L. D. LANDAU · E. M. LIFSCHITZ

LEHRBUCH DER THEORETISCHEN PHYSIK

VII

ELASTIZITÄTSTHEORIE

VERLAG HARRI DEUTSCH

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Band VII

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:
Mechanik
unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2007,
231 Seiten, 56 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1326-2

Band 2:
Klassische Feldtheorie
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2009,
496 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1327-9

Band 3:
Quantenmechanik
unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2007,
660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1328-6

Band 4:
Quantenelektrodynamik
unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2009,
628 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1329-3

Band 5:
Statistische Physik Teil 1
unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2008,
535 Seiten, 78 Abbildungen, 3 Tabellen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1330-9

Band 6:
Hydrodynamik
korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2007,
705 Seiten, 136 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1331-6

Band 7:
Elastizitätstheorie
unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1332-3

Band 8:
Elektrodynamik der Kontinua
5., ergänzte Auflage 1990, 565 Seiten, 65 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1333-0

Band 9:
Statistische Physik Teil 2
4., berichtigte Auflage 1992, 404 Seiten, 18 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1334-7

Band 10:
Physikalische Kinetik
2. Auflage 1990, 480 Seiten, 35 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1335-4

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
ISBN 978-3-8171-1336-1

L. D. LANDAU · E. M. LIFSCHITZ

ELASTIZITÄTSTHEORIE

Mit 32 Abbildungen

Verlag
Harri
Deutsch

Titel der Originalausgabe:
Теория упругости
Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1987 (4., berichtigte und ergänzte Auflage)

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. habil. Hans-Georg Schöpf, Dresden und Prof. Dr. habil. Paul Ziesche, Dresden; übersetzt aus dem Russischen von Prof. Dr. Benjamin Kozik, Chemnitz und Dr. Wolfgang Göhler, Dresden.

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1332-3

Unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt <www.betz-druck.de>
Printed in Germany

VORWORT DER HERAUSGEBER ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Der siebente Band dieser bekannten Lehrbuchreihe zeichnet sich wie das gesamte Werk durch Originalität in der Auswahl und der Darstellung des Stoffes aus. Die Verfasser entwickeln eingangs die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie und widmen sodann dem Gleichgewicht von Stäben und Platten umfangreiche Darlegungen, wie sie gemeinhin in einem Lehrbuch der Theoretischen Physik nicht zu erwarten sind. Nach der Behandlung elastischer Wellen folgt dann als eine relativ moderne, aber praktisch wichtige Anwendung der Elastizitätstheorie eine Einführung in die Theorie der Versetzungen. Mit dem Kapitel über Wärmeleitung und Zähigkeit fester Körper sowie mit dem in der vierten russischen Auflage neu hinzugekommenen Kapitel über flüssige Kristalle werden die Grenzen der konventionellen Elastizitätstheorie weit überschritten.

Der vorliegenden deutschen Auflage liegt die erwähnte russische Neuauflage von 1987 zugrunde. Wir haben sie zum Anlaß genommen, den gesamten deutschen Text gründlich zu überarbeiten.

Dresden, im September 1987

P. Ziesche H.-G. Schöpf

VORWORT ZUR VIERTEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Der wesentliche Inhalt dieses Buches (Kapitel I bis III und V) blieb im Vergleich zu den ersten beiden Auflagen (1944, 1953) unverändert. Damals wurden Elastizitätstheorie und Hydrodynamik gemeinsam als „Kontinuumsmechanik" behandelt. Ein solches Herangehen ergab sich aus der Tatsache, daß die grundlegenden Gleichungen und wichtigen Resultate der Elastizitätstheorie schon lange bekannt waren.

In die dritte Auflage (1965) wurde ein Kapitel über die Versetzungstheorie in Kristallen (gemeinsam mit A. S. Kosewitsch verfaßt) aufgenommen. Dieses Kapitel ist in dieser Auflage geringfügig verändert worden.

Neu in der vorliegenden Auflage ist das Kapitel zur Mechanik flüssiger Kristalle, welches gemeinsam mit L. P. Pitajewski verfaßt wurde. Dieser neue Zweig der Kontinuumsmechanik vereinigt in sich wesentliche Seiten der Mechanik der Fluide mit der Elastizitätstheorie fester Körper. Deshalb scheint es angebracht, ihn in diesen Kurs nach der Darstellung der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie einzufügen.

Wie stets waren mir die Diskussionen mit meinen Freunden und Arbeitskollegen über die in diesem Buch behandelten Fragen sehr nützlich. In diesem Zusammenhang möchte ich G. E. Wolowik, W. L. Ginsburg, W. L. Indenbom, E. I. Katz, J. A. Kosewitsch, W. W. Lebedew und W. P. Minejew für eine Reihe wertvoller Hinweise danken.

