

Klassische Mechanik I

**Kinematik und Dynamik der Punktteilchen
Relativität**



Edition
Harri 
Deutsch 

Klassische Mechanik I

Kinematik und Dynamik der Punktteilchen

Relativität

von

Walter Greiner

9., aktualisierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55644

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

9. Auflage 2022

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5565-1

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Alle Abbildungen wurden nach Entwürfen des Autors vom Verlag erstellt.

© 2022 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09212 Limbach-Oberfrohna
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw (Polen)

Theoretische Physik

von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner

Seit vielen Jahren zählen die Bände der Reihe *Theoretische Physik* zu den weltweit geschätzten und wegweisenden Lehrbüchern, mit denen Generationen von Studierenden ihre Physikausbildung erfolgreich gestaltet haben. Damit führt Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner die Tradition der klassischen Buchreihen von Sommerfeld, von Planck und von Landau und Lifschitz fort, einen zusammenhängenden Blick auf das große Wissenschaftsfeld der Physik zu geben. Englische, französische, japanische und chinesische Ausgaben untermauern die Bedeutung des Werkes *Theoretische Physik*.

Auf über 7000 Seiten lehrt Walter Greiner, der Herausgeber und Hauptautor, Physik mit einem eigenständigen, didaktisch geschickten Konzept: Vermittlung der theoretischen Grundlagen und deren Anwendung anhand vieler ausführlicher Beispiele und Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen – insbesondere auch zu aktuellen Themen. Denn nichts ist für den Studierenden von größerer Bedeutung, als im Detail zu erleben, wie die theoretischen Konzepte und Werkzeuge auf konkrete Probleme angewandt werden, die für den arbeitenden Physiker von Interesse sind. Walter Greiner begleitet seine Ausführungen mit einer sorgfältigen Entwicklung der benötigten mathematischen Methoden. Biografische und geschichtliche Notizen schlagen die Brücke zu den Wegbereitern der modernen Physik.

So entstand ein lebendiges Konzept von integrierten Lehr- und Übungsbüchern. Pragmatisch orientiert, aber ohne Abstriche an der theoretischen Grundlegung des Stoffes, gelingt es Walter Greiner, den Lernenden einen schnellen Zugang zum theoretisch-physikalischen Denken zu ebnet und sie für die physikalische Wissenschaft zu begeistern.

Mit dem Band *Klassische Mechanik I: Kinematik und Dynamik der Punktteilchen – Relativität* (vormals *Mechanik I*) beginnt der Einstieg in die Welt der *Theoretischen Physik*.

Vorwort

Eine zeitgemäße und moderne Universitäts-Ausbildung in Physik sollte möglichst von Anfang an die Theoretische Physik als einen der Grundpfeiler dieser Wissenschaft berücksichtigen. Diese Überlegung führte dazu, dass Studierenden der Physik und Mathematik an der Goethe-Universität in Frankfurt am Main die Kurse zur Theoretischen Physik ab dem ersten Semester angeboten werden. Die vorliegende *Klassische Mechanik I* ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die sich in vielen Jahren – seit 1965 – als Teil dieses Studienprogramms bewährt haben. Sie behandeln als Einstieg in die Theoretische Physik die Newtonsche Mechanik und deren Erweiterung zur Einsteinschen Speziellen Relativitätstheorie.

Ich habe versucht, die Darstellung des Stoffes so interessant und verständlich wie möglich zu gestalten. Der Text wird daher mit vielen Beispielen und Übungen ergänzt, die bis ins Detail ausgearbeitet sind. Damit soll das Buch für interessierte Leserinnen und Leser auch zum Selbststudium geeignet sein.

Der Einstieg in die Theoretische Physik im ersten Semester bedingt, dass dabei großes Gewicht auf die Behandlung elementarer mathematischer Verfahren aus der Vektoralgebra und -analysis sowie der Theorie der linearen Differenzialgleichungen gelegt werden muss. So gesehen ist die *Klassische Mechanik I* auch ein Vorkurs zur Theoretischen Physik.

