LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL I

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I
unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 449 Seiten, 190 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5574-3, Europa-Nr. 55743
Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II
unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 618 Seiten, 136 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5576-7, Europa-Nr. 55767
Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache und Kurvenintegrale. Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1
12. Aufl. 1991, 283 Seiten, 3 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5578-1, Europa-Nr. 55781
Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2
unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 599 Seiten, 85 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5580-4, Europa-Nr. 55804
Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1
unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5582-8, Europa-Nr. 55828
Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume. Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 469 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5584-2, Europa-Nr. 55842
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V
unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 545 Seiten, 3 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5586-6, Europa-Nr. 55866
Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik
ISBN 978-3-8085-5572-9, Europa-Nr. 55729

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

TEIL I

VON

W. I. SMIRNOW

16. Auflage 1990

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55743

Titel der Originalausgabe

В. И. Смирнов
Курс высшей математики
Том первый
Москва – Ленинград

Die Ausgabe in deutscher Sprache besorgten:
Klaus Krienes (Übersetzung nach der 13. Auflage)
Klaus Krienes und Helmut Pachale (Wissenschaftliche Redaktion)
Kurt Schraage (Überarbeitung der zweiten Auflage der Übersetzung)
Wilfried Thor (Überarbeitung nach der im Jahre 1965 erschienenen 21., berichtigten russischen Auflage)

Unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990
Druck 5 4

ISBN 978-3-8085-5574-3

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Rosch-Buch Druckerei GmbH, 96110 Scheßlitz

Vorwort

Mit der ersten Auflage des vorliegenden Buches war im Jahre 1953 die Reihe „Hochschulbücher für Mathematik" begonnen worden. Die Tatsache, daß in den vergangenen achtzehn Jahren neun Auflagen dieses Bandes erschienen und eine gute Resonanz fanden und daß auch die übrigen Teile des mehrbändigen „Lehrgangs der höheren Mathematik" bisher immer wieder nachgedruckt werden konnten, zeigt, daß dieses Werk ein echtes Bedürfnis befriedigt.

Wie im Vorwort zur ersten Auflage der deutschen Ausgabe betont, bietet das im Jahre 1947 mit dem Staatspreis der Sowjetunion ausgezeichnete Gesamtwerk den Stoff, der z.B. an der Universität Leningrad — hinsichtlich der ersten beiden Teile vollständig, bei den übrigen in ihren Kernstücken — der mathematischen Ausbildung nicht nur in der theoretischen Physik, sondern gerade der Experimentalphysik zugrunde liegt. Ferner heißt es dort: „Eine solche Betonung der mathematischen Hilfsmittel und die Dauer der zu ihrer Aneignung vorgesehenen Zeit muß ... Physiker und Mathematiker nachdenklich stimmen: den Physiker durch die Fülle des dargebotenen Stoffes, den Mathematiker durch seine Auswahl und die Methode der Darstellung, die auf äußerste Allgemeinheit und Subtilität der Resultate ... verzichtet, um dafür um so plastischer das Typische der Sätze, vor allem aber die Lebendigkeit der Mathematik hervortreten zu lassen. So entsteht schon für den Studenten der ersten Semester ein so farbiges Bild der Analysis, wie es ähnlich kaum ein Werk der mathematischen Weltliteratur vermittelt."

Inzwischen braucht die Notwendigkeit einer auf die Dauer breiten mathematischen Grundausbildung der Studenten der Physik und Chemie nicht mehr besonders betont zu werden.