Institut für physikalische Probleme
der AdW der UdSSR, Januar 1985

E. M. Lifschitz

AUS DEM VORWORT ZUR ERSTEN RUSSISCHEN AUFLAGE

... In dem Buch, das von Physikern und in erster Linie für Physiker geschrieben wurde, interessierten uns natürlich die Fragen, die gewöhnlich nicht in den Lehrbüchern der Elastizitätstheorie behandelt werden, so z. B. die Fragen der Wärmeleitung und Viskosität der Festkörper sowie eine Reihe von Fragen zur Theorie der elastischen Schwingungen und Wellen.

Andererseits wird eine Reihe spezieller Probleme (z. B. komplizierte mathematische Methoden der Elastizitätstheorie, der Schalentheorie und ähnliches), auf die die Autoren nicht bis ins einzelne spezialisiert sind, nur kurz berührt.

Moskau 1953

L. Landau
E. Lifschitz

INHALTSVERZEICHNIS

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Dichte ϱ
Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$
Deformationstensor $u_{ik} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$
Spannungstensor σ_{ik}
Kompressionsmodul K
Schubmodul μ
Elastizitätsmodul (YOUNGscher Modul) E
Querkontraktionszahl (POISSONscher Modul) σ
longitudinale und transversale Schallgeschwindigkeit c_l und c_t (ausgedrückt durch K, μ oder E, σ — s. S. 109). Die Größen K, μ und E, σ sind durch folgende Formeln verknüpft:

$$E = \frac{9K}{3K + \mu}, \qquad \sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)},$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

Im gesamten Buch wird die bekannte Summationsvereinbarung für Vektor- und Tensorindizes angewendet: Ein doppelt auftretender Index verlangt die Summation über die Werte 1, 2, 3.

In Kapitel VI wird für den räumlichen Differentialoperator das Symbol $\partial_i = \partial/\partial x_i$ verwendet. Das Zeichen $\sim$ bedeutet größenordnungsmäßig gleich, und $\propto$ bedeutet proportional. Hinweise auf die Nummer der Paragraphen und der Formeln in anderen Bänden dieses Lehrbuches sind mit römischen Ziffern versehen: II — „Klassische Feldtheorie" (1973); V — „Statistische Physik, Teil 1" (1976); VI — „Hydrodynamik" (1985); VIII — „Elektrodynamik der Kontinua" (1982).

Die in den Hinweisen genannten Paragraphen- und Formelnummern beziehen sich auf die angegebenen Auflagen und stimmen mit älteren Auflagen u. U. nicht überein.

I GRUNDGLEICHUNGEN

§ 1. Der Verzerrungstensor

Die Mechanik der als Kontinua aufgefaßten festen Körper bildet den Inhalt der *Elastizitätstheorie*.[1])

Unter der Einwirkung äußerer Kräfte werden feste Körper bis zu einem gewissen Grade deformiert, d. h., sie ändern sowohl ihre Form als auch ihr Volumen. Die mathematische Beschreibung der Deformation gestaltet sich folgendermaßen: Die Lage eines jeden Körperpunktes wird durch einen Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ (mit den Komponenten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) im vorgegebenen Koordinatensystem beschrieben. Bei einer Deformation des Körpers werden im allgemeinen seine sämtlichen Punkte ihre Lage ändern. Wir betrachten einen bestimmten Punkt, der vor der Deformation durch den Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ beschrieben wurde. Nach der Deformation hat der Radiusvektor dieses Körperpunktes den neuen Wert $\boldsymbol{r}'$ (mit den Komponenten x_i'). Die Verschiebung des Körperpunktes durch die Deformation wird dann durch den Vektor $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ dargestellt. Wir bezeichnen ihn mit $\boldsymbol{u}$:

$$u_i = x_i' - x_i\,. \tag{1,1}$$

Gewöhnlich wird $\boldsymbol{u}$ *Verschiebungsvektor* genannt. Die Koordinaten x_i' des verschobenen Punktes sind natürlich Funktionen seiner Koordinaten vor der Verschiebung. Daher ist der Verschiebungsvektor u_i ebenfalls eine Funktion der Koordinaten x_i. Die Vorgabe des Vektors $\boldsymbol{u}$ als Funktion der x_i bestimmt vollständig die Deformation des festen Körpers.

Während der Deformation ändern sich die Abstände zwischen den Punkten des Körpers. Wir betrachten zwei beliebige, infinitesimal benachbarte Punkte. Der Abstandsvektor zwischen ihnen war vor der Deformation $\mathrm{d}x_i$, nach der Deformation hat er den Wert $\mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i$. Der Abstand zwischen den Punkten war vor der Deformation

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2}\,,$$

und nach der Deformation ist er

$$\mathrm{d}l' = \sqrt{\mathrm{d}x_1'^2 + \mathrm{d}x_2'^2 + \mathrm{d}x_3'^2}\,.$$

Nach der allgemeinen Regel zur Abkürzung von Summen[2]) können wir

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_i^2\,, \qquad \mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}x_i'^2 = (\mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i)^2$$

---

[1]) Die Grundlagen der Elastizitätstheorie wurden von CAUCHY und POISSON in den 20er Jahren des neunzehnten Jahrhunderts aufgestellt.

