L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Band II

L. D. Landau · E. M. Lifschitz
Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:
Mechanik
unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2022, 231 Seiten, 56 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5612-2

Band 2:
Klassische Feldtheorie
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2022, 496 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5562-0

Band 3:
Quantenmechanik
unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2021, 660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5636-8

Band 4:
Quantenelektrodynamik
unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2020, 628 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5632-0

Band 5:
Statistische Physik Teil 1
unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2016, 535 Seiten, 78 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5654-2

Band 6:
Hydrodynamik
korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2014, 705 Seiten, 136 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5554-5

Band 7:
Elastizitätstheorie
unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5498-2

Band 8:
Elektrodynamik der Kontinua
unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990, 2020, 565 Seiten, 65 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5500-2

Band 9:
Statistische Physik Teil 2
unveränderter Nachdruck der 4., berichtigten Auflage 1992, 2020, 404 Seiten, 18 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5656-6

Band 10:
Physikalische Kinetik
unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 1990, 2020, 480 Seiten, 35 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5624-5

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
L. D. Landau · E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der Theoretischen Physik**
ISBN 978-3-8085-5588-0

L. D. Landau • E. M. Lifschitz

Klassische Feldtheorie

Mit 25 Abbildungen

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55620

Titel der Originalausgabe:
Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу
Теория поля

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1988

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. habil. Hans-Georg Schöpf, Dresden, und Prof. Dr. habil. Paul Ziesche, Dresden, übersetzt aus dem Russischen von Georg Dautcourt.

Unveränderter Nachdruck der 12., überarbeiteten Auflage 1992, 2022
Druck 6

ISBN 978-3-8085-5562-0

Umschlaggestaltung: Medienwerkstatt Dreimaster / www.3master.de, 63546 Hammersbach
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw (Polen)

VORWORT DER HERAUSGEBER ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Im zweiten Band dieser Lehrbuchreihe wird der Begriff des physikalischen Feldes entwickelt, der zu den fundamentalen Konzeptionen der Theoretischen Physik zählt. Wie für das gesamte Werk, ist auch für diesen Band charakteristisch, wie der Bogen von der Darlegung der allgemeinen Theorie bis zur sehr gründlichen Behandlung zahlreicher wichtiger Anwendungsbeispiele gespannt wird.

Dem hohen internationalen Ansehen des Werkes Rechnung tragend, waren wir auch bei der Vorbereitung der 12. deutschen Auflage dieses Bandes auf entsprechende Sorgfalt bedacht. Dieser Auflage liegt die 7. russische Auflage von 1988 zugrunde. Bei ihrer Vorbereitung wurden wir dankenswerterweise von Herrn Dr. J. Gräfenstein unterstützt.

Dresden, November 1991 P. Ziesche, H.-G. Schöpf

AUS DEN VORWORTEN ZUR ERSTEN UND ZWEITEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Das vorliegende Buch ist der Darstellung der Theorie des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes gewidmet. Eine vollständige und logisch zusammenhängende Theorie des elektromagnetischen Feldes schließt die spezielle Relativitätstheorie ein, die daher der Darstellung zugrunde gelegt wird. Den Ausgangspunkt für die Ableitung der Grundgleichungen bilden die Variationsprinzipien, mit deren Hilfe man größte Allgemeinheit, Einheitlichkeit und vor allem Einfachheit in der Behandlung erreichen kann.

Dem allgemeinen Plan unserer Lehrbuchreihe „Theoretische Physik“ entsprechend (zu der dieses Buch gehört), gehen wir in diesem Band nicht auf die Elektrodynamik kontinuierlicher Medien ein, sondern beschränken uns auf die „mikroskopische“ Elektrodynamik, d. h. auf die Elektrodynamik des Vakuums und punktförmiger Ladungen.

Für das Lesen des Buches ist eine Kenntnis elektromagnetischer Erscheinungen nötig, wie sie etwa innerhalb einer allgemeinen Physik Vorlesung vermittelt wird. Es ist ferner eine gute Kenntnis der Vektoranalysis erforderlich. Nicht vorausgesetzt dagegen wird beim Leser eine Kenntnis der Tensoranalysis, die parallel zur Entwicklung der Theorie des Gravitationsfeldes dargestellt wird.