Gleichwohl sind in der Mathematik selbst wie in den sie als Ausdrucks- und Hilfsmittel verwendenden Wissenschaften innere Entwicklungen und äußere Organisationsformen sichtbar geworden, die den Rahmen des sechsbändigen sowjetischen „Lehrgangs der höheren Mathematik" sprengen und die vor einem Vierteljahrhundert fast ausschließlich zwischen Mathematik und Physik gestiftete Verbindung nicht mehr ganz zeitgemäß erscheinen lassen könnten. Der Zwang, die normale Ausbildungszeit der Studenten herabzusetzen, verbietet in jeder Wissenschaft die durchgängige Benutzung breit angelegter Werke; an ihre Stelle tritt das für eine erste Orientierung besser geeignete „Taschenbuch". Die im Normalfall verkürzte Studienzeit zwingt in allen Wissenschaften, wenn das potentielle Niveau gewahrt bleiben soll, zu einem erhöhten Abstraktionsgrad von den Grundvorlesungen an. Hinzu kommt ferner, daß neben dem „klassischen" historischen Partner der Mathematik, eben der Physik, auch wenn gerade sie heute noch wie eh und je die eindrucksvollsten Vorstellungen von der Macht der möglichen Anwendungen der Mathematik vermittelt, anspruchsvolle Konkurrenten aufgetaucht sind. Sie geben einmal der mathematischen Entwicklung unmittelbar frische Impulse, die auch dem Gesicht der „reinen" Mathematik neue Züge einprägen, rühren aber andererseits in der innermathematisch schon bereitliegenden Vorstellungswelt Bezirke an und beanspruchen sie, die dem auch die modernen Möglichkeiten aufgeschlossen nutzenden Physiker fast immer abseitig erscheinen. Man denke nur an die Zusammenhänge zwischen der Grundlagenforschung und der allgemeinen Algebra mit der Automatentheorie und der Kybernetik, an die mühsame mathematische Modellierung verwickelter, zunächst oft nur grob statistisch faßbarer Erscheinungen aus der Produktion und der Ökonomie, der Biologie und der Medizin, die wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen ermöglichen oder die Anwendung der selbst noch in der Entwicklung befindlichen mathematischen Operationsforschung ermöglichen soll. Daß ein diese teilweise erst nur zu ahnende Macht mathematischen Denkens widerspiegelnder Kanon, ein „Lehrgang der höheren Mathematik" des letzten Drittels des zwanzigsten Jahrhunderts heute und wahrscheinlich noch für lange Zeit nicht verfaßt werden kann, leuchtet ein. Um so mehr aber wird der Blick zurückgelenkt auf jene beispielhafte Verbindung, in der die mathematische Durchdringung einer echten Naturwissenschaft, der Physik, seit mehr als drei Jahrhunderten im ganzen gut und sogar beispielhaft geglückt ist, wie skeptisch oder gar bitter auch gelegentlich hüben und drüben Stimmen erklungen sein mögen; als Vorbild der jüngsten Vergangenheit sei der vor fünfzehn Jahren verstorbene Hermann Weyl genannt. Immer werden sich an diesen Methoden und ihren Erfolgen auch die neuen, sich erst anbahnenden Entwicklungen orientieren, und auch der entschiedenste „Nur"-Mathematiker wird kein Vollmathematiker sein, wenn er nicht wenigstens einen Hauch dieses Geistes einer echten Verwandtschaft verspürt hat.

Dazu aber bleibt ihm der nun schon bald ein Vierteljahrhundert alte sechsbändige „Smirnow" ein zugänglicher sicherer Helfer. Ein Helfer ist er all denen, die nach konkreter Vertiefung des zunächst notwendig in Abstraktionsschnelle erlangten Wissens streben, all denen, die früher oder später die Mathematik in ihrer Querschnittseigenschaft und in ihrer besonderen Stellung innerhalb der Menschheitskultur zu begreifen bemüht sind. Geradezu unentbehrlich aber ist er vor allem dem sich ständig vergrößernden Kreis derjenigen, die nach abgeschlossener Ausbildung eines Tages aus dem Zwang der beruflichen oder geistigen Weiterentwicklung allein und ohne Kontrolle sich einem Selbststudium unterziehen.

