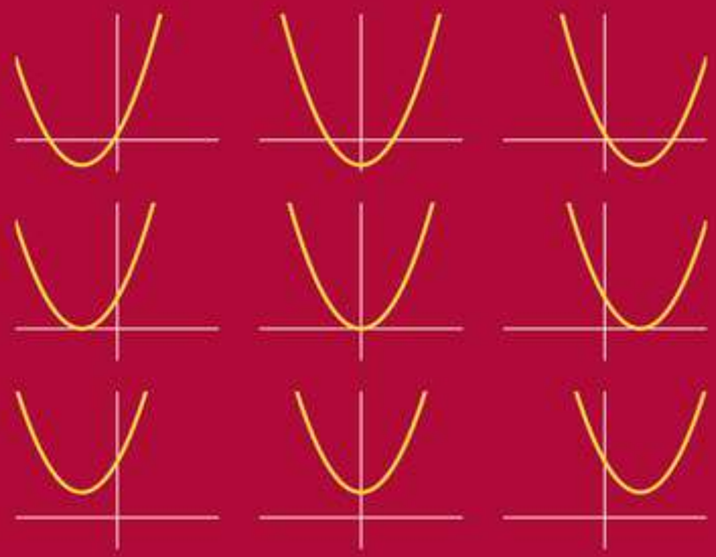
C. Gellrich
R. Gellrich



MATHEMATIK – EIN LEHR- UND ÜBUNGSBUCH

Band 1

Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Edition Harri Deutsch

EUROPA LEHRMITTEL

Mathematik

Ein Lehr- und Übungsbuch
Band 1

Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

von

Regina Gellrich
Carsten Gellrich

5., korrigierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55989

Mathematik – Ein Lehr- und Übungsbuch

Band 1: Gellrich/Gellrich;
Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Band 2: Gellrich/Gellrich;
Lineare Algebra, Vektorrechnung, Analytische Geometrie

Band 3: Gellrich/Gellrich;
Zahlenfolgen und -reihen, Einführung in die Analysis
für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Band 4: Schark/Overhagen;
Vektoranalysis, Funktionentheorie, Transformationen

5., korrigierte Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5599-6

ISBN 978-3-8085-5809-6 (E-Book)

Unter Verwendung vorzugsweise der Aufgaben des Werkes
Schalk, Mathematik für Höhere Technische Lehranstalten
mit Genehmigung des RENIETS VERLAG GmbH, Wien.
Für die diesem Werk entnommenen Teile:

http://www.europa-lehrmittel.de
Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Mit diesem Buch halten Sie bereits die fünfte Auflage des Bandes 1 der Reihe „MATHEMATIK – ein Lehr- und Übungsbuch“ in der Hand. Diese Reihe wendet sich an den Adressatenkreis der Studenten von Fachhochschulen, Fachoberschulen, Technikerschulen und ähnlichen Bildungseinrichtungen, ist aber auch für das Selbststudium geeignet. Sie berücksichtigt neben der notwendigen breiten Darstellung der klassischen Mathematik in hohem Maße moderne Entwicklungen und die Einbeziehung der Rechentechnik zum Lösen der Aufgaben.

Bei der methodischen Aufbereitung des Lehrstoffes wird in dieser Reihe davon ausgegangen, dass der Nutzer die Mathematik nicht als Wissenschaft betreiben will, sondern als Instrument zur Lösung der in seinem Fachgebiet anstehenden Aufgaben und Probleme. Daher werden diejenigen Stoffgebiete, mathematischen Methoden und Verfahren besonders berücksichtigt, die für den Anwender von Bedeutung sind. Die Theorie wird in leicht verständlicher Form dargestellt. Auf aufwendige Beweise und theoretische Untersuchungen wird bewusst verzichtet. Das Grundanliegen der Reihe besteht hingegen darin, dem Leser durch zahlreiche gut kommentierte Beispiele Hinweise dafür zu geben, wie man an das Lösen von Aufgaben herangehen muss. Eine Vielzahl von Aufgaben mit Lösungen geben jedem die Möglichkeit, seine Fähigkeiten zu erweitern und sein Wissen und Können zu kontrollieren. Die Herausgabe der fünften Auflage des vorliegenden Bandes 1 dokumentiert den Erfolg des Konzeptes dieser Reihe.

Der Band 1 ist als Vorbereitungsband aufzufassen, der (mit Ausnahme der Kapitel 5 und 7) diejenigen Stoffgebiete umfasst, die als Basis für ein erfolgreiches Studium der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften unbedingt notwendig sind. Insbesondere werden auch Ungleichungen und Ungleichungssysteme behandelt, um die Basis für weitere Themen der höheren Mathematik, wie der linearen Optimierung, zu verbreitern. Deshalb ist dieses Buch zur Wiederholung und Einstimmung auf das Studium sehr zu empfehlen. Die Erfahrungen von Lehrenden an Hochschulen zeigen immer wieder, dass viele Studenten im Fach Mathematik nicht daran scheitern, dass sie schwierige Aufgaben der Mathematik nicht lösen können, sondern daran, dass Mängel in der Handhabung elementarer Zusammenhänge auftreten.