Moskau, Dezember 1939

Moskau, Juni 1947 L. LANDAU, E. LIFSCHITZ

VORWORT ZUR 6. RUSSISCHEN AUFLAGE

Die erste Auflage des Buches erschien vor mehr als 30 Jahren. In diesen Jahrzehnten wurde das Buch in einer Reihe von weiteren Auflagen umgearbeitet und ergänzt und hat heute seinen Umfang im Vergleich zum ursprünglichen fast verdoppelt. Niemals war es jedoch notwendig, die von LANDAU inaugurierte Methodik des Theorieaufbaus oder den von ihm angeregten Stil der Darstellung zu ändern, dessen wichtigstes Kennzeichen das Streben nach Klarheit und Einfachheit ist. Ich war nach Kräften bemüht, diesen Stil auch bei den Umarbeitungen zu wahren, die ich bereits allein durchführen mußte.

Gegenüber der letzten, 5., Auflage wurden die ersten neun Kapitel, die sich mit der Elektrodynamik beschäftigen, fast nicht verändert. Dagegen wurden die Kapitel zur Theorie des Gravitationsfeldes umgearbeitet und ergänzt. Das Material dieser Kapitel war von Auflage zu Auflage wesentlich angewachsen, so daß es schließlich notwendig wurde, eine gewisse Umverteilung und Neuanordnung vorzunehmen.

Ich möchte an dieser Stelle meine Anerkennung allen meinen Kollegen ausdrücken — es sind zu viele, als daß ich sie aufzählen könnte —, die mit ihren Bemerkungen und Ratschlägen halfen, Mängel im Buche zu beseitigen und eine Reihe von Verbesserungen einzuarbeiten. Ohne ihren Rat, ohne die Bereitschaft zur Hilfe, die sie meinen Fragen stets entgegenbrachten, wäre die Arbeit an den weiteren Auflagen dieser Lehrbuchreihe für mich schwierig gewesen.

Besonders danke ich L. P. PITAJEWSKI, mit dem ich ständig die auftretenden Fragen besprach, sowie W. A. BELINSKI für seine Hilfe beim Prüfen der Formeln und Lesen der Korrekturen.

Moskau, Dezember 1972 E. M. LIFSCHITZ

VORWORT ZUR 7. RUSSISCHEN AUFLAGE

Im Jahre 1985 hat E. M. LIFSCHITZ begonnen, die neue Auflage der „Klassischen Feldtheorie“ vorzubereiten, und die Arbeit wurde unter seiner Leitung sogar während seiner letzten Erkrankung im Krankenhaus fortgesetzt. Von ihm vorgeschlagene Änderungen wurden in der vorliegenden Auflage berücksichtigt. Unter anderem hat der Beweis des Drehimpulssatzes in der relativistischen Mechanik eine gewisse Überarbeitung erfahren; auch wurde die Symmetrie der CHRISTOFFEL-Symbole in der Gravitationstheorie ausführlicher diskutiert. In der Definition des Spannungstensors des elektromagnetischen Feldes wurde das Vorzeichen geändert. (In den vorangegangenen Auflagen war dieser Tensor anders als in den übrigen Bänden des Kurses definiert.)

Ich danke W. D. SCHAFRANOW für die Erörterung einer Reihe von Fragen, die bei der Vorbereitung dieses Bandes zum Druck entstanden.

Moskau, Juni 1987 L. P. PITAJEWSKI

INHALTSVERZEICHNIS

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Dreidimensionale Größen

Dreidimensionale Tensorindizes bezeichnen wir mit griechischen Buchstaben.

Volumen-, Oberflächen- und Längenelemente: $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$.

Impuls und Energie eines Teilchens: $\boldsymbol{p}$ und $\mathscr{E}$.

HAMILTON-Funktion: $\mathscr{H}$.

Skalar- und Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes: φ und $\boldsymbol{A}$.

Elektrische und magnetische Feldstärke: $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$.

Ladungs- und Stromdichte: ϱ und $\boldsymbol{j}$.