Die Newtonsche Mechanik wird ausgehend von den Newtonschen Axiomen behandelt. Fragen der Statik und Dynamik werden untersucht, und mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz eröffnet sich ein weites Feld astronomischer Phänomene, die mit den erarbeiteten Methoden behandelt werden können. So lassen sich die Bewegungen der Planeten im Sonnensystem oder von Raumsonden auf ihrem Weg durch das Sonnensystem genau berechnen. Viele ausgearbeitete Beispiele und Aufgaben behandeln diese Themen. Dabei lässt sich bereits mit recht elementaren Voraussetzungen ein Bogen zu spannenden Problemen der aktuellen Forschung schlagen, zum Beispiel zur Suche nach Planeten außerhalb unseres Sonnensystems.

Den kurzen Abriss über unser Sonnensystem, mit dem die Darstellung der Newtonschen Gravitationstheorie traditionell abgerundet wird, habe ich zu einem längeren Kapitel über die Stellung unserer Erde im Universum erweitert. Hier werden aktuelle Themen der Forschung vorgestellt, wie die Erforschung des Sonnensystems, die Suche nach extrasolaren Planeten, die Dynamik von Galaxien und das Problem der Dunklen Materie und schließlich das Urknall-Modell zur Entstehung und Entwicklung des Universums. Diese spannenden Themen sollen Neugierde wecken auf die vielen aufregenden Fragen der gegenwärtigen Forschung, zu denen

– aufbauend auf empirischem Wissen – mit den Methoden der Theoretischen Physik Antworten gefunden werden können. Die Bestimmung der Masse des im Jahr 2005 entdeckten Planeten Eris zeigt, dass hierbei auch elementare Verfahren, die in diesem Buch ausführlich behandelt werden, gewinnbringend zum Einsatz kommen.

Eine Vielzahl von Experimenten führte gegen Ende des 19. Jahrhunderts zu der verblüffenden Einsicht, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes vollkommen unabhängig davon ist, ob sich die Lichtquelle oder der Beobachter relativ zueinander bewegen. Dies ließ sich im Rahmen der Newtonschen Mechanik nicht verstehen und führte Albert Einstein zur Speziellen Relativitätstheorie, die die Newtonsche Theorie erweitert und als Spezialfall umfasst. Ausgehend von einer Diskussion des Versuchs von Michelson und Morley entwickeln wir die Spezielle Relativitätstheorie und gelangen über den Formalismus von Minkowski zur relativistischen Mechanik. Wieder runden viele Beispiele, etwa zum Aussehen schnell bewegter Körper und Anwendungen aus der Hochenergie-Physik, die Darstellung ab.

Ich hoffe, ja ich bin überzeugt, damit Interesse für die vielfältigen und teilweise neuen Aspekte zu wecken, die selbst ein so klassisches Gebiet wie die Mechanik noch immer bereit hält. Die Studierenden sollen die Theoretische Physik als eine aufregende und spannende Wissenschaft erleben, bei der noch viel zu entdecken bleibt.

Walter Greiner

Die Mitarbeiter

An den bisherigen Auflagen haben im Laufe der Jahre viele ehemalige Studierende, Doktoranden und Assistenten mitgearbeitet:

8. Auflage (2008)

Dr. Stefan Scherer

7. Auflage (2003)

Dipl.-Phys. Kristof Balasz, Dipl.-Phys. Stefan Scherer

6. Auflage (1992)

Dipl.-Phys. J. Augustin, Dipl.-Phys. Ch. Best, A. Bischoff, A. Dumitru¹⁾,
Dipl.-Phys. B. Ehrnsperger, Dipl.-Phys. O. Graf, Dipl.-Phys. K. Griepenkerl,
Dipl.-Phys. A. von Keitz, Dr. G. Peilert, Dipl.-Phys. M. Vidović

sowie

Frau A. Steidl

5. Auflage (1989)

Dipl.-Phys. Carsten Greiner²⁾, Dr. Martin Greiner³⁾, Dipl.-Phys. R. Heuer,
Dr. G. Plunien, Dr. M. Rufa