Inzwischen haben bereits viele Jahrgänge von mathematisch interessierten Lesern mit diesem Buch gearbeitet und die große Anzahl positiver Rückmeldungen zeigt, dass es ihnen bei ihren Studien hilfreich war. Zum anderen haben gerade die Leser mit ihren Hinweisen und Korrekturvorschlägen einen großen Anteil daran, dass die Qualität des Buches stetig zunahm. Die Autoren und der Verlag möchten sich auf diesem Wege herzlich dafür bedanken.

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass der überwiegende Teil der Aufgaben und Lösungen sowie einige Beispiele aus dem Lehrwerk MATHEMATIK von SCHALK aus dem RENIETS-Verlag Wien übernommen wurde. Darunter sind sehr viele anwendungsorientierte Aufgaben aus den unterschiedlichsten Wissensgebieten, so dass dem Leser das große Spektrum mathematischer Fragestellungen bewusst wird und jeder hinreichend Aufgaben seines Fachgebietes findet Wir danken dem RENIETS-Verlag Wien und seinen Autoren für die großzügige Bereitschaft, uns diesen Fundus an Aufgaben zur Verfügung zu stellen.

Wir Autoren bedanken uns sehr herzlich bei Dr. Marianne Kreul und Prof. Dr. Hans Kreul (†) für die Vielzahl von Anregungen und Hinweisen, die sie uns aus ihrem reichen Erfahrungsschatz beim Verfassen von Lehrbüchern sowie aus ihrer Lehrtätigkeit an Hochschulen gaben, für die fruchtbaren Diskussionen, die uns wertvolle Anregungen für die Gestaltung des Manuskripts lieferten, sowie nicht zuletzt für die Unterstützung bei der Bearbeitung des Buches.

Wie stets sind wir an der Meinung der Nutzer dieses Buches interessiert und bitten darum, uns bisher noch nicht erkannte Fehler mitzuteilen. Die Adressen für Zuschriften und E-Mails sind

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
http://www.europa-lehrmittel.de

Wir wünschen allen mathematisch Interessierten, die mithilfe dieses Buches ihr mathematisches Wissen vertiefen und ihre Fähigkeiten und Fertigkeiten auf diesem Gebiet verbessern wollen, viel Erfolg und Freude beim Lernen und beim Lösen der Aufgaben.

Regina und Carsten Gellrich

Inhaltsverzeichnis

1 Was man beherrschen sollte . . . 11
1.1 Elemente der Mengenlehre . . . 11
1.1.1 Begriffsbestimmung . . . 11
1.1.2 Darstellung von Mengen . . . 11
1.1.3 Beziehungen zwischen Mengen . . . 13
1.2 Die vier Grundrechenoperationen mit Variablen und Termen . . . 16
1.2.1 Einführung . . . 16
1.2.2 Das Rechnen mit Klammerausdrücken . . . 16
1.2.3 Bruchrechnung . . . 20
1.2.4 Partialdivision . . . 24
1.3 Das Lösen von Gleichungen . . . 34
1.3.1 Begriffsbestimmungen . . . 34
1.3.2 Zum Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen . . . 35
1.3.3 Der VIETAsche Wurzelsatz . . . 47
1.4 Einfache Gleichungen höheren Grades . . . 49
1.4.1 Begriffsbestimmungen . . . 49
1.4.2 Der VIETAsche Wurzelsatz . . . 50
1.4.3 Das Lösen von speziellen Gleichungen höheren Grades . . . 52
1.4.3.1 Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen . . . 52
1.4.3.2 Gleichungen höheren Grades, von denen mindestens eine Lösung bekannt ist . . . 54
1.4.4 Das HORNER-Schema . . . 56
1.5 Lineare und quadratische Funktion . . . 62
1.5.1 Die lineare Funktion . . . 62
1.5.2 Die quadratische Funktion . . . 69
1.5.3 Funktion und Bestimmungsgleichung . . . 74
1.6 Proportionen . . . 77
1.6.1 Begriffsbestimmungen . . . 77
1.6.2 Proportionalität . . . 80
1.6.2.1 Direkte Proportionalität . . . 80
1.6.2.2 Indirekte Proportionalität . . . 81
1.6.3 Proportionen und Bestimmungsgleichungen . . . 84
1.6.4 Prozent- und Zinsrechnung . . . 89

2 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen . . . 97
2.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten . . . 97
2.1.1 Begriffserklärungen . . . 97

2.1.2 Potenzgesetze 99
2.1.2.1 Addition und Subtraktion von Potenzen 99
2.1.2.2 Multiplikation und Division von Potenzen 100
2.2 Potenzen mit gebrochenen Exponenten 106
2.2.1 Die Umkehrungen der Potenzrechnung 106
2.2.2 Grundbegriffe der Wurzelrechnung 107
2.2.3 Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten 109
2.2.4 Das Rechnen mit Wurzeln 111
2.2.5 Potenzen mit reellen Exponenten 113
2.2.6 Zur Berechnung von Potenzen mit beliebigen Exponenten mit dem Taschenrechner 114
2.3 Logarithmen 119
2.3.1 Begriffserklärungen 119
2.3.2 Das Rechnen mit Logarithmen 121
2.3.3 Logarithmensysteme 123
2.3.3.1 Häufi auftretende Logarithmensysteme 123
2.3.3.2 Zur Ermittlung von Logarithmen mit dem Taschenrechner 124
2.3.3.3 Beziehungen zwischen Logarithmensystemen mit unterschiedlichen Basen 126
2.4 Gleichungen mit Wurzeln, Potenzen und Logarithmen 129
2.4.1 Wurzelgleichungen 129
2.4.2 Exponentialgleichungen 134
2.4.3 Logarithmische Gleichungen 138
2.4.4 Vermischte Aufgaben 141