Elektrisches Dipolmoment: $\boldsymbol{d}$.

Magnetisches Dipolmoment: $\boldsymbol{m}$.

Vierdimensionale Größen

Für vierdimensionale Tensorindizes werden die lateinischen Buchstaben $i, k, l, \ldots$ verwendet, die die Werte 0, 1, 2, 3 durchlaufen.

Die Metrik wird mit der Signatur $(+\,-\,-\,-)$ verwendet.

Die Regel für das Herauf- und Herunterziehen von Indizes befindet sich auf S. 17.

Die Komponenten der Vierervektoren werden in der Gestalt $A^i = (A^0, \boldsymbol{A})$ geschrieben.

Der antisymmetrische Einheitstensor vierter Stufe ist e^{iklm}, wobei $e^{0123} = 1$ ist. Die Definition wird auf S. 20 angegeben.

Viererradiusvektor: $x^i = (c\,t, \boldsymbol{r})$.

Vierergeschwindigkeit: $u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$.

Viererimpuls: $p^i = (\mathscr{E}/c, \boldsymbol{p})$.

Vierervektor der Stromdichte: $j^i = (c\,\varrho, \varrho\,\boldsymbol{v})$.

Viererpotential des elektromagnetischen Feldes: $A^i = (\varphi, \boldsymbol{A})$.

Vierertensor des elektromagnetischen Feldes:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

(die Beziehungen zwischen den F_{ik} und den Komponenten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ sind aus S. 71 ersichtlich).

Energie-Impuls-Vierertensor: T^{ik} (die Tensorkomponenten werden auf S. 93 definiert).

Verweise des Typs I § 18 beziehen sich auf Band I „Mechanik".

I DAS RELATIVITÄTSPRINZIP

§ 1. Die Geschwindigkeit der Wirkungsausbreitung

Um die in der Natur ablaufenden Prozesse beschreiben zu können, ist ein sogenanntes Bezugssystem notwendig. Unter einem Bezugssystem versteht man ein Koordinatensystem zur Bestimmung der räumlichen Lage der Teilchen zusammen mit einer Anzahl mit dem System verbundenen Uhren, die zur Zeitmessung dienen.

Es gibt Bezugssysteme, in denen ein sich frei bewegender Körper, d. h. ein solcher, der keinen äußeren Kräften unterliegt, konstante Geschwindigkeit besitzt. Sie heißen *Inertialsysteme*. Wenn zwei Bezugssysteme, von denen eines ein Inertialsystem ist, sich relativ zueinander mit geradlinig-gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, so ist offensichtlich auch das andere ein Inertialsystem (jede freie Bewegung wird auch in diesem System geradlinig und gleichförmig). Es gibt also beliebig viele Inertialsysteme, die sich alle relativ zueinander geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

Die Erfahrung zeigt, daß ein sogenanntes *Relativitätsprinzip* gültig ist. Nach diesem Prinzip gelten die Naturgesetze in jedem Inertialsystem in der gleichen Form. Anders formuliert lautet es: Die Gleichungen, durch die die Naturgesetze ausgedrückt werden, sind invariant gegenüber einer Transformation der Koordinaten und der Zeit von einem Inertialsystem in ein anderes. Das bedeutet, daß sich die Gestalt dieser Gleichungen nicht ändert, wenn wir sie durch Koordinaten und Zeit in einem anderen Inertialsystem ausdrücken.

Die Wechselwirkung materieller Teilchen wird in der gewöhnlichen Mechanik durch die potentielle Energie der Wechselwirkung beschrieben, die eine Funktion der Teilchenkoordinaten ist. Man sieht, daß diese Methode der Wechselwirkungsbeschreibung die Voraussetzung einer augenblicklichen Ausbreitung der Wirkung enthält: Die auf jedes Teilchen von den anderen ausgeübten Kräfte hängen nur von der Lage der Teilchen zum gegebenen Zeitpunkt ab. Eine Änderung der Lage irgendeines Teilchens wirkt im gleichen Augenblick auf die anderen Teilchen.