4. Auflage (1984)

Carsten Greiner²⁾, Dr. M. Seiwert

3. Auflage (1980)

Dipl.-Phys. M. Seiwert, Carsten Greiner²⁾, Martin Greiner³⁾

sowie

Frau B. Utschig

¹⁾ später Professor an der Goethe-Universität Frankfurt am Main

²⁾ später Professor an der Goethe-Universität Frankfurt am Main

³⁾ später Professor an der Aarhus University

2. Auflage (1976)

Frau R. Lasarzig, Frau B. Utschig, G. Terlecki¹⁾

1. Auflage (1974)

Dr. B. Fricke²⁾

mit

H. Betz³⁾, W. Betz, G. Binnig⁴⁾, M. Bundschuh, C. von Charzewski, J. von Czarniecki, R. Fickler, H. R. Fiedler, E. Hoffmann, L. Kohaupt⁵⁾, N. Krug, P. Kurowski, B. Moreth, R. Mörschel, B. Müller⁶⁾, J. Rafelski⁷⁾, J. Reinhardt, H. Schaller, H. J. Scheefer, M. Soffel⁸⁾, K. E. Stiebing, E. Stämmeler, H. Störmer⁹⁾, J. Wagner, R. Zimmermann

sowie

Frau M. Knolle, Frau R. Lasarzig, G. Terlecki, Frau B. Utschig

¹⁾ später Professor an der Fachhochschule Kaiserslautern

²⁾ später Professor an der Universität Kassel

³⁾ Wir gedenken besonders Frau Helga Rafelski, geborene Betz, die in Tucson/Arizon im Alter von 50 Jahren allzu früh an Leukämie verstorben ist.

⁴⁾ Gerd Binnig erhielt 1986 für die Entwicklung des Raster-Tunnel-Mikroskopes zusammen mit H. Rohrer und E. Ruska den Nobelpreis für Physik. Er ist später IBM-Fellow am IBM-Forschungslabor Rüschlikon/Schweiz und Professor an der Universität in München.

⁵⁾ später Professor an der Technischen Fachhochschule Berlin

⁶⁾ später Professor an der Duke University, Durham, North Carolina, USA, dort Dean of the Faculty

⁷⁾ später Professor an der University of Arizona, Tucson, Arizona, USA

⁸⁾ später Professor an der Technischen Universität Dresden

⁹⁾ später Professor an der Columbia University, New York, USA. Er erhielt 1998 den Nobelpreis für Physik gemeinsam mit Daniel C. Tsui für die Entdeckung des gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effekts.

Inhaltsverzeichnis

I	Vektorrechnung	1
1	Einführung und Grunddefinitionen	1
2	Das Skalarprodukt	3
3	Komponentendarstellung eines Vektors	6
4	Das Vektorprodukt (axialer Vektor)	9
5	Das Spatprodukt	20
6	Anwendung der Vektorrechnung	21
7	Differenziation und Integration von Vektoren	33
8	Das begleitende Dreibein – Frenetsche Formeln	41
9	Flächen im Raum	56
10	Koordinatensysteme	59
11	Vektorielle Differenzialoperationen	73
12	Bestimmung von Linienintegralen	98
13	Die Integralsätze von Gauß und Stokes	101
14	Berechnung von Oberflächenintegralen	113
15	Volumen-(Raum-)Integrale	117
II	Newtonsche Mechanik	121
16	Die Newtonschen Axiome	121
17	Grundbegriffe der Mechanik	126
18	Die allgemeine lineare Bewegung	145
19	Der freie Fall	148
20	Die Reibung	157
21	Der harmonische Oszillator	180
22	Mathematische Zwischenbetrachtung (Reihenentwicklung, Eulersche Formeln)	193
23	Der gedämpfte harmonische Oszillator	196
24	Das Pendel	210
25	Mathematische Vertiefung: Differenzialgleichungen	224
26	Planetenbewegungen	229
27	Spezielle Probleme in Zentralfeldern	264
28	Die Erde und unser Sonnensystem	276
III	Relativitätstheorie	345
29	Relativitätsprinzip und Michelson-Versuch	345
30	Die Lorentz-Transformation	353
31	Eigenschaften der Lorentz-Transformation	372
32	Additionstheorem der Geschwindigkeiten	399