[2]) Wie gewöhnlich, werden die Symbole für die Summation über Vektor- und Tensorindizes fortgelassen; die zweifach (im gegebenen Ausdruck) auftretenden Indizes bedeuten überall eine Summation über die Werte 1, 2, 3.

schreiben. Vermöge der Substitution $\mathrm{d}u_i = (\partial u_i/\partial x_k)\,\mathrm{d}x_k$ ergibt sich für $\mathrm{d}l'^2$ der Ausdruck

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_l\,.$$

Da im zweiten Glied auf der rechten Seite über die beiden Indizes i und k unabhängig voneinander summiert wird, können wir sie vertauschen und dieses Glied in folgender symmetrischer Form schreiben:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k\,.$$

Ferner vertauschen wir im dritten Glied die Indizes i und l. Wir erhalten dann $\mathrm{d}l'^2$ in der endgültigen Form

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2u_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k\,, \tag{1,2}$$

wobei der Tensor u_{ik} durch die Gleichung

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{1,3}$$

definiert ist. Der Ausdruck (1,2) liefert die Änderung des Längenelements bei der Deformation.

Der Tensor u_{ik} heißt *Verzerrungstensor*. Aus seiner Definition ist ersichtlich, daß er symmetrisch ist, d. h., es gilt die Beziehung

$$u_{ik} = u_{ki}\,. \tag{1,4}$$

Wie jeden symmetrischen Tensor kann man den Tensor u_{ik} in einem beliebig vorgegebenen Punkt auf *Diagonalform* bringen. Das heißt, zu jedem Punkt gibt es ein Koordinatensystem (Hauptachsen des Tensors), in welchem von den u_{ik} nur die „Diagonalkomponenten" u_{11}, u_{22}, u_{33} von Null verschieden sind. Wir bezeichnen diese Komponenten (Eigenwerte des Tensors) mit $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$. Man muß natürlich im Auge behalten, daß der in einem vorgegebenen Punkt diagonalisierte Tensor in allen übrigen Punkten des Körpers im allgemeinen nicht diagonal ist.

Wenn der Verzerrungstensor im gegebenen Punkt diagonalisiert ist, dann hat das Längenelement (1,2) in der Umgebung des Punktes folgende Form:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik})\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k \\ &= (1 + 2u^{(1)})\,\mathrm{d}x_1^2 + (1 + 2u^{(2)})\,\mathrm{d}x_2^2 + (1 + 2u^{(3)})\,\mathrm{d}x_3^2\,. \end{aligned}$$

Wie man sieht, zerfällt dieser Ausdruck in drei voneinander unabhängige Terme. Das bedeutet, daß man die Deformation in jedem Volumenelement des Körpers als Überlagerung dreier voneinander unabhängiger Deformationen in drei zueinander orthogonalen Richtungen, den Hauptachsen des Verzerrungstensors, betrachten kann. Jede dieser Deformationen stellt eine einfache Dehnung oder Kompression in der entsprechenden Richtung dar: die Länge $\mathrm{d}x_1$ in Richtung der ersten Hauptachse geht über in die Länge $\mathrm{d}x_1' = \sqrt{(1 + 2u^{(1)})}\,\mathrm{d}x_1$. Entsprechendes gilt für die anderen beiden Hauptachsen. Die Ausdrücke $\sqrt{(1 + 2u^{(i)})} - 1$ stellen daher die relativen Längenänderungen entlang dieser Achsen dar: $(\mathrm{d}x_i' - \mathrm{d}x_i)/\mathrm{d}x_i$.

Die Deformationen des Körpers sind praktisch fast in allen Fällen klein. Das heißt, die Änderung eines beliebigen Abstandes im Körper bleibt im Vergleich zum Abstand selbst stets klein. Oder anders ausgedrückt: Die relativen Längenänderungen sind, verglichen mit Eins, klein. Im folgenden werden wir alle Deformationen als klein betrachten.

Wenn ein fester Körper einer kleinen Deformation unterzogen wird, sind sämtliche Komponenten des Verzerrungstensors, der ja die relativen Längenänderungen im Körper charakterisiert, kleine Größen. Dagegen kann der Verschiebungsvektor u_i in einigen Fällen trotz kleiner Deformationen große Werte annehmen. Als Beispiel betrachten wir einen langen, dünnen Stab. Sogar bei einer starken Biegung, wenn die Stabenden eine wesentliche räumliche Verschiebung erfahren, bleiben die Dehnungen und Kompressionen im Innern des Stabes klein.

Wenn man von solchen Spezialfällen[1]) absieht, bleibt der Verschiebungsvektor bei kleinen Deformationen ebenfalls klein. Denn offensichtlich kann ein „dreidimensionaler" Körper (d. h. ein solcher Körper, dessen Maße in keiner Richtung besonders klein sind) im allgemeinen nicht so deformiert werden, daß Teile von ihm starke räumliche Verschiebungen erfahren, ohne daß im Körper starke Dehnungen und Kompressionen auftreten.