Es gibt jedoch, wie Versuche zeigen, in der Natur keine augenblicklichen (Fern-)Wirkungen. Daher ist auch eine Mechanik, die auf der sofortigen Ausbreitung der Wirkung beruht, unexakt. Tatsächlich zeigt sich der Einfluß der Veränderung eines Körpers auf einen mit ihm in Wechselwirkung stehenden anderen erst nach Ablauf einer gewissen Zeitspanne. Erst nach diesem Zeitintervall können im zweiten Körper die durch die Veränderung des ersten Körpers bedingten Prozesse vor sich gehen. Dividieren wir die Entfernung der

Körper durch dieses Zeitintervall, so ergibt sich die „Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung“. Streng genommen hätten wir eine solche Geschwindigkeit die Maximalgeschwindigkeit der Wirkungsausbreitung zu nennen. Sie bestimmt das Zeitintervall, nach dessen Ablauf die im ersten Körper erfolgte Veränderung auf den zweiten Körper zu wirken beginnt. Dies schließt offensichtlich die Möglichkeit aus, daß sich irgendwelche Körper in der Natur mit noch größeren Geschwindigkeiten bewegen: Gäbe es nämlich eine solche Bewegung, so wäre eine Wirkungsübertragung mit einer Geschwindigkeit möglich, die größer als die Maximalgeschwindigkeit der Wirkungsausbreitung ist.

Die vom einen zum anderen Teilchen sich ausbreitende Wirkung betrachtet man oft als „Signal“, das vom ersten Teilchen ausgeht und dem zweiten über die Veränderung des ersten „Kunde“ gibt. In diesem Sinne bezeichnet man die Wirkungsgeschwindigkeit auch als Signalgeschwindigkeit.

Aus dem Relativitätsprinzip folgt insbesondere, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung in jedem Inertialsystem dieselbe ist. Sie stellt daher eine universelle Konstante dar.

Wie im weiteren gezeigt wird, ist diese konstante Geschwindigkeit nichts anderes als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum. Wir werden sie daher Lichtgeschwindigkeit nennen. Sie wird gewöhnlich mit dem Buchstaben c bezeichnet. Ihr Zahlenwert ist nach den letzten Messungen $c = 2{,}99792 \cdot 10^{10}$ cm/s.

Durch die Größe dieses Wertes wird die Tatsache erklärt, daß man in der Praxis in der Mehrzahl aller Fälle mit der klassischen Mechanik auskommt. Die Geschwindigkeiten, mit denen wir es gewöhnlich zu tun haben, sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so klein, daß die Annahme einer unendlichen Lichtgeschwindigkeit die Genauigkeit der Ergebnisse praktisch nicht beeinflußt.

Das Relativitätsprinzip zusammen mit dem Prinzip einer endlichen Wirkungsgeschwindigkeit wird EINSTEIN*sches Relativitätsprinzip* genannt (es wurde von EINSTEIN 1905 formuliert), im Unterschied zum GALILEIschen Relativitätsprinzip, das auf der Annahme einer augenblicklichen Ausbreitung der Wirkung beruht.

Die auf dem EINSTEINschen Relativitätsprinzip (das wir kurz Relativitätsprinzip nennen werden) basierende Mechanik heißt *relativistische Mechanik.* In dem Grenzfall, in dem die Geschwindigkeiten der bewegten Körper klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, kann der Einfluß der endlichen Wirkungsgeschwindigkeit auf die Bewegung vernachlässigt werden. Dann geht die relativistische Mechanik in die gewöhnliche Mechanik über, die die Annahme einer sofortigen Wirkungsausbreitung enthält. Diese gewöhnliche Mechanik wird auch als NEWTONsche oder klassische Mechanik bezeichnet. Der Grenzübergang von der relativistischen zur klassischen Mechanik erfolgt formal dadurch, daß wir in den Formeln der ersteren $c \to \infty$ gehen lassen.

Schon in der klassischen Mechanik ist der Raum in dem Sinne „relativ“, daß die räumlichen Beziehungen zwischen zwei Ereignissen davon abhängen, in welchem Bezugssystem sie beschrieben werden. Die Aussage, daß zwei nicht gleichzeitige Ereignisse im gleichen Raumpunkt oder allgemeiner in einer bestimmten Entfernung voneinander stattfinden, hat nur dann einen Sinn, wenn man das Bezugssystem angibt, auf das sich die Aussage bezieht.