33	Die Grundgrößen der Mechanik im Minkowski-Raum	404
34	Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie	439
	Sachwortverzeichnis	465

Aufgaben und Beispiele

A	3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	8
A	4.1	Vektorprodukt	15
A	4.2	Beweis von Determinantenregeln	15
A	4.3	Determinanten	17
B	4.1	Laplacescher Entwicklungssatz	18
A	6.1	Abstandsvektor	21
A	6.2	Projektion eines Vektors auf einen anderen	22
A	6.3	Geraden- und Ebenengleichung	22
B	6.1	Der Kosinussatz	23
B	6.2	Der Satz von Thales	23
B	6.3	Die Drehmatrix	24
A	6.4	Überlagerung von Kräften	26
B	6.4	Gleichgewichtsbedingung für einen starren Körper ohne feste Drehachse	27
A	6.5	Kraft und Drehmoment	28
A	6.6	Stabkräfte im Dreibock	30
A	6.7	Gesamtkraft und Drehmoment	31
B	7.1	Differenziation eines Vektors	33
B	7.2	Differenziation eines Produktes aus Skalar und Vektor	35
A	7.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einer Raumkurve	36
B	7.3	Kreisbewegung	36
B	7.4	Schraubenlinie	37
B	7.5	Integration eines Vektors	39
A	7.2	Integration eines Vektors	39
A	7.3	Bewegung auf einer Raumkurve	39
A	7.4	Flugzeug landet auf spezieller Raumkurve	41
A	8.1	Krümmung und Torsion	47
B	8.1	Frenetsche Formeln am Kreis	48
B	8.2	Begleitendes Dreibein und Schraubenlinie	49
B	8.3	Evolvente eines Kreises	53
A	8.2	Bogenlänge	53
B	8.4	Verallgemeinerung der Evolute	54
B	9.1	Normalenvektor einer Fläche im Raum	58
A	10.1	Zur Geschwindigkeit und Beschleunigung in Zylinderkoordinaten	69
A	10.2	Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten	71
A	10.3	Winkelgeschwindigkeit und Radialbeschleunigung	71

A 11.1	Gradient eines Skalarfeldes	80
A 11.2	Bestimmung des Skalarfeldes aus dem zugehörigen Gradientenfeld .	81
A 11.3	Divergenz eines Vektorfeldes	81
A 11.4	Rotation eines Vektorfeldes	81
A 11.5	Elektrische Feldstärke, elektrisches Potenzial	82
A 11.6	Differenzialoperationen in Kugelkoordinaten	83
A 11.7	Reziprokes Dreibein	88
A 11.8	Reziproke Koordinatensysteme	89
B 12.1	Linienintegral über ein Vektorfeld	100
A 13.1	Wegunabhängigkeit eines Linienintegrals	107
A 13.2	Bestimmung der Potenzialfunktion	109
A 13.3	Wirbelfluss eines Kraftfeldes durch eine Halbkugel	110
A 13.4	Zum konservativen Kraftfeld	112
B 14.1	Zur Berechnung eines Oberflächenintegrals	114
A 14.1	Fluss durch eine Oberfläche	115
B 15.1	Berechnung eines Volumenintegrals	118
A 15.1	Berechnung einer Gesamtkraft aus der Kraftdichte	119
A 16.1	Einfache Seilrolle	124
A 16.2	Doppelte Seilrolle	124
B 17.1	Potenzielle Energie	129
A 17.1	Impulsstoß durch zeitabhängiges Kraftfeld	131
A 17.2	Kraftstoß	132
A 17.3	Das ballistische Pendel	133
B 17.2	Kräfte bei der Bewegung auf einer Ellipse	137
A 17.4	Berechnung von Drehimpuls und Drehmoment	139
A 17.5	Nachweis, dass ein gegebenes Kraftfeld konservativ ist	140
A 17.6	Kraftfeld, Potenzial, Gesamtenergie	140
A 17.7	Impuls und Kraft am Rammpfahl	141
B 17.3	Elementare Betrachtungen über Scheinkräfte	142
A 19.1	Bewegung einer Masse im konstanten Kraftfeld	153
A 19.2	Bewegung auf einer Schraubenlinie im Schwerfeld	153
A 19.3	Raumschiff umkreist Erde	156
B 20.1	Freier Fall mit Reibung nach Stokes	158
B 20.2	Der schräge Wurf mit Reibung nach Stokes	160
A 20.1	Freier Fall mit Newtonscher Reibung	165
A 20.2	Bewegung einer Lokomotive mit Reibung	168
B 20.3	Die schiefe Ebene	169
A 20.3	Zwei Massen auf schiefen Ebenen	171
A 20.4	Eine Kette rutscht vom Tisch	172
A 20.5	Eine Scheibe auf Eis – der Reibungskoeffizient	174
A 20.6	Ein Autounfall	175
A 20.7	Ein Teilchen auf einer Kugel	176
A 20.8	Eine Leiter lehnt an einer Wand	178
A 20.9	Eine Masse rutscht unter Haft- und Gleitreibung	179