Dünne Stäbe werden wir gesondert in Kapitel II betrachten. In allen übrigen Fällen sind bei kleinen Deformationen die Verschiebungen u_i und deren Ableitungen nach den Koordinaten klein, und wir können das letzte Glied im allgemeinen Ausdruck (1,3) als kleine Größe zweiter Ordnung vernachlässigen. Somit ist der Verzerrungstensor bei kleinen Deformationen durch den Ausdruck

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{1,5}$$

gegeben. Die relativen Änderungen der Längenelemente in Richtung der Hauptachsen des Verzerrungstensors (im gegebenen Punkt) sind jetzt, bis auf Glieder höherer Ordnung,

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)},$$

d. h., sie sind gleich den Eigenwerten des Tensors u_{ik}.

Wir betrachten jetzt ein unendlich kleines Volumenelement $\mathrm{d}V$ und bestimmen seine Größe $\mathrm{d}V'$ nach der Deformation des Körpers. Dazu wählen wir als Koordinatensystem die Hauptachsen des Verzerrungstensors im betrachteten Punkt. Die Längenelemente $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$ entlang dieser Achsen gehen nach der Deformation in $\mathrm{d}x_1' = (1 + u^{(1)})\,\mathrm{d}x_1$ usw. über. Das Volumenelement $\mathrm{d}V$ ist durch das Produkt $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ und $\mathrm{d}V'$ durch $\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_2'\,\mathrm{d}x_3'$ gegeben. Somit erhalten wir für $\mathrm{d}V'$

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1 + u^{(1)})\,(1 + u^{(2)})\,(1 + u^{(3)})\,.$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung folgt hieraus

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)})\,.$$

---

[1]) Neben den Deformationen dünner Stäbe gehören hierzu die Biegungen dünner Platten in zylindrischen Flächen. Man muß außerdem den Fall ausschließen, daß ein „dreidimensionaler" Körper außer der Deformation als Ganzes eine Drehung um einen beliebigen Winkel erfährt.

Die Summe $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ der Eigenwerte des Tensors ist aber seine erste Invariante und ist gleich der Summe der Diagonalelemente $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$, unabhängig vom Koordinatensystem. Wir haben daher

$$dV' = dV(1 + u_{ii}) . \tag{1,6}$$

Man sieht, die Summe der Diagonalelemente des Verzerrungstensors stellt die relative Volumenänderung $(dV' - dV)/dV$ dar. Es ist oft zweckmäßig, die Komponenten des Deformationstensors in Kugel- oder Zylinderkoordinaten zu benutzen. Zur Information geben wir Beziehungen zwischen diesen Komponenten und den Ableitungen der Komponenten des Verschiebungsvektors im gleichen Koordinatensystem an. In Kugelkoordinaten r, θ, φ haben wir

$$\left.\begin{aligned}
&u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r},\\
&2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},\\
&2u_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{1,7}$$

In Zylinderkoordinaten r, φ, z gilt

$$\left.\begin{aligned}
&u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&2u_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},\\
&2u_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{1,8}$$

§ 2. Der Spannungstensor

Ist der Körper nicht deformiert, so entspricht die Anordnung der Moleküle seinem thermodynamischen Gleichgewichtszustand. Dabei befinden sich alle Teile untereinander auch im mechanischen Gleichgewicht. Daher haben die auf irgendein herausgegriffenes Teilvolumen im Innern des Körpers von den übrigen Teilen wirkenden Kräfte eine verschwindende Resultierende.

Während der Deformation ändert sich jedoch die Anordnung der Moleküle, und der Körper wird aus seinem ursprünglichen Gleichgewichtszustand gebracht. Im Ergebnis entstehen im Körper Kräfte, die ihn in den Gleichgewichtszustand zurückzuversetzen suchen. Diese bei der Deformation auftretenden inneren Kräfte nennt man *innere Spannungen*. Ein nicht deformierter Körper besitzt keine inneren Spannungen.

Die inneren Spannungen werden durch Molekularkräfte hervorgerufen, d. h. durch die Wechselwirkung der Moleküle des Körpers untereinander. Es ist für die Elastizitätstheorie von großer Bedeutung, daß die Molekularkräfte einen kleinen „Wirkungsradius" besitzen. Ihr Einfluß macht sich lediglich in Abständen zwischenmolekularer Größenordnung von den sie erzeugenden Teilchen bemerkbar. In der Elastizitätstheorie als einer makroskopischen Theorie betrachtet man jedoch nur solche Abstände, die im Vergleich zu zwischenmolekularen Abständen groß sind. Daher wird in der Elastizitätstheorie ein verschwindender Wirkungsradius der Molekularkräfte angenommen. Man kann sagen, daß die Kräfte, die die inneren Spannungen bewirken, in der Elastizitätstheorie „Nahwirkungskräfte" sind, d. h. Kräfte, die sich von einem bestimmten Punkt aus nur auf die nächstbenachbarten übertragen. Hieraus folgt, daß die auf einen Teil des Körpers von den benachbarten Teilen gerichteten Kräfte nur mittelbar über die Oberfläche dieses Teils wirken können.