3 Trigonometrie 146
3.1 Winkelmessung 146
3.2 Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck 149
3.2.1 Begriffe 149
3.2.2 Definitio der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck 150
3.2.3 Ermittlung der Werte der trigonometrischen Funktionen für spitze Winkel 151
3.2.4 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck 155
3.3 Die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel 165
3.3.1 Erweiterung des Begriffes der trigonometrischen Funktionen auf beliebige Winkel 165
3.3.2 Ermittlung der Werte der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel 168
3.3.3 Vereinfachte Umrechnung von Winkeln aus Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt 172
3.4 Berechnungen am allgemeinen Dreieck 175
3.4.1 Der Sinussatz 175
3.4.2 Der Kosinussatz 180
3.5 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen 191
3.5.1 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen ein und desselben Winkels 191

3.5.2 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen unterschiedlicher Winkel . . . 193
3.6 Goniometrische Gleichungen . . . 201
3.6.1 Begriffsbestimmung . . . 201
3.6.2 Das Lösen goniometrischer Gleichungen . . . 201
3.7 Vermischte Aufgaben . . . 209

4 Funktionen . . . 214
4.1 Abbildungen und Funktionen . . . 214
4.1.1 Der Begriff der Abbildung . . . 214
4.1.2 Der Begriff der Funktion . . . 216
4.2 Wichtige Eigenschaften von Funktionen . . . 222
4.2.1 Beschränktheit . . . 222
4.2.2 Monotonie . . . 224
4.2.3 Symmetrie . . . 227
4.2.4 Stetigkeit . . . 229
4.3 Die Umkehrfunktion . . . 236
4.3.1 Die Umkehrung einer Abbildung . . . 236
4.3.2 Der Begriff der Umkehrfunktion . . . 239
4.4 Grundfunktionen . . . 243
4.4.1 Potenzfunktionen . . . 243
4.4.1.1 Potenzfunktionen mit ganzen positiven Exponenten . . . 243
4.4.1.2 Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten . . . 246
4.4.1.3 Die Potenzfunktion $y = x^0$ . . . 247
4.4.1.4 Potenzfunktionen mit reellen Exponenten . . . 247
4.4.1.5 Zusammenhang zwischen der Potenzfunktion $y = x^n$ und der Wurzelfunktion . . . 249
4.4.2 Exponential- und Logarithmusfunktion . . . 252
4.4.3 Die trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen . . . 254
4.4.4 Die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrungen . . . 264
4.5 Grafisch Darstellung von Funktionen durch Synthese . . . 274
4.6 Überlagerung von Schwingungen . . . 287

5 Komplexe Zahlen . . . 295
5.1 Grundbegriffe . . . 295
5.1.1 Einführung der komplexen Zahlen . . . 295
5.1.2 Grafisch Veranschaulichung komplexer Zahlen . . . 297
5.2 Die trigonometrische und die Exponentialform komplexer Zahlen . . . 301
5.2.1 Die trigonometrische Darstellungsform . . . 301
5.2.1.1 Umrechnung von der arithmetischen in die trigonometrische Form . . . 303
5.2.1.2 Umrechnung von der trigonometrischen in die arithmetische Form . . . 305
5.2.2 Die Exponentialform . . . 305
5.3 Die vier Grundrechenarten im Bereich der komplexen Zahlen . . . 307
5.4 Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren . . . 314

5.5 Lösen algebraischer Gleichungen im Komplexen 320
5.6 Anwendungen in der Elektrotechnik 325

6 Ungleichungen 330
6.1 Begriffsbestimmung 330
6.2 Rechenregeln für Ungleichungen 331
6.3 Das Lösen von Ungleichungen 333
6.3.1 Zusammenhänge zwischen Ungleichung, Gleichung und Funktion 333
6.3.2 Grafisch Verfahren zur Lösung von Ungleichungen 336
6.3.3 Rechnergestützte Lösung von Ungleichungen 340
6.4 Systeme von Ungleichungen 342

7 Einige mathematische Grundlagen der Informatik 351
7.1 Zahlendarstellung 351
7.1.1 Darstellung von Zahlen in Positionssystemen 351
7.1.1.1 Umrechnung von Zahlen eines beliebigen Positionssystems in Dezimalzahlen 353
7.1.1.2 Umrechnung von Dezimalzahlen in ein anderes Positionssystem 355
7.1.1.3 Besonderheiten beim Umwandeln von Dualzahlen in Oktal- oder Hexadezimalzahlen und umgekehrt 359
7.1.2 Fest- und Gleitkommadarstellung von Zahlen 361
7.1.2.1 Darstellung ganzer Zahlen 362
7.1.2.2 Darstellung reeller Zahlen 363
7.1.3 Numerische Effekte beim Rechnen mit dem Computer 367
7.2 Elemente der BOOLEschen Algebra 370
7.2.1 Grundlagen der Aussagenlogik 370
7.2.1.1 Verknüpfungen von Aussagen 371
7.2.2 Einführung in die Schaltalgebra 374
7.2.2.1 Grundschaltungen 374
7.2.2.2 Analyse und Synthese digitaler Schaltungen mittels Schaltzustandstabelle 379
7.2.2.3 Rechengesetze der Schaltalgebra 381

8 Lösungen der Aufgaben 390

Sachwortverzeichnis 475

1 Was man beherrschen sollte

1.1 Elemente der Mengenlehre

1.1.1 Begriffsbestimmung

Definitio :
Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte zu einer Gesamtheit.