Smirnows Werk war im deutschen Sprachgebiet eines der erfolgreichsten aus dem Russischen ins Deutsche übersetzten. In der mit ihm eröffneten, heute schon nahezu 70 Bände umfassenden Hochschulbuchreihe sind ihm neben original deutschsprachigen Werken zahlreiche andere Übersetzungen aus der russischen oder einer anderen Fremdsprache gefolgt. Sie alle haben mitgeholfen, die langsam sichtbar werdenden Eigenleistungen der jüngeren Generation der Mathematiker unseres Staates vorzubereiten. Die vor zwanzig Jahren noch aktuelle Problematik der Übersetzungen ist heute bewältigt und längst vergessen.

Nicht vergessen werden kann hingegen die bei so vielen inneren und äußeren Schwierigkeiten beachtliche Leistung des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Er hat sich nicht nur durch die Veröffentlichung der Hochschulbuchreihe, sondern auch durch andere diesbezügliche Reihen und einige originelle Einzelwerke um die Entwicklung der Mathematik in der Deutschen Demokratischen Republik, im weiteren deutschen Sprachgebiet und auch darüber hinaus verdient gemacht. Einer dadurch erweckten Empfindung des Dankes mit den besten Wünschen für den Verlag, insbesondere sein Lektorat Mathematik und den mathematisch-verlegerisch rührigen Cheflektor, Herrn Dr. h. c. Ludwig Boll, nach fast zwei Jahrzehnten ungetrübter Zusammenarbeit Ausdruck zu geben ist mir anläßlich des Erscheinens der zehnten Auflage des „Smirnow I“ ein Herzensbedürfnis.

Berlin, den 5. 4. 1971 H. GRELL

Vorwort zur einundzwanzigsten russischen Auflage

In der vorliegenden Auflage blieben der grundlegende Text und die gesamte Anlage des Buches unverändert. Es wurden jedoch an mehreren Stellen Veränderungen in der Darlegung des Stoffes durchgeführt. Das betraf insbesondere die Theorie der Grenzwerte und zusätzliche Ausführungen über das bestimmte Integral.

W. SMIRNOW

Inhalt

I. Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte

§ 1. Veränderliche Größen

1. Die Größe und ihre Maßbestimmung. Die mathematische Untersuchung hat eine fundamentale Bedeutung in den Naturwissenschaften und in der Technik. Zum Unterschied von den übrigen Wissenschaften, deren jede sich nur mit einem begrenzten Gebiet unserer Umwelt befaßt, hat die Mathematik mit den allgemeinsten Eigenschaften zu tun, die für alle der wissenschaftlichen Untersuchung zugänglichen Erscheinungen charakteristisch sind.

Einer der Grundbegriffe ist der Begriff der *Größe und ihrer Maßbestimmung.* Eine charakteristische Eigenschaft der Größe besteht darin, daß sie gemessen, d. h. in der einen oder anderen Weise mit einer bestimmten Größe derselben Art, die als *Maßeinheit* genommen wird, verglichen werden kann. Das Vergleichsverfahren selbst hängt von der Natur der zu untersuchenden Größe ab und wird *Messung* genannt. Als Resultat dieser Messung ergibt sich eine *reine Zahl,* die das Verhältnis der betrachteten Größe zu der als Maßeinheit gewählten Größe ausdrückt.

Jedes Naturgesetz liefert uns eine Wechselbeziehung zwischen Größen oder — richtiger gesagt — zwischen den Zahlen, die diese Größen darstellen. Gegenstand der mathematischen Untersuchungen sind nun gerade die Zahlen und die verschiedenen Beziehungen zwischen ihnen, unabhängig von dem konkreten Charakter jener Größe und der Gesetze, die uns zu diesen Zahlen und Beziehungen geführt haben.