A 21.1	Amplitude, Frequenz und Periode einer harmonischen Schwingung	187
A 21.2	Masse hängt an Feder	188
A 21.3	Schwingung einer Masse an einer ausgelenkten Feder	188
A 21.4	Schwingung eines schwimmenden Zylinders	189
A 21.5	Masse hängt an zwei Federn und schwingt	189
B 21.1	Zusammengesetzte Federn	191
A 21.6	Schwingung eines drehbar gelagerten Stabes	192
A 22.1	Zur Taylorreihe	195
A 23.1	Gedämpfte Schwingung eines Teilchens	205
A 23.2	Harmonischer Oszillator wird von außen erregt	207
A 23.3	Massenpunkt in der x - y -Ebene	208
A 24.1	Die Zykloide	214
A 24.2	Das Zykloidenpendel	215
A 24.3	Eine Perle gleitet auf einer Zykloide	217
A 24.4	Das Problem der Tautochrone	218
A 24.5	Bewegung einer Peitschenschnur	221
B 26.1	Das Cavendish-Experiment	235
A 26.1	Kraftgesetz einer Kreisbahn	248
A 26.2	Kraftgesetz einer Spiralbahn	249
A 26.3	Die Lemniskatenbahn	249
A 26.4	Fluchtgeschwindigkeit auf der Erde	251
A 26.5	Das Raketenproblem	251
A 26.6	Bewegungsgleichungen einer Zweistufenrakete	254
A 26.7	Kondensation eines Wassertropfens	254
A 26.8	Bewegung eines Lastwagens mit variabler Ladung	255
B 26.2	Die reduzierte Masse	256
A 26.9	Bahn eines Kometen	258
A 26.10	Bewegung im Zentralfeld	259
A 26.11	Meerwasser als Raketenantrieb	262
B 26.3	Geschichtliche Bemerkung zur Vertiefung	262
A 27.1	Gravitationskraft eines homogenen Stabes	267
A 27.2	Gravitationskraft einer homogenen Scheibe	268
A 27.3	Gravitationspotenzial einer Hohlkugel	269
A 27.4	Tunnel durch die Erde	270
A 27.5	Stabilität einer Kreisbahn	275
A 27.6	Stabilität einer Kreisbahn	275
A 28.1	Massenakkretion der Sonne	327
B 28.1	Bewegung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld der Sonne	328
B 28.2	Ausflug zu den äußeren Planeten	331
A 28.2	Periheldrehung	341
A 30.1	Lorentz-Invarianz der Wellengleichung	365
A 30.2	Rapidity	371
B 31.1	Zerfall der Myonen	374
A 31.1	Zur Zeitdilatation	375

