass es Definitionen nicht nur am Anfang, sondern auch mehrfach zwischendurch enthält. Hier werden Zahlentheorie und geometrische Algebra auf einem höheren Niveau fortgesetzt. Prop. X.28a, die allerdings eventuell später eingefügt wurde, enthält ein Verfahren zur Erzeugung aller pythagoreischen Zahlentripel. X.115a, ebenfalls vermutlich eingefügt, präsentiert den Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrates. Teile von Buch X gehören zum höchststehenden, das die antike Mathematik hervorgebracht hat: eine Klassifikation der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen nach dem Grad der Kompliziertheit. Zum Verständnis für den heutigen Leser empfiehlt es sich, die Definitionen und Aussagen in die Sprache der „Quadratwurzelterme" zu übersetzen, d.h. Formeln, die aus Variablen durch fortlaufende Ineinanderschachtelung der

Grundrechenarten und des Wurzelzeichens gebildet werden können.

Stereometrie. Euklids Beweise sind nirgends so anfechtbar wie am Beginn von Buch XI.

Immerhin kann man aus XI,11 herauslesen, was er unter Konstruieren im Raum versteht: Er legt jeweils in *Gedanken* durch drei (nicht kollineare) Punkte oder eine Gerade und einen Punkt eine Ebene (was aber nicht als eine ausführbare Operation postuliert wird und in der Tat in einem materiellen Sinn zwar ein erstes Mal ausführbar wäre, aber bei mehrfacher Wiederholung den Konstrukteur schnell „einmauern“ würde) und konstruiert dann mit Zirkel und Lineal in dieser Ebene neue Punkte und Geraden, die ihrerseits zur Bestimmung neuer Referenzebenen dienen. Mit diesem Hintergrund liefern seine Konstruktionsbeschreibungen Hinweise für die Ausführung im Mehrtafelverfahren der darstellenden Geometrie, denen man auch heute noch folgen kann. Buch XIII ist vermutlich zusammen mit Buch X als Ganzes von Theaitetos übernommen worden. So erklärt sich, dass Konstruktionsaufgaben und Sätze, die insbesondere das reguläre Fünfeck betreffen, zum Teil hier nochmals wiederholt werden.

Die Variante, in der Euklid die Konstruktion der fünf regulären („Platonischen“) Körper behandelt, nämlich sie in eine Umkugel von gegebenem Radius einzubeschreiben, ist vom praktischen Standpunkt durchaus sinnvoll, da man Körper sehr unterschiedlicher Größe enthält, wenn man immer von der gleichen Kantenlänge ausgeht. Seine Lösungen setzen jedoch eine vorhergehende Analyse der Aufgabe voraus, die er nicht gibt. Heute würde man die euklidische Variante der Aufgabenstellung vermutlich lösen, indem man den gewünschten Körper zunächst mit einer beliebig gewählten Kante konstruiert (was einfacher ist als der Weg des Theaitetoos/Euklid), den Radius der zugehörigen Umkugel bestimmt und das Ganze dann auf die gewünschte Größe ähnlich abbildet.

Hier konnten nur wenige Anregungen gegeben werden, wie man Probleme und Zusammenhänge hinter dem trockenen Text Euklids entdecken kann. Seine unglaubliche Überlebensfähigkeit ist nicht zuletzt darin begründet, dass unzählige Generationen sich in ähnlicher Weise aus der Position ihrer jeweiligen Zeit heraus kritisch und schöpferisch mit den *Elementen* auseinandergesetzt haben. Wenn also im vorstehenden ein wenig der Geist der algorithmisch orientierten Mathematik unserer Tage dominiert, so ist das ein legitimes Gegenstück dazu, dass die Mathematiker im 17. bis 19. Jh. , als die Frage immer dringlicher wurde, was denn eigentlich ein strenger Beweis ist, sich auf das Parallelenproblem einschossen, und dass im philosophisch orientierten Mittelalter intensiv die Frage diskutiert wurde, ob der Winkel zwischen einem Kreis und seiner Tangente gleich Null oder nur unendlich klein ist.

Literatur

Die Sekundärliteratur über Euklid und die *Elemente* ist uferlos und wächst ständig. Wir geben einige neuere Schlüsselliteratur, zum Teil mit Kommentar an, mit deren Bibliographien man sich bei Bedarf den weiteren Weg ins Dickicht dieser Literatur bahnen kann.

Die neuesten Bücher zum Thema sind:

Peter Schreiber, Sonja Brentjes: Euklid (Biographien hervorragender Naturwissenschaftler... Bd. 87). Leipzig: Teubner 1987.

Benno Artmann: Euclid. The Creation of Mathematics. New York-Berlin usw.: Springer 1999 ²2001.

Jürgen Schönbeck: Euklid. (Vita mathematica, Bd. 12) Basel-Berlin-Boston: Birkhäuser 2003.

Eine wunderbare Bibliographie der historischen Euklidausgaben mit vielen Faksimiles ist

Max Steck, Menso Folkerts: Bibliographia Euclideana. Hildesheim: Gerstenberg 1981.

Eine Sammlung wichtiger (faksimilierter) Texte zum Parallelenproblem mit Übersetzung in Interlingua ist

C. E. Sjöstedt: Le axiome de paralleles. Stockholm: Natur och Kultur 1968.

Umfassende historische Auskunft geben die beiden Euclid-Artikel von Ivor Bulmer-Thomas (Life and Works) und J. Murdoch (Transmission of the Elements) in

Ch. Gillispie (Ed.): Dictionary of Scientific Biography, New York: Scribner's 1970 ff.

Zu den hier vertretenen unorthodoxen Meinungen sei verwiesen auf

Peter Schreiber: Anregung durch Euklid. Didaktik der Mathematik 1994, 57-64.

Ders.: Didaktische Bemerkungen zu Euklids Optik. Didaktik der Mathematik 1995, 300-307.

Zur Biographie von Clemens Thaer

Peter Schreiber: Clemens Thaer (1883 – 1974) – Ein Mathematikhistoriker im Widerstand gegen den Nationalsozialismus. Sudhoffs Archiv 80 (1996), Heft 1, 78-85.