Somit *kann jeder Größe eine sie messende reine Zahl gegenübergestellt werden.* Doch hängt diese Zahl wesentlich von der bei der Messung gewählten Einheit oder dem *Maßstab* ab. Bei Vergrößerung dieser Einheit wird sich die Zahl, die die gegebene Größe mißt, verkleinern; dagegen vergrößert sich diese Zahl bei Verkleinerung der Einheit.

Die Auswahl des Maßstabs wird bedingt durch den Charakter der zu untersuchenden Größe und durch die Umstände, unter denen die Messung durchgeführt wird. Die Größe des Maßstabes kann sich bei der Messung ein und derselben Größe in den weitesten Grenzen ändern — z.B. nahm man früher zur Messung der *Länge* bei genauen optischen Untersuchungen als Längeneinheit ein *Ångström* (ein zehnmillionstel Millimeter, 10^{-10} m); in der Astronomie jedoch ist eine Längeneinheit gebräuchlich, die *Lichtjahr* genannt wird; darunter versteht man die vom Licht in einem Jahre durchlaufene Entfernung (wobei das Licht in einer Sekunde etwa 300000 km durchläuft).

2. Die Zahl. Die Zahl, die man als Resultat einer Messung erhält, kann *ganz* sein (wenn die Einheit eine ganze Anzahl von Malen in der betrachteten Größe enthalten ist), *gebrochen* (wenn eine andere Einheit existiert, die eine ganze Anzahl von Malen sowohl in der zu messenden Größe als auch in der zuvor gewählten

Einheit enthalten ist — kürzer gesagt, wenn die zu messende Größe und die Maßeinheit *kommensurabel* sind), und schließlich kann sie *irrational* sein (wenn ein solches gemeinsames Maß nicht existiert, d. h. die gegebene Größe und die Maßeinheit sich als *inkommensurabel* erweisen).

So wird z.B. in der Elementargeometrie bewiesen, daß die Diagonale eines Quadrats und seine Seite inkommensurabel sind, d. h., die sich beim Ausmessen der Diagonale des Quadrats durch die als Längeneinheit genommene Seite ergebende Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Als irrational erweist sich auch die Zahl π, die die Länge des Umfangs eines Kreises mißt, wenn dessen Durchmesser als Einheit genommen wird.

Zur Erläuterung des Begriffs der irrationalen Zahl geht man zweckmäßigerweise auf die Dezimalbrüche zurück. Jede rationale Zahl kann, wie aus der Arithmetik bekannt ist, entweder als endlicher oder als unendlicher Dezimalbruch dargestellt werden, wobei im letzten Fall der unendliche Bruch periodisch ist (rein periodisch oder gemischt periodisch). So erhalten wir beispielsweise, wenn wir den Zähler durch den Nenner dividieren,

$$\tfrac{5}{33} = 0{,}151515\ldots = 0{,}\overline{15}\ldots,$$

$$\tfrac{5}{18} = 0{,}2777\ldots = 0{,}2\overline{7}\ldots.$$

Umgekehrt stellt jeder periodische Dezimalbruch, wie aus der Arithmetik bekannt ist, eine rationale Zahl dar.

Bei der Messung einer in bezug auf die angenommene Einheit inkommensurablen Größe können wir zuerst abzählen, wie oft die ganze Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, dann, wie oft der zehnte Teil der Einheit in dem erhaltenen Rest der Größe enthalten ist, dann, wie oft der hundertste Teil der Einheit in dem neuen Rest enthalten ist, usw. Auf diese Weise entsteht bei der Bestimmung einer in bezug auf die Einheit inkommensurablen Größe ein gewisser unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch. Jeder irrationalen Zahl entspricht ein solcher unendlicher Bruch und umgekehrt jedem unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch eine gewisse irrationale Zahl. Läßt man in diesem unendlichen Dezimalbruch nur einige der ersten Dezimalstellen stehen, so erhält man einen etwas zu kleinen Näherungswert für die durch diesen Bruch dargestellte irrationale Zahl. So erhalten wir z.B., wenn wir die Quadratwurzel nach der üblichen Regel auf drei Dezimalstellen genau bestimmen,

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots.$$

Die Zahlen 1,414 und 1,415 sind Näherungswerte von $\sqrt{2}$, die sich höchstens um ein Tausendstel von dem wahren Wert unterscheiden. Unter Benutzung von Dezimalbrüchen lassen sich die irrationalen Zahlen der Größe nach miteinander und mit den rationalen Zahlen vergleichen.