A 31.2	Relativität der Gleichzeitigkeit	376
A 31.3	Klassische Längenkontraktion	378
A 31.4	Zur Längenkontraktion	379
A 31.5	Lorentz-Transformation für beliebig orientierte Relativgeschwindigkeit	398
B 33.1	Konstruktion der Viererkraft durch Lorentz-Transformation	409
B 33.2	Der Einsteinsche Kasten	414
B 33.3	Zum Massenzuwachs mit der Geschwindigkeit	415
A 33.1	Relativistischer Massenzuwachs	417
A 33.2	Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfeld	419
A 33.3	Massenverlust der Sonne durch Strahlung	427
A 33.4	Geschwindigkeitsabhängigkeit der Protonenmasse	427
A 33.5	Effektivität eines funktionierenden Fusionsreaktors	428
A 33.6	Zerfall des π^+ -Mesons	429
A 33.7	Lebensdauer der K^+ -Mesonen	430
A 33.8	Zur Kernspaltung	433
A 33.9	Masse-Energie-Äquivalenz am Beispiel des π^0 -Mesons	433
A 33.10	Zur Paarvernichtung	434
A 33.11	Kinetische Energie des Photons	435
A 33.12	Das so genannte „Zwillingsparadoxon“	436
A 33.13	Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens	438
A 34.1	Die relativistische Rakete	449
A 34.2	Die Photonenrakete	451
A 34.3	Das relativistische Zentralkraftproblem	452
B 34.1	Beispiel zur Vertiefung: Gravitationslinsen	460

Historische Notizen

1	Leopold Kronecker	5
2	Pierre Frédéric Sarrus	12
3	Thales von Milet	23
4	Jean Frédéric Frenet	44
5	Jean Gaston Darboux	46
6	Gabriel Cramer	67
7	Pierre Simon Laplace	79
8	Carl Friedrich Gauß	101
9	Sir George Gabriel Stokes	106
10	August Ferdinand Möbius	116
11	Isaak Newton	122
12	Robert Hooke	148
13	Leonhard Euler	195
14	Christiaan Huygens	221
15	Johannes Kepler	229
16	Tycho Brahe	230
17	Henry Cavendish	236
18	Giovanni Domenico Cassini	250
19	Immanuel Kant	291
20	Claudius Ptolemäus	293
21	Nikolaus Kopernikus	294
22	Sir Friedrich Wilhelm Herschel	302
23	Edwin Hubble	302
24	Val Logsdon Fitch	311
25	James Watson Cronin	311
26	Andrej Sacharov	311
27	Robert Woodrow Wilson	311
28	Arno Allan Penzias	312
29	George Gamow	312
30	Robert Dicke	313
31	Philip James Edwin Peebles	313
32	Vera Cooper Rubin	317
33	Fritz Zwicky	321
34	Bohdan Paczynski	323
35	Galileo Galilei	345
36	Albert Abraham Michelson	348

37	Albert Einstein	352
38	Hendrik Antoon Lorentz	354
39	Hermann Minkowski	358
40	Anton Lampa	380
41	Robert Vivian Pound	436
42	Wolfgang Pauli	449
43	Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld	459

I Vektorrechnung

1 Einführung und Grunddefinitionen

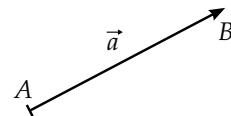
Physikalische Größen, die durch Angabe eines Zahlenwertes vollständig bestimmt sind, nennt man

Skalare (z. B. Masse, Temperatur, Energie, Wellenlänge).

Größen, zu deren vollständiger Beschreibung neben dem Zahlenwert, dem Betrag, noch die Angabe ihrer Richtung erforderlich ist, nennt man

Vektoren (z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Drehmoment).

Ein Vektor lässt sich geometrisch durch eine gerichtete Strecke darstellen, d. h. durch eine Strecke, der man eine Richtung zuordnet, sodass z. B. gilt: A sei der Anfangspunkt und B sei der Endpunkt des Vektors \vec{a} (vgl. Figur).



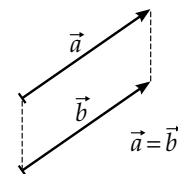
Vektor \vec{a} zeigt von A nach B .