Hingegen ist die Zeit in der klassischen Mechanik eine absolute Größe: Ihre Eigenschaften hängen nicht vom Bezugssystem ab, sie ist für alle Systeme „dieselbe". Das bedeutet, daß zwei für irgendeinen Beobachter gleichzeitige Erscheinungen auch für alle anderen Beobachter gleichzeitig sind. Allgemein ist das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen für alle Bezugssysteme dasselbe.

Man überzeugt sich jedoch leicht davon, daß der Begriff der absoluten Zeit in völligem Widerspruch zum Einsteinschen Relativitätsprinzip steht. Dazu genügt es schon, sich an das in der klassischen Mechanik geltende allgemein bekannte Additionsgesetz der Geschwindigkeiten zu erinnern, nach dem die Geschwindigkeit einer zusammengesetzten Bewegung gleich der (vektoriellen) Summe der Einzelgeschwindigkeiten ist. Als universelles Gesetz müßte es auch für Wirkungsausbreitung gelten. Daraus würde aber folgen, daß die Wirkungsgeschwindigkeit für verschiedene Inertialsysteme verschieden wäre, und dies widerspricht dem Relativitätsprinzip. Das Relativitätsprinzip wird in dieser Beziehung vom Experiment durchaus bestätigt. Durch zuerst von Michelson (1881) ausgeführte Messungen wurde festgestellt, daß die Lichtgeschwindigkeit von der Ausbreitungsrichtung des Lichtes völlig unabhängig ist; nach der klassischen Mechanik dagegen sollte sie in Richtung der Erdbewegung kleiner sein als in der entgegengesetzten Richtung.

Das Relativitätsprinzip führt also zu dem Ergebnis, daß die Zeit nicht als absolut anzusehen ist. Sie läuft in verschiedenen Bezugssystemen verschieden schnell ab. Eine Aussage, daß zwischen zwei Ereignissen ein bestimmtes Zeitintervall liegt, hat also nur dann einen Sinn, wenn auch gleichzeitig das Bezugssystem angegeben wird, auf das sich die Aussage bezieht. Sind z. B. in einem Bezugssystem zwei Ereignisse gleichzeitig, so werden sie es in einem anderen nicht mehr sein.

Zur Erläuterung ist das folgende einfache Beispiel nützlich. Wir betrachten zwei Inertialsysteme K und K' mit den entsprechenden Koordinatenachsen xyz und $x'y'z'$. Das System K' bewege sich relativ zu K nach rechts längs der Achsen x und x' (Abb. 1).

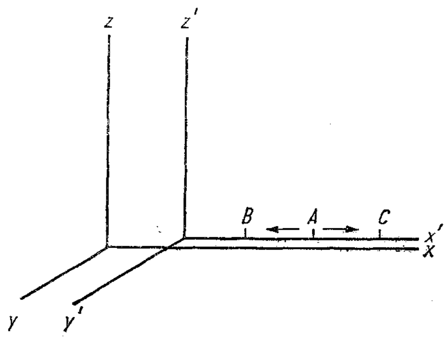

Abb. 1

Von irgendeinem Punkt A auf der x'-Achse werden Signale in zwei entgegengesetzte Richtungen ausgesandt. Da, wie in jedem Inertialsystem, die Signalgeschwindigkeit im System K' (in beiden Richtungen) gleich c ist, so werden, gemessen im System K', die von A aus in gleicher Entfernung befindlichen Punkte B und C von den Signalen in gleicher Zeit erreicht. Man sieht jedoch leicht, daß diese beiden Ereignisse der Ankunft des Signales in B bzw. C für einen Beobachter im System K keineswegs gleichzeitig sind. Da nämlich die Signalgeschwindigkeit bezüglich K nach dem Relativitätsprinzip ebenfalls gleich c ist und sich der Punkt B (relativ zum System K) dem Signal entgegen, der Punkt C sich dagegen von dem nach ihm abgesandten Signal fortbewegt, muß im Koordinatensystem K der Punkt B früher als C von einem Signal erreicht werden.