Es ist hierbei notwendig, eine Einschränkung zu machen: Diese Bemerkung gilt nicht, wenn die Deformation des Körpers in Anwesenheit von makroskopischen elektrischen Feldern vonstatten geht. Derartige pyro- und piezoelektrische Körper werden in Band VII untersucht.

Wir betrachten jetzt die auf einen bestimmten Teil des Körpers wirkende resultierende Kraft. Einerseits ist diese Resultierende gleich der Summe aller Kräfte, die auf jedes Element des betrachteten Teilvolumens wirken, d. h., sie kann durch ein Raumintegral

$$\int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$$

dargestellt werden, wo $\boldsymbol{F}$ die auf eine Volumeneinheit wirkende Kraft ist, so daß auf das Volumenelement $\mathrm{d}V$ die Kraft $\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$ einwirkt. Andererseits können die Kräfte, mit denen die verschiedenen Teile innerhalb des Teilvolumens aufeinander wirken, keine von Null verschiedene Resultierende bilden, da sie infolge der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung sich gegenseitig kompensieren. Man kann daher die gesuchte Gesamtresultierende als Summe nur der Kräfte betrachten, die auf das gegebene Teilvolumen von seiner Umgebung aus einwirken. Wie wir aber gezeigt haben, wirken diese Kräfte auf das betrachtete Teilvolumen über seine Oberfläche; die resultierende Kraft kann daher als die Summe der auf jedes Oberflächenelement wirkenden Kräfte, d. h. als ein Integral über diese Oberfläche, dargestellt werden.

Damit kann jede der drei Komponenten $\int F_i\,\mathrm{d}V$ der Resultierenden aller inneren Kräfte eines beliebigen Volumens in ein Integral über die Oberfläche dieses Volumens umgewandelt werden. Wie aus der Vektoranalysis bekannt ist, kann ein Volumenintegral einer skalaren Funktion dann in ein Oberflächenintegral umgeformt werden, wenn die skalare Funktion sich als Divergenz eines Vektors darstellen läßt. Im vorliegenden Falle haben wir ein Integral einer Vektorfunktion umzuformen. Der Vektor F_i muß daher als Divergenz eines Tensors zweiter Stufe darstellbar sein:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2,1}$$

Dann kann die auf ein Volumen wirkende Kraft durch ein Integral über eine das Volumen umspannende geschlossene Fläche beschrieben werden[1]):

[1]) Der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ des Flächenelementes hat die Richtung der äußeren Normalen der das Volumen umhüllenden Fläche. Nach dem GAUSSschen Satz wird ein Integral über eine geschlossene Fläche in das entsprechende Volumenintegral überführt, indem man das Flächenelement $\mathrm{d}f_i$ durch den Operator $\mathrm{d}V\,\partial/\partial x_i$ ersetzt.

$$\int F_i \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} \, df_k , \tag{2,2}$$

wobei df_i die Komponenten des Flächenelements sind.[1])

Der Tensor σ_{ik} heißt Spannungstensor. Wie man aus (2,2) ersieht, ist $\sigma_{ik}\, df_k$ die i-Komponente der auf das Flächenelement df wirkenden Kraft. Wenn man die Flächenelemente in die Ebenen xy, yz, xz hineinlegt, wird die Komponente σ_{ik} des Spannungstensors zur i-Komponente derjenigen Kraft pro Flächeneinheit, die zur x_k-Achse orthogonal ist. So wirken pro Einheit der zur x-Achse orthogonalen Fläche die normal gerichtete Kraft σ_{xx} und die Tangentialkräfte (in Richtung der Achsen y und z) σ_{yx} und σ_{zx}.

Bezüglich des Vorzeichens der Kraft $\sigma_{ik}\, df_k$ ist es notwendig, folgendes zu bemerken: Das Oberflächenintegral in (2,2) stellt die Kraft dar, die auf das von dieser Oberfläche umschlossene Volumen von seiner Umgebung aus wirkt. Die Kraft, mit welcher dieses Volumen seinerseits auf seine Umgebung einwirkt, hat das umgekehrte Vorzeichen. Deshalb ist z. B. die von seiten der inneren Spannungen auf die Gesamtoberfläche des Körpers wirkende Kraft

$$-\oint \sigma_{ik}\, df_k ,$$

wo über die Körperoberfläche integriert wird und df die Richtung der äußeren Normalen besitzt.