Mengen werden in der Regel mit Großbuchstaben bezeichnet. Die einzelnen durch eine Menge zusammengefassten Objekte werden **Elemente** der Menge genannt. Man bezeichnet sie mit Kleinbuchstaben.

Durch das Symbol $\in$ wird ausgedrückt, dass ein Element einer Menge angehört. So besagt

$$x \in M,$$

dass das Element x ein Element der Menge M ist. Dagegen bedeutet

$$y \notin M,$$

dass y der Menge M nicht angehört.

1.1.2 Darstellung von Mengen

Es gibt unterschiedliche Arten, Mengen darzustellen.

a) *Durch Angabe ihrer Elemente.*

Beispiel:

1.1
$$A = \{1, 4, 9, 16\}$$
$$B = \{1, 4, 9, 16, \ldots, 625\}$$
$$C = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}.$$

Aus diesem Beispiel geht hervor, dass es Mengen mit endlich vielen Elementen, aber auch Mengen mit unendlich vielen Elementen (endliche und unendliche Mengen) gibt.

Für häufi auftretende Mengen werden feste Abkürzungen gewählt. So bezeichnet

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$	die Menge der *natürlichen Zahlen*,
$\mathbf{G} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	die Menge der *ganzen Zahlen,*
$\mathbf{R}$	die Menge der *reellen Zahlen,*
$\emptyset$	die so genannte *leere Menge*.

Eine leere Menge enthält *kein Element*. Man beschreibt die leere Menge auch in der Form $\emptyset = \{\,\}$. Sie ist von der Menge $\{0\}$ zu unterscheiden. Während die leere Menge *kein Element* besitzt, enthält die Menge $\{0\}$ *ein* Element, nämlich 0.

b) *Durch Beschreibung ihrer Elemente.*

Beispiel:

1.2 $D = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x < 10\}$
Diese Schreibweise wird gelesen: D ist die Menge aller x *mit der Eigenschaft*, dass x enthalten ist in der Menge der natürlichen Zahlen *und* dass $x < 10$ ist. Damit enthält D die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, so dass D auch in der Form

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

angegeben werden kann.

$E = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$

ist diejenige Menge, die alle Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$ enthält. Die Lösungen dieser Gleichung lauten $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$, so dass die obige Mengenschreibweise für E gleichbedeutend ist mit $E = \{-2{,}3\}$.

$F = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x \leq 4\}$

enthält alle reellen Zahlen zwischen $x = 0$ und $x = 4$ einschließlich der Werte $x = 0$ und $x = 4$.

$H = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a < x < b\}$

enthält alle reellen Zahlen zwischen $x = a$ und $x = b$, wobei jedoch im Unterschied zur Menge F hier die beiden Werte $x = a$ und $x = b$ *nicht* mit zur Menge H gehören.

Mengen wie F und H treten in der Mathematik häufi auf, so z. B. als Definitions und Wertebereich von Funktionen. Deshalb gibt es auch für derartige Mengen eine abkürzende Schreibweise. Sie werden *Intervalle* genannt, und man schreibt z. B. für F und H:

$F = [0; 4]$ und $H = (a; b)$.

Bei F spricht man von einem beiderseits *abgeschlossenen Intervall*, weil die beiden Endpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ mit zur Menge F dazugehören. Bei H hingegen handelt es sich um ein beiderseits *offenes Intervall*, denn die beiden Endpunkte $x_1 = a$ und $x_2 = b$ gehören *nicht* zur Menge H. *Abgeschlossene Intervalle* werden durch *eckige Klammern, offene Intervalle* durch *runde Klammern* gekennzeichnet.

Es gibt auch *einseitig geschlossene* (bzw. *einseitig offene) Intervalle*. Bei ihnen gehört nur einer der beiden Eckpunkte der Menge an, der andere jedoch nicht.

Beispiel:

1.3 $L_1 = (0; 10]$, (die Menge aller reellen Zahlen, die größer sind als 0 bis einschließlich 10) – ein *linksseitig offenes* und
$L_2 = [0; \infty)$, (die Menge aller positiven reellen Zahlen) – ein *rechtsseitig offenes* Intervall.

c) *Durch grafis he Interpretation.*

– Alle Elemente einer Menge werden als Punkte einer Fläche dargestellt. Diese Darstellungsweise wird vor allem dazu verwendet, Verknüpfungen zwischen Mengen zu verdeutlichen. (Vgl. Abschnitt 1.1.3)
– Zahlenmengen werden als Punkte oder als Strecken einer Zahlengeraden dargestellt.