Das EINSTEINsche Relativitätsprinzip modifiziert so in tiefgehender und fundamentaler Weise die grundlegenden physikalischen Begriffe. Die Vorstellung über Raum und Zeit, die wir aus der alltäglichen Erfahrung gewinnen, gilt nur näherungsweise. Dies hängt damit zusammen, daß die im alltäglichen Leben auftretenden Geschwindigkeiten äußerst klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind.

§ 2. Der Abstand

Im folgenden werden wir häufig den Begriff eines *Ereignisses* verwenden. Ein Ereignis ist gekennzeichnet durch den Ort, an dem es stattfindet, und durch den Zeitpunkt, zu dem es geschieht. Ein Ereignis, das ein Materieteilchen betrifft, ist also durch die drei Teilchenkoordinaten und einen bestimmten Zeitpunkt charakterisiert.

Oft ist es bequem und anschaulich, einen fiktiven vierdimensionalen Raum einzuführen, dessen Achsen die drei Raumkoordinaten und die Zeit bilden. In diesem Raum sind die Ereignisse Punkte, *Weltpunkte* genannt. Jedem Teilchen entspricht in diesem Raum eine bestimmte Linie (*Weltlinie*). Die Punkte dieser Linien definieren die Teilchenkoordinaten zu jedem Zeitpunkt. Man überlegt sich leicht, daß ein sich gleichförmig und geradlinig bewegender Massenpunkt eine Gerade als Weltlinie besitzt.

Wir formulieren nun das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mathematisch. Dazu betrachten wir zwei Bezugssysteme K und K', die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Koordinatenachsen wählen wir so, daß x mit x' zusammenfällt und y, z zu y', z' parallel sind. Die Zeiten in K und K' bezeichnen wir mit t und t'.

Es werde nun ein erstes Ereignis betrachtet, das darin bestehe, daß vom Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 im System K zum Zeitpunkt t_1 (wieder im System K) ein Signal mit Lichtgeschwindigkeit ausgesandt wird. Wir wollen die Ausbreitung dieses Signals im System K verfolgen. Ein zweites Ereignis bestehe darin, daß das Signal zur Zeit t_2 zum Punkt x_2, y_2, z_2 gelangt. Da sich das Signal mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, hat es die Entfernung $c\,(t_2 - t_1)$ zurückgelegt. Andererseits ist diese Entfernung gleich $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$. Zwischen den Koordinaten der beiden Ereignisse im System K besteht also die Abhängigkeit

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2\,(t_2 - t_1)^2 = 0\,. \tag{2,1}$$

Die beiden eben betrachteten Ereignisse kann man auch vom System K' aus beobachten. In K' seien die Koordinaten des ersten Ereignisses x_1', y_1', z_1', t_1', die des zweiten x_2', y_2', z_2', t_2'. Da wegen der Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem diese in K und K' gleich ist, gilt analog zu (2,1)

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2 (t_2' - t_1')^2 = 0 . \qquad (2,2)$$

Allgemein definieren wir: Sind x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten von zwei beliebigen Ereignissen, so heißt die Größe

$$s_{12} = [c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \qquad (2,3)$$

Abstand zwischen diesen beiden Ereignissen.

Aus dem Prinzip der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt also: Verschwindet der Abstand zwischen zwei Ereignissen in einem Bezugssystem, so auch in allen anderen.

Sind zwei Ereignisse einander infinitesimal benachbart, so ist der Abstand $\mathrm{d}s$ zwischen ihnen

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 . \qquad (2,4)$$

Formal gesehen, gestattet die Gestalt der Ausdrücke (2,3) oder (2,4), den Abstand als die Entfernung zweier Punkte in einem fiktiven vierdimensionalen Raum aufzufassen, auf dessen Koordinatenachsen x, y, z und das Produkt $c\,t$ abgetragen werden. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zur euklidischen Geometrie: Bei der Bildung des Abstandsquadrates werden die Quadrate der Koordinatendifferenzen auf den einzelnen Achsen nicht mit einheitlichen, sondern mit verschiedenen Vorzeichen addiert.[1])