Bei vielen Problemen hat man Größen mit verschiedenen Vorzeichen zu betrachten, d. h. positive und negative Größen (Temperatur über und unter 0 °C, positive und negative Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung u. ä.). Solche Größen werden durch positive bzw. negative Zahlen dargestellt. Sind a und b positive Zahlen und ist $a > b$, so wird $-a < -b$, und jede positive Zahl sowie die Null ist größer als jede negative Zahl. Auf diese Weise lassen sich alle rationalen und irrationalen Zahlen ihrer Größe nach in einer bestimmten Reihenfolge anordnen. Die Gesamtheit dieser Zahlen bildet die Menge der *reellen Zahlen.*

Wir erwähnen noch einen mit der Darstellung der reellen Zahlen durch Dezimalbrüche zusammenhängenden Umstand. An Stelle eines beliebigen endlichen Dezimalbruchs können wir einen unendlichen Dezimalbruch mit der Neun als Periode schreiben. So ist z.B. $3{,}16 = 3{,}1599\ldots$. Schließt man endliche Dezimalbrüche aus, so ergibt sich eine eineindeutige Zuordnung zwischen den reellen Zahlen und den unendlichen Dezimalbrüchen, d. h., jeder von 0 verschiedenen reellen Zahl entspricht ein bestimmter unendlicher Dezimalbruch, und jedem unendlichen Dezimalbruch entspricht eine bestimmte reelle Zahl. Den negativen Zahlen entsprechen unendliche Dezimalbrüche mit vorgesetztem Minuszeichen.

Im Bereich der reellen Zahlen sind die ersten vier Rechenarten ausführbar mit Ausnahme der Division durch 0. Die Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten aus einer beliebigen rellen Zahl hat immer einen bestimmten Wert. Die Wurzel mit geradem Exponenten aus einer positiven Zahl hat zwei Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die Wurzel mit geradem Exponenten aus einer negativen reellen Zahl hat im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung. Die strenge Theorie der reellen Zahlen und der Rechenoperationen mit ihnen bringen wir später (in Kleindruck [**40**, **41**]).

Die nichtnegative der beiden Zahlen a und $-a$ heißt *Absolutwert* oder *Absolutbetrag* einer gegebenen Größe a. Der Absolutwert der durch die Zahl a dargestellten Größe oder, anders ausgedrückt, der absolute Betrag der Zahl a wird mit dem Symbol $|a|$ bezeichnet. Wir haben somit

$$|a| = a, \quad \text{wenn } a \text{ eine nichtnegative Zahl ist,}$$

$$|a| = -a, \quad \text{wenn } a \text{ eine negative Zahl ist.}$$

So ist beispielsweise $|5| = 5$ und $|-5| = 5$ und allgemein $|a| = |-a|$.

Es ist leicht zu beweisen, daß der Absolutwert einer Summe, $|a + b|$, nur dann gleich der Summe der Absolutbeträge der Summanden, also gleich $|a| + |b|$ ist, wenn diese Summanden gleiches Vorzeichen haben; andernfalls wird er kleiner, so daß allgemein

$$|a + b| \leqq |a| + |b|$$

gilt.

So ist z.B. der Absolutwert der Summe der Zahlen $+3$ und -7 gleich 4, aber die Summe der Absolutbeträge der Summanden gleich 10.

Ebenso leicht läßt sich zeigen, daß

$$|a + b| \geqq |a| - |b|$$

ist.