Auf diese Weise lassen sich die Mengen A, D, F, L_1 und L_2 der Beispiele 1.1., 1.2. und 1.3. wie folgt veranschaulichen:

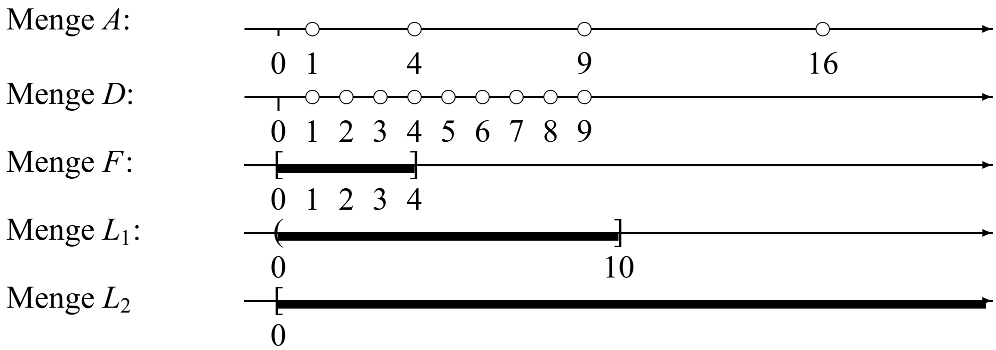


Bild 1.1

1.1.3 Beziehungen zwischen Mengen

- Eine Menge M_2 wird **Teilmenge** von M_1 genannt, wenn *jedes* Element von M_2 auch Element von M_1 ist (vgl. Bild 1.2).
  Schreibweise: $M_2 \subseteq M_1$.
  Gibt es dabei in M_1 noch Elemente, die M_2 *nicht* angehören, dann heißt M_2 eine *echte Teilmenge* von M_1. Schreibweise: $M_2 \subset M_1$.
- Zwei Mengen M_1 und M_2 sind **einander gleich**, wenn sie beide genau die gleichen Elemente besitzen.
  Schreibweise: $M_1 = M_2$.
  Ist beispielsweise M_1 die Menge aller geraden Zahlen und M_2 die Menge aller Zahlen, die durch 2 teilbar sind, dann gilt $M_1 = M_2$.
- Die **Vereinigung** zweier Mengen M_1 und M_2 enthält alle diejenigen Elemente, die M_1 *oder* M_2 (oder beiden Mengen) angehören (vgl. Bild 1.3).
  Schreibweise: $M_1 \cup M_2$.

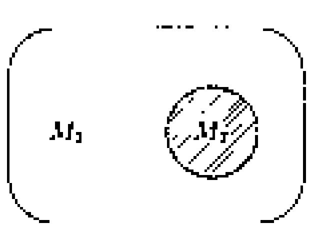


Bild 1.2

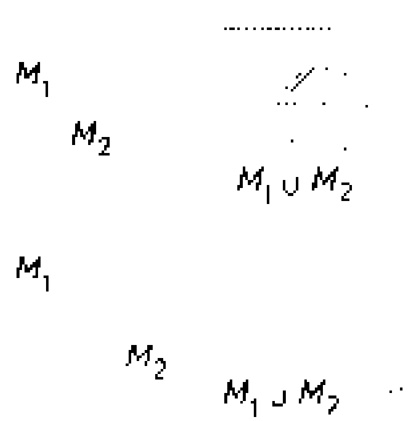


Bild 1.3

Beispiele:

1.4 Wenn $M_1 \cup M_2 = M_1$ ist, dann folgt daraus $M_2 \subseteq M_1$. Veranschaulichen Sie sich diese Eigenschaft anhand einer Skizze, in der die beiden Mengen als Flächen dargestellt sind.

1.5 Wenn $M_1 = (0; 5]$ und $M_2 = [3; 8)$, dann ist $M_1 \cup M_2 = (0; 8)$ (vgl. Bild 1.4).

- Der **Durchschnitt** zweier Mengen M_1 und M_2 enthält alle diejenigen Elemente, die *sowohl* M_1 *als auch* M_2 angehören.
  Schreibweise: $M_1 \cap M_2$.

Beispiele:

1.6 Der Durchschnitt zweier sich teilweise überlappender Mengen M_1 und M_2 ist im Bild 1.5 veranschaulicht. Überzeugen Sie sich durch eine ähnliche Skizze, dass der folgende Satz gilt:

Wenn $M_1 \cap M_2 = M_1$, dann folgt daraus

$M_1 \subseteq M_2$

1.7 Zwei Mengen, die *keine gemeinsamen Elemente* besitzen, heißen *disjunkt* zueinander. Für zwei *disjunkte* Mengen M_1 und M_2 gilt

$M_1 \cap M_2 = \emptyset = \{\}$.

(Vgl. dazu Bild 1.6)

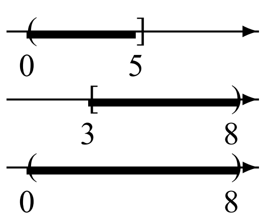


Bild 1.4

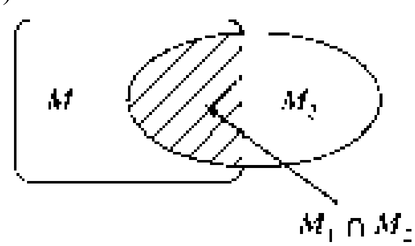


Bild 1.5

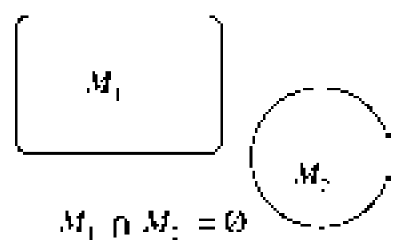


Bild 1.6

Beispiel:

1.8 Für die Intervalle $M_1 = (0;\ 5]$ und $M_2 = [3;\ 8)$ (vgl. Beispiel 1.5.), wird

$M_1 \cap M_2 = [3;\ 5]$.