Oben wurde gezeigt: Gilt $\mathrm{d}s = 0$ in irgendeinem Inertialsystem, so verschwindet $\mathrm{d}s'$ in einem anderen System ebenfalls. Nun sind $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}s'$ infinitesimale Größen gleicher Ordnung. Aus diesen beiden Umständen folgt, daß sie beide zueinander proportional sein müssen:

$$\mathrm{d}s^2 = a\,\mathrm{d}s'^2 .$$

Hierbei kann der Koeffizient a nur vom Betrag der Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme abhängen. Eine Abhängigkeit von den Koordinaten oder der Zeit ist nicht möglich, weil dann verschiedene Raum- oder Zeitpunkte nicht mehr gleichwertig wären, was der Homogenität von Raum und Zeit widerspräche. a kann auch nicht von der Richtung der Relativgeschwindigkeit abhängen, weil dies im Widerspruch zur Isotropie des Raumes stehen würde.

Wir betrachten drei Bezugssysteme K, K_1, K_2. Es seien $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ die Geschwindigkeiten von K_1 bzw. K_2 relativ zu K. Dann muß gelten

$$\mathrm{d}s^2 = a(V_1)\,\mathrm{d}s_1^2 , \qquad \mathrm{d}s^2 = a(V_2)\,\mathrm{d}s_2^2 .$$

[1]) Die durch die quadratische Form (2,4) definierte Geometrie heißt pseudoeuklidisch im Unterschied zur gewöhnlichen, euklidischen Geometrie. Diese Geometrie wurde im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie von MINKOWSKI eingeführt.

Aus gleichem Grunde kann man schreiben

$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2\,,$$

wobei V_{12} der Betrag der Relativgeschwindigkeit von K_2 bezüglich K_1 ist. Aus dem Vergleich dieser Beziehungen finden wir, daß

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}) \tag{2,5}$$

gelten muß. V_{12} hängt nicht nur von den Beträgen der Vektoren $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ ab, sondern auch von dem Winkel zwischen ihnen. Letzterer geht indessen in den linken Teil von (2,5) nicht ein. Es ist also klar, daß diese Beziehung nur dann gelten kann, wenn die Funktion $a(V)$ gleich einer Konstanten ist, die, wie aus denselben Gleichungen folgt, gleich 1 sein muß.

Es ist somit

$$ds^2 = ds'^2\,,$$

und aus der Gleichheit infinitesimaler Abstände folgt auch die endlicher Abstände: $s = s'$.

Wir gelangen so zu einem äußerst wichtigen Ergebnis: Der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist in allen Inertialsystemen gleich, ist also eine Invariante bezüglich der Transformationen von einem Inertialsystem in ein beliebiges anderes. Diese Invarianz ist der mathematische Ausdruck für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Es seien wieder x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten zweier Ereignisse in irgendeinem Bezugssystem K. Gibt es dann ein Bezugssystem K', in dem diese beiden Ereignisse an ein und demselben Raumpunkt stattfinden?

Wir führen die Bezeichnungen

$$t_2 - t_1 = t_{12}\,, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2$$

ein. Dann ist der Abstand zwischen den beiden Ereignissen im System K

$$s_{12}^2 = c^2\, t_{12}^2 - l_{12}^2$$

und im System K'

$$s_{12}'^2 = c^2\, t_{12}'^2 - l_{12}'^2\,,$$

wobei wegen der Invarianz des Abstands

$$c^2\, t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2\, t_{12}'^2 - l_{12}'^2$$

gilt. Wir verlangen, daß im System K' beide Ereignisse an einem Punkte stattfinden, d. h., daß $l_{12}' = 0$. Dann muß

$$s_{12}^2 = c^2\, t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2\, t_{12}'^2 > 0$$

gelten.

Ein Bezugssystem mit den geforderten Eigenschaften gibt es also, wenn $s_{12}^2 > 0$ gilt, d. h. der Abstand zwischen den beiden Ereignissen reell ist. Reelle Abstände bezeichnet man als *zeitartige*. Ist daher der Abstand zwischen zwei Ereignissen zeitartig, so gibt es ein Bezugssystem, in dem die beiden Ereignisse