Der Absolutbetrag des Produkts beliebig vieler Faktoren ist gleich dem Produkt der Absolutbeträge dieser Faktoren, und der Absolutbetrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Absolutbeträge von Dividend und Divisor, d. h.

$$|abc| = |a|\,|b|\,|c| \quad \text{und} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. Konstante und veränderliche Größen. Die in der Mathematik untersuchten Größen lassen sich in zwei Klassen einteilen: *Konstanten und Veränderliche.*

Unter einer Konstante verstehen wir eine Größe, die bei einer Untersuchung ein und denselben Wert unverändert beibehält; Veränderliche oder Variable heißt eine Größe, die aus dem einen oder anderen Grunde bei der Untersuchung verschiedene Werte annimmt.

Aus diesen Definitionen wird klar ersichtlich, daß sowohl der Begriff der konstanten als auch der der veränderlichen Größe in beträchtlichem Maße relativ ist und von den Umständen abhängt, unter denen der gegebene Vorgang untersucht wird. Ein und dieselbe Größe, die unter gewissen Bedingungen als Konstante angesehen werden kann, kann unter anderen Bedingungen veränderlich sein, und umgekehrt.

So ist es z.B. bei der Bestimmung eines Körper*gewichts* wichtig zu wissen, ob die Wägung an ein und demselben oder an verschiedenen Orten der Erdoberfläche vorgenommen wird; wird die Messung am gleichen Ort durchgeführt, so bleibt die Schwerebeschleunigung, von der das Gewicht abhängt, konstant, und der Gewichtsunterschied zwischen verschiedenen Körpern ist nur durch ihre Massen bedingt. Erfolgt die Messung aber an verschiedenen Orten der Erdoberfläche, so kann die Schwerebeschleunigung nicht als konstant angesehen werden, da sie von der Zentrifugalkraft der Erddrehung abhängt. Deshalb wiegt ein und derselbe Körper am Äquator weniger als am Pol, was sich auch nachweisen läßt, wenn man die Wägung nicht mit einer Hebel-, sondern mit einer Federwaage ausführt.

Ebenso kann man bei technischen Überschlagsrechnungen die Länge der in einer Konstruktion verwendeten Stäbe als unveränderlich annehmen. Bei genaueren Rechnungen jedoch, wenn die Wirkung von Temperaturänderungen berücksichtigt werden muß, erweist sich die Stablänge als veränderlich, was natürlich alle Berechnungen erheblich kompliziert.

4. Das Intervall. Die Änderungsmöglichkeiten einer veränderlichen Größe können verschiedenartig sein. Eine veränderliche Größe kann entweder alle möglichen reellen Werte ohne jede Einschränkung annehmen (z. B. kann die Zeit t, gerechnet von einem bestimmten Anfangspunkt an, alle möglichen Werte annehmen, sowohl positive als auch negative), oder ihre Werte sind durch gewisse *Ungleichungen* eingeschränkt (z.B. die Temperatur $t°$, die > -273 °C sein muß); schließlich kann die veränderliche Größe nur gewisse und nicht alle möglichen Werte annehmen (nur ganzzahlige — wie beispielsweise die Einwohnerzahl einer Stadt, die Anzahl der Moleküle in einem gegebenen Gasvolumen — oder aber nur in bezug auf die gegebene Einheit kommensurable Werte u. ä.).

Wir geben einige Änderungsmöglichkeiten (Variabilitätsbereiche) veränderlicher Größen an, die in theoretischen Untersuchungen und in der Praxis am häufigsten auftreten.