Wir bestimmen jetzt das auf ein bestimmtes Volumen des Körpers wirkende Drehmoment. Das Drehmoment der Kraft $\boldsymbol{F}$ kann bekanntlich in Form eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe mit den Komponenten $F_i x_k - F_k x_i$ geschrieben werden, wobei x_i die Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft sind.[2]) Das Drehmoment der auf das Volumenelement dV wirkenden Kräfte ist daher $(F_i x_k - F_k x_i)\, dV$, und auf das Gesamtvolumen wirkt das Drehmoment

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV .$$

Wie die auf ein beliebiges Volumen wirkende Gesamtkraft muß sich das Drehmoment dieser Kräfte als Integral über die Volumenoberfläche darstellen lassen. Mit F_i in (2,1) haben wir

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV$$
$$= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV .$$

Wir bemerken, daß im zweiten Glied die Ableitungen $\partial x_k / \partial x_l$ mit dem Einheitstensor δ_{kl} identisch sind. Im ersten Glied steht die Divergenz eines Tensors; nach dem Gaussschen

---

[1]) Bei der Bestimmung der Gesamtkraft, welche auf das deformierte Körpervolumen wirkt, muß strenggenommen über die Koordinaten x_i' der Punkte des deformierten Körpers integriert werden. Dementsprechend müßten auch die Ableitungen (2,1) nach x_i' genommen werden. Da aber die Deformation klein ist, unterscheiden sich die Ableitungen nach x_i und die nach x_i' durch Größen höherer Ordnung, und man kann überall nach x_i differenzieren.

[2]) Das Drehmoment der Kraft $\boldsymbol{F}$ wird als Vektorprodukt $[\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}]$ definiert; die Komponenten eines Vektorprodukts zweier Vektoren stellen bekanntlich einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe dar, wie er im Text hingeschrieben wurde.

Satz kann dieses Integral in ein Oberflächenintegral überführt werden. Wir haben dann

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, \mathrm{d}f_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\, \mathrm{d}V\,. \tag{2,3}$$

Falls der Spannungstensor symmetrisch ist,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}\,, \tag{2,4}$$

entfällt das Volumenintegral, und der Tensor M_{ik} wird nur durch ein Oberflächenintegral dargestellt. Die Begründung der wichtigen Beziehung (2,4) geben wir am Ende dieses Paragraphen. Das Drehmoment der auf ein Volumen wirkenden Kräfte hat jetzt eine einfache Form:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, \mathrm{d}V = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, \mathrm{d}f_l\,. \tag{2,5}$$

Im Falle einer allseitig gleichmäßigen Kompression des Körpers (hydrostatische Kompression) kann der Ausdruck für den Spannungstensor leicht hingeschrieben werden. Bei einer solchen Kompression wirkt auf jede Oberflächeneinheit des Festkörpers dem Betrage nach der gleiche Druck, der entlang der Normalen zur Oberfläche in das Innere des Körpervolumens gerichtet ist. Wenn man diesen Druck mit p bezeichnet, wirkt auf das Oberflächenelement $\mathrm{d}f_i$ die Kraft $-p\, \mathrm{d}f_i$. Andererseits muß diese Kraft, durch den Spannungstensor ausgedrückt, die Form $\sigma_{ik}\, \mathrm{d}f_k$ aufweisen. Wenn wir jetzt $-p\, \mathrm{d}f_i$ in der Form $-p\, \delta_{ik}\, \mathrm{d}f_k$ schreiben, hat der Spannungstensor bei einer hydrostatischen Kompression folgendes Aussehen:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}\,. \tag{2,6}$$

Alle seine von Null verschiedenen Komponenten sind einfach dem Druck gleich.

Im allgemeinen Falle beliebiger Deformation sind auch die nichtdiagonalen Komponenten des Spannungstensors von Null verschieden. Das bedeutet, daß auf jedes Oberflächenelement im Innern des Körpers neben der Normalkraft noch Tangentialkräfte wirken, die parallele Oberflächenelemente relativ zueinander zu verschieben suchen.

Im Gleichgewichtszustand müssen sich die Kräfte der inneren Spannungen in jedem Volumenelement des Körpers kompensieren, d. h., es muß gelten $F_i = 0$. Die Gleichung für den Gleichgewichtszustand eines deformierten Körpers lautet somit

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0\,. \tag{2,7}$$

Wenn sich der Körper im Schwerefeld befindet, muß die Summe aus den Kräften der inneren Spannungen und der Schwerkraft $\boldsymbol{F} + \varrho \boldsymbol{g}$, bezogen auf die Volumeneinheit, verschwinden; ϱ ist die Dichte[1]) und $\boldsymbol{g}$ der senkrecht nach unten gerichtete Beschleunigungsvektor der Schwerkraft. Die Gleichgewichtsbedingungen haben in diesem Falle die Form

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \varrho g_i = 0\,. \tag{2,8}$$

---

[1]) Strenggenommen ändert sich die Dichte des Körpers während der Deformation. Die Berücksichtigung dieser Änderung führt jedoch auf Glieder höherer Ordnung und ist daher unwesentlich.