Prüfen Sie dies bitte anhand einer Skizze nach! Vergewissern Sie sich dabei insbesondere, dass die beiden Endpunkte $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ Elemente der Durchschnittsmenge $M_1 \cap M_2$ sind.

- Die **Differenz** zweier Mengen M_1 und M_2 enthält alle diejenigen Elemente von M_1, die *nicht* Elemente von M_2 sind.
  Schreibweise: $M_1 \backslash M_2$.

Beispiele:

1.9 Die beiden Differenzmengen $M_1 \backslash M_2$ und $M_2 \backslash M_1$ zweier Mengen M_1 und M_2, die gemeinsame Elemente besitzen, sind in Bild 1.7 dargestellt.

1.10 Für zwei disjunkte Mengen M_1 und M_2 gilt

$M_1 \backslash M_2 = M_1$ und $M_2 \backslash M_1 = M_2$

(vgl. dazu Bild 1.8).

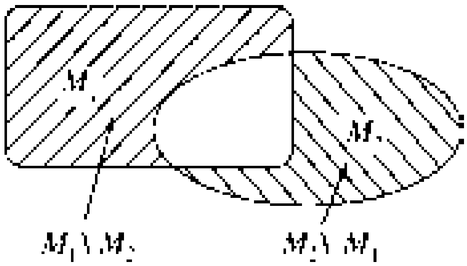


Bild 1.7

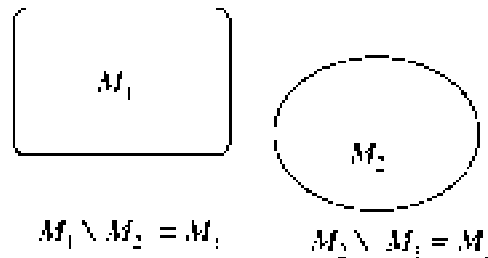


Bild 1.8

1.11 Für die beiden Intervalle $M_1 = (0;5]$ und $M_2 = [3;8)$ (vgl. Beispiele 1.5. und 1.8.) gilt

$M_1 \backslash M_2 = (0;\ 3)$ und $M_2 \backslash M_1 = (5;\ 8)$.

Prüfen Sie dies wiederum anhand einer Skizze nach, und überzeugen Sie sich davon, dass die beiden Eckpunkte $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ *keiner* der beiden Differenzmengen angehören.

Aufgaben:

1.1 Die Leerstellen sind durch Verwendung der Symbole $\subseteq$ bzw. $\not\subseteq$ zu vervollständigen!

$M_1 = \{3,4,5\}, M_2 = \{5,3\}, M_3 = \{5,6,7\}, M_4 = \{\,\}$

a) $M_1 \ldots M_2$ **b)** $M_2 \ldots M_1$ **c)** $M_2 \ldots M_3$ **d)** $M_3 \ldots M_4$

1.2 Von der Menge $M = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge 10 > x > 2\}$ sind folgende Teilmengen zu bestimmen:

a) A, Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen von M
b) B, Menge aller geraden Zahlen von M
c) C, Menge aller ungeraden Zahlen von M

1.3 **a)** Können zwei endliche Mengen, die eine verschiedene Anzahl von Elementen haben, jemals gleich sein?
b) Sind zwei endliche Mengen, die eine gleiche Anzahl von Elementen haben, immer gleich?
c) Haben zwei gleiche Mengen immer die gleiche Anzahl von Elementen?

1.4 Es sind die Mengen $M_1 = \{3,4,5\}, M_2 = \{1,3,4\}, M_3 = \{4,5,6,8,9\}, M_4 = \{\,\}$ gegeben. Man ermittle:
a) $M_1 \cap M_2$ **b)** $M_2 \cap M_3$ **c)** $M_1 \cap M_1$ **d)** $M_1 \cap M_4$ **e)** $M_1 \cap M_3$ **f)** $M_4 \cap M_3$

1.5 Es sind die Mengen $M_1 = \{2;\ 4;\ 9\}, M_2 = \{1;\ 2;\ 3\}, M_3 = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x < 10\}, M_4 = \{\,\}$ gegeben. Man ermittle:
a) $M_1 \cup M_2$ **b)** $M_2 \cup M_3$ **c)** $M_4 \cup M_4$ **d)** $M_2 \cup M_4$ **e)** $M_4 \cup M_1$ **f)** $M_1 \cup M_3$

1.6 Es sind die Mengen $M_1 = \{1;\ 2;\ 3\}, M_2 = \{3;\ 7\}, M_3 = \{4;\ 7\}$ gegeben. Man ermittle:
a) $M_1 \backslash M_2$ **b)** $M_2 \backslash M_1$ **c)** $M_1 \backslash M_3$ **d)** $M_3 \backslash M_1$ **e)** $M_2 \backslash M_3$ **f)** $M_3 \backslash M_2$

1.7 Gegeben sind die folgenden Intervalle: $I_1 = (-2;\ 3)$, $I_2 = [0;\ 5]$ und $I_3 = [-1;\ 5)$.

a) Stellen Sie diese Intervalle grafisc dar.
b) Geben Sie, sofern dies möglich ist, als Intervalle an:

$I_1 \cup I_2$ $I_2 \cap I_3$ $I_1 \backslash I_2$ $I_3 \backslash I_1$
$(I_1 \cap I_2) \cup I_3$ $(I_3 \cup I_2) \backslash I_1$ $I_2 \cap \mathbf{N}$

1.8 Gegeben sind zwei Kreise mit dem gleichen Mittelpunkt M und den Radien R und r. Die Punktmenge A des Kreises mit dem Radius R sei als Menge der Punkte im Inneren dieses Kreises (unter Ausschluss des Randes) gegeben; entsprechendes gilt für die Punktmenge B, vgl. Bild 1.9. Welche Punktmengen werden durch nachfolgende Mengenverknüpfungen dargestellt:

a) $A \cap B$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$
b) $A \cup B$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$
c) $A \backslash B$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$
d) $B \backslash A$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$

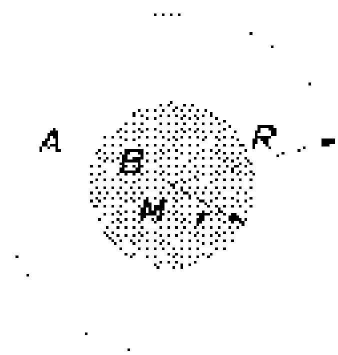


Bild 1.9

1.2 Die vier Grundrechenoperationen mit Variablen und Termen

1.2.1 Einführung

Die *Beherrschung* der Regeln und Gesetze für die vier Grundrechenoperationen

Addition und Subtraktion (Rechenoperationen der *ersten Stufe*) und
Multiplikation und Division (Rechenoperationen der *zweiten Stufe*)

und ihre sichere Anwendung beim Lösen von Aufgaben ist eine entscheidende Voraussetzung für das Eindringen in neue mathematische Stoffgebiete. Die Erfahrung zeigt immer wieder, dass viele Lernende z. B. an Hochschulen nicht daran scheitern, dass sie die „höhere Mathematik“ nicht begreifen, sondern daran, dass elementare Rechenfehler die Ursache für falsche Ergebnisse in Aufgaben mit durchaus richtig angegangenem Lösungsweg sind.

Aus diesem Grunde soll an dieser Stelle ein Überblick über die wichtigsten mathematischen Operationen mit Variablen und Termen gegeben werden. Dem Leser wird dazu eine Fülle von Übungsaufgaben angeboten. Sie soll ihn in die Lage versetzen, seine Kenntnisse und Fertigkeiten zu überprüfen und gegebenenfalls vorhandene Lücken aufzufüllen.

1.2.2 Das Rechnen mit Klammerausdrücken

Beim Rechnen mit Klammern kommen zwei einander entgegengesetzte Aufgabenstellungen vor: Vorhandene Klammern sollen „aufgelöst“ werden, bzw. umfangreichere Ausdrücke sollen „in Klammern eingeschlossen“ werden.

Für die **Addition und Subtraktion** von Klammerausdrücken gilt die Regel:

> Steht vor einem Klammerausdruck ein Pluszeichen, so darf das zugehörige Klammerpaar einfach weggelassen werden. Steht jedoch ein Minuszeichen vor dem Klammerausdruck, dann müssen beim Weglassen der Klammern alle innerhalb der Klammer auftretenden Vorzeichen und Rechenzeichen der ersten Stufe umgekehrt werden.

Beispiel:

1.12 $x - \{y + 3z - [-2x + (3x - 4y) + y]\} + 4y =$ Auflösen der runden Klammern
$= x - \{y + 3z - [-2x + 3x - 4y + y]\} + 4y$ Zusammenfassen
$= x - \{y + 3z - [x - 3y]\} + 4y$ Auflösen der eckigen Klammern
$= x - \{y + 3z - x + 3y\} + 4y$ Zusammenfassen
$= x - \{4y - x + 3z\} + 4y$ Auflösen der geschweiften Klammern
$= x - 4y + x - 3z + 4y$ Zusammenfassen
$= 2x - 3z$
Die vorhandenen drei Klammerpaare wurden hier schrittweise „von innen nach außen" aufgelöst. Es wäre genau so gut möglich gewesen, die Klammern von „außen nach innen" zu beseitigen. Führen Sie diesen Lösungsweg zur Kontrolle selbstständig durch! Durch ständiges Üben kann man es erreichen, dass nicht mehr alle Zwischenschritte aufgeschrieben werden müssen.

Bei der **Multiplikation von Klammerausdrücken** ist jedes Glied der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer zu multiplizieren.

Beispiele:

1.13 $(3u - 2v)(4u + 5v) =$
$= 12u^2 + 15uv - 8uv - 10v^2$ Gleichartige Glieder zusammenfassen!
$= 12u^2 + 7uv - 10v^2$

1.14 $(2a + 3b - 1)(2a - 3b + 2) = 4a^2 - 6ab + 4a + 6ab - 9b^2 + 6b - 2a + 3b - 2$
$= 4a^2 - 9b^2 + 2a + 9b - 2$

Auf diese Weise können auch Quadrate und höhere Potenzen von *Binomen* berechnet werden. So ist