Wenn die Veränderliche x alle reellen Werte annehmen kann, die der Bedingung $a \leqq x \leqq b$ genügen, wobei a und b vorgegebene reelle Zahlen sind, sagt man, x variiere *im Intervall* (a, b). Ein solches Intervall mit Einschluß der Endpunkte wird ein *abgeschlossenes Intervall* (auch *Segment*) genannt. Kann x dagegen alle Werte aus dem Intervall (a, b) mit Ausnahme seiner Endpunkte annehmen, d. h. $a < x < b$, so sagt man, x variiere *im Inneren des Intervalls* (a, b). Ein solches Intervall mit Ausschluß der Randpunkte heißt *offenes Intervall.* Außerdem kann der Variabilitätsbereich von x auch ein Intervall sein, das nach einer Seite abgeschlossen und nach der anderen offen ist: $a \leqq x < b$ oder $a < x \leqq b$ (*halboffenes Intervall, Halbsegment*).

Wenn der Variabilitätsbereich von x durch die Ungleichung $a \leqq x$ bestimmt wird, sagt man, x variiere im Intervall (a, ∞), das nach links abgeschlossen und nach rechts offen ist. Entsprechend haben wir bei der Ungleichung $x \leqq b$ das Intervall $(-\infty, b)$, das nach links offen und nach rechts abgeschlossen ist. Wenn x beliebige reelle Werte annehmen kann, sagt man, x variiere in dem beiderseits offenen Intervall $(-\infty, \infty)$.

5. Der Funktionsbegriff. Meistens hat man es bei den Anwendungen nicht mit einer einzigen Veränderlichen zu tun, sondern mit mehreren zugleich.

Wir nehmen z.B. eine gewisse Menge Luft, etwa 1 kg. Die veränderlichen Größen, die ihren Zustand bestimmen, sind: der Druck p [Pa], unter dem sie sich befindet; das Volumen v [m^3], das sie einnimmt; ihre Temperatur t [°C]. Nehmen wir einstweilen an, daß die Temperatur der Luft auf 0 °C gehalten wird; die Zahl t ist in diesem Fall eine Konstante, nämlich gleich 0. Es bleiben nur die Veränderlichen p und v. Ändert man den Druck p, so wird sich auch das Volumen v ändern, z.B. wird sich das Volumen verkleinern, wenn wir die Luft komprimieren. Den Druck p können wir dabei beliebig ändern (wenigstens in den für die Technik erreichbaren Grenzen), und daher können wir p eine *unabhängige Veränderliche* nennen. Bei jedem Wert des Druckes muß das Gas offenbar ein ganz bestimmtes Volumen einnehmen; also muß ein Gesetz bestehen, das erlaubt, zu jedem Wert p den ihm entsprechenden Wert v zu finden. Dieses Gesetz ist wohlbekannt — es ist das Boyle-Mariottesche Gesetz, welches aussagt, daß das von einem Gas bei konstanter Temperatur eingenommene Volumen umgekehrt proportional dem Druck ist.

Wendet man dieses Gesetz auf unser Kilogramm Luft an, so findet man die Abhängigkeit zwischen v und p in Form der *Gleichung*

$$v = \frac{273 \cdot 29{,}27}{p}.$$

Die Veränderliche v heißt im gegebenen Fall *Funktion* der unabhängigen Veränderlichen p.

Abstrahieren wir von dem speziellen Beispiel, so können wir sagen, daß *für die unabhängige Veränderliche die Menge ihrer zulässigen Werte charakteristisch ist, und wir können für sie willkürlich einen beliebigen Wert aus der Menge ihrer zulässigen Werte auswählen.* So kann z.B. als Wertmenge der unabhängigen Veränderlichen x irgendein Intervall (a, b) dienen oder das Innere dieses Intervalls, d. h., die unabhängige Veränderliche x kann z.B. alle Werte annehmen, die der Ungleichung $a \leqq x \leqq b$ oder der Ungleichung $a < x < b$ genügen. Es kann auch vorkommen, daß x beliebige ganzzahlige Werte annehmen darf, usw. Im oben angeführten Beispiel spielte p die Rolle der unabhängigen Veränderlichen, und das Volumen v war die Funktion von p. Wir definieren nun den Begriff der Funktion.