Was die unmittelbar an der Oberfläche angreifenden äußeren Kräfte anbetrifft (sie sind gewöhnlich die Ursache der Deformation), so gehen sie in die Randbedingungen der Gleichgewichtsbedingungen ein. Es sei $\boldsymbol{P}$ die auf die Oberflächeneinheit des Körpers wirkende äußere Kraft, so daß auf das Oberflächenelement $\mathrm{d}f$ die Kraft $\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}f$ wirkt. Im Gleichgewicht muß diese durch die Kraft $-\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k$, welche auf das gleiche Oberflächenelement infolge der inneren Spannungen wirkt, kompensiert werden. Es muß daher gelten

$$P_i\,\mathrm{d}f - \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k = 0\,.$$

Hieraus folgt, wenn man für $\mathrm{d}f_k$ den Ausdruck $\mathrm{d}f_k = n_k\,\mathrm{d}f$ einsetzt ($\boldsymbol{n}$ ist der Einheitsvektor der äußeren Normalen zur Oberfläche),

$$\sigma_{ik}n_k = P_i\,. \tag{2,9}$$

Das aber ist die Bedingung, die auf der gesamten Oberfläche des Körpers im Gleichgewichtszustand erfüllt sein muß.

Wir leiten hier noch einen Ausdruck für den Mittelwert des Spannungstensors im deformierten Körper ab. Dazu multiplizieren wir die Gleichung (2,7) mit x_k und integrieren sie über das gesamte Körpervolumen:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k\,\mathrm{d}V = \int \frac{\partial(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}\,\mathrm{d}V - \int \sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\,\mathrm{d}V = 0\,.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite wird in ein Oberflächenintegral überführt; im zweiten Integral berücksichtigen wir $\partial x_k/\partial x_l = \delta_{kl}$. Das Ergebnis ist

$$\oint \sigma_{il}x_k\,\mathrm{d}f_l - \int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V = 0\,.$$

In das erste Integral setzen wir (2,9) ein und erhalten

$$\oint P_i x_k\,\mathrm{d}f = \int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V = V\bar{\sigma}_{ik}\,,$$

wobei V das Volumen des Körpers und $\bar{\sigma}_{ik}$ der über das Gesamtvolumen gemittelte Spannungstensor ist. Diese Formel kann man in symmetrische Form bringen, wenn man die Gleichung $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ berücksichtigt:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V}\oint (P_i x_k + P_k x_i)\,\mathrm{d}f\,. \tag{2,10}$$

Somit kann der Mittelwert des Spannungstensors unmittelbar aus den auf den Körper wirkenden äußeren Kräften bestimmt werden, ohne daß die Grundgleichungen des Gleichgewichts vorher gelöst werden müssen.

Wir geben nun eine genauere Begründung der Symmetrie des Spannungstensors. Die Bedingung, daß der Tensor M_{ik} als Oberflächenintegral dargestellt werden kann, wird nicht nur dann erfüllt, wenn der antisymmetrische Teil des Tensors σ_{ik} verschwindet, sondern auch wenn dieser als vollständige Divergenz darstellbar ist, d. h., wenn

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 2\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{ikl}\,, \qquad \varphi_{ikl} = -\varphi_{kil} \tag{2,11}$$

gilt. Dabei ist φ_{ikl} ein beliebiger im ersten Indexpaar antisymmetrischer Tensor. Im gegebenen Fall muß dieser durch die Ableitungen $\partial u_i/\partial x_k$ ausgedrückt werden, weshalb im Spannungstensor Glieder mit höheren Ableitungen des Verschiebungsvektors auftreten. Im

Rahmen der in diesem Buch betrachteten Elastizitätstheorie kleiner Deformationen können solche Glieder als klein angesehen und vernachlässigt werden.

Es ist jedoch von prinzipieller Bedeutung, daß der Spannungstensor auch ohne diese Einschränkungen in einen symmetrischen Tensor überführt werden kann.[1]) Da seine Definition durch (2,1) nicht eindeutig ist, sind beliebige Transformationen der Art

$$\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l} \chi_{ikl}, \qquad \chi_{ikl} = -\chi_{ilk} \tag{2,12}$$

erlaubt, wobei χ_{ikl} ein beliebiger im letzten Indexpaar antisymmetrischer Tensor ist. Offensichtlich sind die Ableitungen $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ und $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$, welche die Kraft $\boldsymbol{F}$ definieren, identisch. Wenn der antisymmetrische Teil des Tensors σ_{ik} die Form (2,11) hat, so kann ein nichtsymmetrischer Tensor durch eine Transformation dieser Art in einen symmetrischen überführt werden. Der symmetrische Tensor hat die Form

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk} + \varphi_{kli}). \tag{2,13}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Differenz $\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik}$ die Gestalt (2,12) hat, wobei

$$\chi_{ikl} = \varphi_{kli} + \varphi_{ilk} - \varphi_{ikl} \tag{2,14}$$

gilt (P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Persahn, 1972).