Der *Betrag* des Vektors ist dann durch die Länge der Strecke AB gegeben. Symbolisch beschreibt man einen Vektor häufig durch einen lateinischen Buchstaben, den man zur Verdeutlichung des Vektorcharakters mit einem kleinen Pfeil versieht. Weitere mögliche Darstellungen sind die Benutzung deutscher Buchstaben oder Herausheben durch Fettdruck.

Den Betrag eines Vektors \vec{a} schreibt man als: $|\vec{a}| = a$.

Definition: Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen genau dann *gleich*, wenn

1. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$,
2. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (gleichgerichtet parallel)

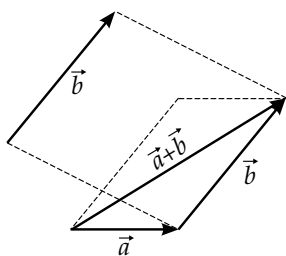
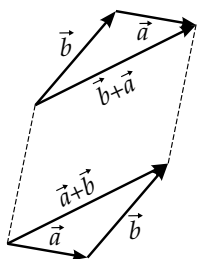


Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind gleich.

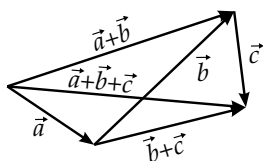
sind. Dann schreiben wir $\vec{a} = \vec{b}$.

Das heißt: Alle gleichlangen und gleichgerichteten Strecken sind gleichberechtigte Darstellungen desselben Vektors. Man sieht also bei einem Vektor von seiner speziellen Lage im Raum ab.

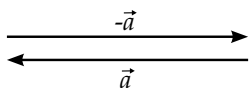
Ein zum Vektor \vec{a} *entgegengesetzt gleicher* Vektor ist $-\vec{a}$. Entgegengesetzt gleiche Vektoren sind längengleich ($|\vec{a}| = |-\vec{a}|$) und liegen auf parallelen Geraden, haben aber entgegengesetzte Richtungen; sie sind somit antiparallel ($\vec{a} \uparrow\downarrow -\vec{a}$). Ist also etwa $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, so ist $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

Addition der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Verdeutlichung der Kommutativität der Vektoraddition.



Verdeutlichung der Assoziativität der Vektoraddition.



Der Nullvektor.

Addition: Sollen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} addiert werden, so bringt man durch Parallelverschiebung den Anfangspunkt des einen Vektors mit dem Endpunkt des anderen zur Deckung. Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$, auch *Resultierende* genannt, entspricht dann der Strecke vom Anfangspunkt des ersten Vektors zum Endpunkt des zweiten. Man kann diese Summe auch als Diagonale des von \vec{a} und \vec{b} gebildeten Parallelogramms finden (vgl. Figur).

Rechenregeln: Es gelten

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

und

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{Assoziativgesetz}),$$

wie man sofort einsieht (vgl. Figuren).

Subtraktion: Die Differenz zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist definiert als:

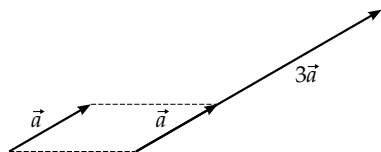
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Nullvektor: Die Vektordifferenz $\vec{a} - \vec{a}$ bezeichnet man als Nullvektor:

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \vec{a} - \vec{a} = 0.$$

Der Nullvektor hat den Betrag 0; er ist richtungslos.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: Unter dem Produkt $p\vec{a}$ eines Vektors \vec{a} mit einem Skalar p , wobei p eine reelle Zahl ist, versteht man einen Vektor, der die gleiche Richtung besitzt wie \vec{a} und dessen Betrag $|p\vec{a}| = |p| \cdot |\vec{a}|$ ist.

Die Multiplikation eines Vektors \vec{a} mit einem Skalar p (in diesem Falle ist $p = 3$).

Rechenregeln:

$$q(p\vec{a}) = p(q\vec{a}) = qp\vec{a}, \quad (\text{wobei } p \text{ und } q \text{ reell})$$

$$(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a},$$

$$p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}.$$

Diese Regeln sind sofort einzusehen und bedürfen keiner weiteren Erläuterung.