Definition. Die Größe y heißt *Funktion* der unabhängigen Veränderlichen x, wenn jedem beliebigen Wert der Größe x (aus der Menge ihrer zulässigen Werte) ein bestimmter Wert von y zugeordnet werden kann.

Ist etwa y eine im Intervall (a, b) definierte Funktion von x, so bedeutet dies, daß jedem Wert x aus diesem Intervall ein bestimmter Wert y entspricht.

Die Frage, welche der beiden Größen x oder y man als unabhängige Veränderliche ansehen will, ist häufig nur eine Frage der Zweckmäßigkeit. In unserem Beispiel könnten wir, indem wir das Volumen v willkürlich ändern und jedesmal den Druck p bestimmen, v als unabhängige Veränderliche ansehen und den Druck p als Funktion von v. Durch Auflösung der oben aufgeschriebenen Gleichung nach p erhalten wir die Formel, welche die Funktion p durch die unabhängige Veränderliche ausdrückt:

$$p = \frac{273 \cdot 29{,}27}{v}.$$

Das über zwei Veränderliche Gesagte läßt sich ohne Schwierigkeit auch auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen erweitern; auch hier können wir *zwischen unabhängigen Veränderlichen und abhängigen oder Funktionen unterscheiden.*

Wir kehren zu unserem Beispiel zurück und nehmen an, die Temperatur sei nicht dauernd 0 °C, sondern könne sich ändern. Das Boyle-Mariottesche Gesetz muß dann durch die kompliziertere Boyle-Mariotte-Gay-Lussacsche Beziehung[1])

$$pv = 29{,}27(273 + t)$$

ersetzt werden, aus der hervorgeht, daß sich bei der Untersuchung des Gaszustands nur zwei der Größen p, v und t willkürlich ändern lassen; die dritte ist vollständig bestimmt, wenn die Werte dieser beiden gegeben sind. Wir können etwa p und t als unabhängige Veränderliche nehmen; dann wird v eine Funktion von ihnen:

$$v = \frac{29{,}27(273 + t)}{p}.$$

Oder aber wir können v und t als unabhängige Veränderliche ansehen, und p wird eine Funktion von ihnen.

Wir führen ein anderes Beispiel an. Der Flächeninhalt F eines Dreiecks läßt sich durch die Längen der Seiten a, b, c gemäß der Formel

$$F = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

ausdrücken, wobei s der halbe Umfang des Dreiecks ist:

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Die Seiten a, b, c können willkürlich verändert werden, solange jede Seite größer ist als die Differenz und kleiner als die Summe der beiden anderen. Auf diese Weise sind die Veränderlichen a, b, c *unabhängige Veränderliche, die durch Ungleichungen eingeschränkt* sind, und F ist eine Funktion von ihnen.

Wir können auch willkürlich zwei Seiten, etwa a, b, und den Flächeninhalt F des Dreiecks vorgeben; benutzen wir die Formel

$$F = \tfrac{1}{2}\, ab \sin \gamma\,,$$

wobei γ der Winkel zwischen den Seiten a und b ist, so läßt sich γ berechnen. Hierbei sind nun die Größen a, b, F die unabhängigen Veränderlichen, und γ wird eine Funktion. Dabei müssen die Veränderlichen a, b, F durch die Ungleichung

$$\sin \gamma = \frac{2F}{ab} \leqq 1$$

eingeschränkt werden.

Es sei bemerkt, daß wir bei diesem Beispiel für γ zwei Werte erhalten, je nachdem, ob wir für γ den spitzen oder den stumpfen der beiden Winkel nehmen, deren Sinus denselben Wert

$$\sin \gamma = \frac{2F}{ab}$$

haben.

Wir stoßen damit auf den Begriff der *mehrdeutigen Funktion,* über den wir später eingehender sprechen werden.

---

[1]) Im russischen Original Clapeyronsche Beziehung genannt (Anm. d. Übers.).