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \tag{1.1}$$

Entsprechend ergeben sich die Formeln

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \tag{1.2}$$

und

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \tag{1.3}$$

Für $(a + b)^3$ und $(a - b)^3$ erhält man

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \tag{1.4}$$

und

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \tag{1.5}$$

Bildet man weitere Potenzen von $a + b$, und schreibt man alle in der folgenden Weise untereinander, so führt dies zu den **binomischen Formeln**:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \mathbf{1}\\
(a+b)^1 &= \mathbf{1}a + \mathbf{1}b\\
(a+b)^2 &= \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2\\
(a+b)^3 &= \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3\\
(a+b)^4 &= \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4\\
(a+b)^5 &= \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5\\
(a+b)^6 &= \mathbf{1}a^6 + \mathbf{6}a^5b + \mathbf{15}a^4b^2 + \mathbf{20}a^3b^3 + \mathbf{15}a^2b^4 + \mathbf{6}ab^5 + \mathbf{1}b^6\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Die Formeln für $(a - b)^n$ mit $n \in \mathbf{N}$ sind völlig analog aufgebaut. Sie unterscheiden sich von den Formeln für $(a + b)^n$ nur darin, dass alle Glieder mit *ungeraden Exponenten* bei b mit einem *Minuszeichen* versehen sind.

Bei den Formeln für $(a \pm b)^n$ mit $n \in \mathbf{N}$ lassen sich folgende Gesetzmäßigkeiten erkennen:

- Die Formel für $(a \pm b)^n$ enthält $n + 1$ Glieder. Jedes Glied ist ein Produkt aus einer Potenz von a und einer Potenz von b.
- Diese Glieder beginnen mit der Potenz $a^n b^0$. Bei den folgenden Gliedern nimmt der Exponent von a jeweils um 1 ab. Dafür wird der Exponent von b jeweils um 1 größer, bis $a^0 b^n$ erreicht ist. Die Summe der Exponenten von a und b ist bei jedem Glied stets gleich n.
- Jedes Glied ist mit einem Koeffizienten dem *Binomialkoeffiziente* , versehen. Diese Binomialkoeffiziente sind bei nach fallenden Potenzen von a angeordneten Gliedern symmetrisch angeordnet.
- Die Binomialkoeffiziente lassen sich mithilfe des nach dem französischen Mathematiker Blaise PASCAL (1623–1662) benannten PASCALschen Dreiecks berechnen.

PASCALsches Dreieck:

$$\begin{array}{l ccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array} \tag{1.6}$$

usw.

Beispiele:

1.15 **a)** $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$
c) $(2x+3y)(2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

1.16 Die „dritte binomische Formel“$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ gestattet es, manche Zahlenrechnungen sehr schnell auszuführen, ohne dass man den Taschenrechner zur Hilfe nehmen muss. So ist

$$\begin{aligned} 64 \cdot 76 &= (70-6)(70+6) \\ &= 4\,900 - 36 \\ &= 4\,864 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} 0{,}87 \cdot 1{,}13 &= (1-0{,}13)(1+0{,}13) \\ &= 1{,}000\,0 - 0{,}0169 \\ &= 0{,}983\,1 \end{aligned}$$

1.17
$$\begin{aligned} (4x^2-3)^3 &= (4x^2)^3 - 3(4x^2)^2 \cdot 3 + 3(4x^2) \cdot 3^2 - 3^3 \\ &= 64x^6 - 3 \cdot 16x^4 \cdot 3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 9 - 27 \\ &= 64x^6 - 144x^4 + 108x^2 - 27 \end{aligned}$$

1.18 $(1-k^2)^5 = 1^5 - 5 \cdot 1^4k^2 + 10 \cdot 1^3k^4 - 10 \cdot 1^2k^6 + 5 \cdot 1^1k^8 - k^{10}$

Beim Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken werden Produkte in Summen umgewandelt. Dies ist dann vorteilhaft, wenn sich dadurch gleichartige Glieder zusammenfassen lassen. In der Bruchrechnung tritt jedoch das entgegengesetzte Problem auf: Brüche lassen sich „kürzen“, wenn im Zähler und Nenner *gemeinsame Faktoren* auftreten. Treten also im Zähler und im Nenner eines Bruches Summen auf, so wird es günstig sein, wenn man diese Summen durch *„Ausklammern gemeinsamer Faktoren“* in Produkte zerlegen kann.

Beispiele:

1.19 Die Ausdrücke
a) $10x - 15y$ **b)** $7 + 21a$ **c)** $4u^4 - 4u^2$ **d)** $36x^2y^3 + 48x^3y^2$
sollen in Faktoren zerlegt werden.

Lösungen:
a) $10x - 15y = 5 \cdot 2x - 5 \cdot 3y = 5(2x-3y)$
b) $7 + 21a = 7 \cdot 1 + 7 \cdot 3a = 7(1+3a)$
c) $4u^4 - 4u^2 = 4u^2(u^2-1) = 4u^2(u+1)(u-1)$
3. binomische Formel beachten!
d)
$$\begin{aligned} 36x^2y^3 + 48x^3y^2 &= 12x^2y^2 \cdot 3y + 12x^2y^2 \cdot 4x \\ &= 12x^2y^2(3y+4x) \end{aligned}$$

1.20 Die Ausdrücke
a) $p^2 + 2pq + q^2$ **b)** $4x^2 + 12xy + 9y^2$
c) $z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ **d)** $225u^4 - 121v^2$
e) $x^3 - 4x^2 + x - 4$

sollen in Produkte umgeformt werden.

Lösungen:
a) $p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2$ (Binomische Formel!)
b) Auch in $4x^2 + 12xy + 9y^2$ ist eine binomische Formel enthalten:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x+3y)^2$$