§ 3. Thermodynamik der Deformation

Wir betrachten irgendeinen deformierten Körper und denken uns die Deformation so geändert, daß der Verschiebungsvektor u_i eine kleine Änderung δu_i erfährt. Jetzt bestimmen wir die Arbeit, die dabei von den Kräften der inneren Spannungen geleistet wird. Nach Multiplikation der Kraft $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ mit δu_i und Integration über das Gesamtvolumen des Körpers erhalten wir

$$\int \delta R \, \mathrm{d}V = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i \, \mathrm{d}V.$$

Mit δR wird die Arbeit der inneren Spannungen pro Volumeneinheit bezeichnet. Nach einer partiellen Integration erhalten wir unter Benutzung des Gaussschen Satzes

$$\int \delta R \, \mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik} \delta u_i \, \mathrm{d}f_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \mathrm{d}V.$$

Nunmehr betrachten wir einen unendlich ausgedehnten Körper, der im Unendlichen nicht deformiert ist. Dann kann die Integrationsfläche im ersten Integral ins Unendliche ausgedehnt werden; auf der Fläche ist dann $\sigma_{ik} = 0$, und das Integral verschwindet. Unter Benut-

[1]) In Übereinstimmung mit den allgemeinen Aussagen der mikroskopischen Theorie — s. II, § 32.

zung der Symmetrie des Tensors σ_{ik} kann das zweite Integral in folgende Form gebracht werden:

$$\int \delta R \, dV = -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV = -\int \sigma_{ik} \delta u_{ik} \, dV .$$

Wir haben dann

$$\delta R = -\sigma_{ik} \, \delta u_{ik} . \tag{3,1}$$

Diese Gleichung drückt die Arbeit δR durch die Änderung des Verzerrungstensors aus.

Wenn die äußeren Kräfte, welche die Deformation des Körpers verursachten, aufhören zu wirken, nimmt der Körper bei genügend kleiner Deformation seinen ursprünglichen, nichtdeformierten Zustand wieder an. In solchen Fällen spricht man von *elastischen Deformationen*. Große Deformationen verschwinden dagegen nicht vollständig, wenn die äußeren Kräfte aufhören zu wirken. Es bleibt eine gewisse *Restdeformation*, so daß der Endzustand des Körpers sich von seinem nichtdeformierten Anfangszustand unterscheidet. Solche Deformationen nennt man *plastisch* oder *unelastisch*. Im folgenden betrachten wir nur elastische Deformationen (außer im Kapitel IV).

Weiter nehmen wir an, der Deformationsprozeß verlaufe genügend langsam, so daß sich zu jedem Zeitpunkt im Körper das thermodynamische Gleichgewicht einstellt, entsprechend den äußeren Bedingungen, in denen sich der Körper zum gegebenen Zeitpunkt befindet. (Praktisch wird diese Forderung immer erfüllt.) Der Prozeß ist dann thermodynamisch umkehrbar (reversibler Prozeß).

Solche thermodynamischen Größen wie die Entropie S, die innere Energie $\mathscr{E}$ usw. wollen wir stets auf die Volumeneinheit des Körpers beziehen (und nicht auf die Masseneinheit, wie in der Hydrodynamik) und sie mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnen.

Strenggenommen muß zwischen Volumeneinheit vor und nach der Deformation unterschieden werden; diese Volumina enthalten im allgemeinen verschiedene Stoffmengen. Sämtliche thermodynamischen Größen werden im weiteren außer in Kapitel VI stets auf die Volumeneinheit des nichtdeformierten Körpers bezogen, d. h. auf die darin enthaltene Stoffmenge, welche nach der Deformation ein geringfügig verschiedenes Volumen einnehmen kann. Dementsprechend erhält man z. B. die Gesamtenergie durch Integration von $\mathscr{E}$ über das Volumen des nichtdeformierten Körpers.

Die unendlich kleine Änderung $d\mathscr{E}$ der inneren Energie ist gleich der Differenz aus der Wärmemenge, welche durch die gegebene Volumeneinheit des Körpers aufgenommen wird, und der durch die Kräfte der inneren Spannungen geleisteten Arbeit dR. Bei reversiblen Prozessen ist die Wärmemenge gleich $T\,dS$, wo T die Temperatur bezeichnet. Somit ist $d\mathscr{E} = T\,dS - dR$; mit dR aus (3,1) erhalten wir

$$d\mathscr{E} = T\,dS + \sigma_{ik} \, du_{ik} . \tag{3,2}$$

Das ist die thermodynamische Grundgleichung für deformierte Körper.

Bei hydrostatischer Kompression ist der Spannungstensor gleich $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ (2,6). In diesem Falle ist $\sigma_{ik}\,du_{ik} = -p\delta_{ik}\,du_{ik} = -p\,du_{ii}$. Nun stellt aber die Summe u_{ii} die relative Volumenänderung während der Deformation dar (siehe (1,6)). Wenn man eine Volumeneinheit betrachtet, dann ist u_{ii} einfach die Änderung dieses Volumens, und du_{ii}