EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Matrizen und Determinanten, Lineare Gleichungssysteme, Vektorrechnung, Analytische Geometrie

von

Regina Gellrich
Carsten Gellrich

3., korrigierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56009

Mathematik – Ein Lehr- und Übungsbuch

Band 1: Gellrich/Gellrich;
Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Band 2: Gellrich/Gellrich;
Lineare Algebra, Vektorrechnung, Analytische Geometrie

Band 3: Gellrich/Gellrich;
Zahlenfolgen und -reihen, Einführung in die Analysis
für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

3., korrigierte Auflage 2016

Druck 5 4 3 2

ISBN 978-3-8085-5601-6

Unter Verwendung vorzugsweise der Aufgaben des Werkes
Schalk, Mathematik für Höhere Technische Lehranstalten
mit Genehmigung des RENIETS VERLAG GmbH, Wien.
Für die diesem Werk entnommenen Teile:

https://www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09212 Limbach-Oberfrohna
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

Vorwort

Die Reihe „Mathematik – Ein Lehr- und Übungsbuch“ wurde mit dem Ziel konzipiert, Studierenden und Praktikern auf gut verständliche Weise und anhand zahlreicher durchgerechneter Beispiele und Übungsaufgaben mathematisches Handwerkszeug zu vermitteln, um die im jeweiligen Fachgebiet anstehenden Probleme und Aufgaben lösen zu können.

Der – in der vorliegenden Neuauflage überarbeitete – Band 2 knüpft dabei an Teilgebiete der Mathematik an, die der Leser bereits während seiner Schulzeit kennen gelernt hat: Er widmet sich Verfahren und Methoden der linearen Algebra und Geometrie. Sie sind heute eine unverzichtbare Grundlage für die mathematische Modellierung vielfältiger technischer, ökonomischer und anderer Aufgabenstellungen sowie deren Bearbeitung mithilfe der Computertechnik.

Die ersten beiden Kapitel beschäftigen sich ausführlich mit der Lösung linearer Gleichungssysteme. Dazu werden die zunächst recht abstrakt anmutenden Begriffe der Matrizen und Determinanten eingeführt, die vor allem nutzbringend angewendet werden, um herkömmliche Lösungsverfahren zu formalisieren und der Algorithmierung zugänglich zu machen. Ein besonderer Schwerpunkt wird in diesem Kontext auf den GAUSS’schen Algorithmus gelegt, der als universell einsetzbares Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen eine wesentliche Grundlage für Computersimulationen, u. a. von Prozessen im Bereich der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften sowie in der Bildverarbeitung, bildet.

Die beiden folgenden Kapitel stellen die Verbindung zur Geometrie her. Dazu erfolgt eine Einführung in die Vektorrechnung, mit deren Hilfe es möglich wird, auch mehrdimensionale geometrische Probleme mit algebraischen Methoden, und damit wesentlich genauer als auf konstruktivem Wege, zu lösen. Das Handwerkszeug dafür liefert die analytische Geometrie, die abschließend ausführlich behandelt wird.

Im Aufbau und in der Darstellungsweise folgt der vorliegende Band 2 der bewährten Konzeption der Buchreihe: Der Lehrstoff wird anhand methodisch sorgfältig ausgewählter und anschaulicher Fragestellungen entwickelt, wobei an theoretischen Grundlagen nur das geboten wird, was für das Verständnis unmittelbar erforderlich ist. Viele ausführlich kommentierte Beispiele und zahlreiche Übungsaufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zusammengefasst sind, ermöglichen es den Lernenden, sich das für ihren Beruf erforderliche mathematische Rüstzeug anzueignen und im Selbststudium zu vertiefen.

Den Lesern des Buches wünschen wir eine gewinnbringende und freudvolle Lektüre, die ihnen hilft, tiefer in die Geheimnisse der Mathematik einzudringen und die unerschöpflichen Möglichkeiten ihrer praktischen Anwendung schätzen und nutzen zu lernen.

Regina und Carsten Gellrich

Fragen, Kommentare und Anregungen an:

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
https://www.europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

1 Matrizen und Determinanten

1.1 Begriffe und Symbole

1.1.1 Matrizen

Einführendes Beispiel:

1.1 Fritz aus Fritzendorf und Paul aus Paulshausen sind zwei begeisterte Wanderer. Eines Tages laufen sich die zwei auf einem 14 km langen Wanderweg von Fritzendorf nach Paulshausen entgegen. Fritz geht eine Stunde früher los als Paul. Sie treffen sich eine Stunde, nachdem Paul von zu Hause aufgebrochen ist.

Eine Woche später wählen sie einen anderen Weg, der 20 km lang ist. Sie starten zur gleichen Zeit und treffen sich nach zwei Stunden.

Nun möchten sie wissen, wie schnell jeder von ihnen wandert. Dazu ordnen sie ihre Wanderzeiten und die Wegstrecken in einer Tabelle an: In zwei Zeilen schreiben sie die Werte je eines Wandertages. Die Wanderzeiten von Fritz erscheinen in Spalte 1, Pauls in Spalte 2. Schließlich werden die Wegstrecken in eine dritte Spalte eingetragen. So ergibt sich die folgende Tabelle:

	Fritz	Paul	Strecke
1. Tag	2 h	1 h	14 km
2. Tag	2 h	2 h	20 km

Die Bestimmung der Geschwindigkeit der beiden Wanderer führt im weiteren auf ein lineares Gleichungssystem, auf das erst an späterer Stelle wieder eingegangen werden soll.

Im soeben betrachteten Beispiel wurden in Vorbereitung der Lösung der gestellten Aufgabe zunächst alle zur Verfügung stehenden Werte in einer Tabelle geordnet. Jede Zeile und jede Spalte dieser Anordnung hat ihre spezielle Bedeutung. Lässt man den Tabellenkopf und die erste Spalte mit den Tagesbezeichnungen weg, so bleibt ein rechteckiges Schema übrig, in dem die gegebenen Werte angeordnet sind. Eine solche Anordnung bezeichnet man in der Mathematik auch als eine *Matrix*.

Bevor dieser Begriff genauer erklärt wird, sollen einige Beispiele für Matrizen angegeben werden.

Beispiel:

1.2 Wie bereits erwähnt, ergibt sich eine Matrix aus den im Beispiel 1.1 gegebenen Werten durch Weglassen der Kopfzeile und ersten Spalte der Tabelle. Bezeichnet man die von den Wanderern aufgestellte Matrix mit $\boldsymbol{W}$, so lautet diese

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{h} & 1\,\mathrm{h} & 14\,\mathrm{km} \\ 2\,\mathrm{h} & 2\,\mathrm{h} & 20\,\mathrm{km} \end{pmatrix}.$$

Die Klammern links und rechts zeigen an, dass die eingeschlossenen Zahlen zur Matrix gehören und sind deshalb Bestandteil der Matrix.

In den meisten Anwendungen lässt man auch die Einheiten aus der aufgestellten Matrix heraus. Dann hat die Matrix $\boldsymbol{W}$ folgendes Aussehen:

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 14 \\ 2 & 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

Die in der Matrix $\boldsymbol{W}$ angeordneten reellen Zahlen bezeichnet man als **Elemente** der Matrix. Alle Elemente einer Matrix müssen einer gemeinsamen Grundmenge angehören. Diese Menge muss nicht unbedingt der Bereich der reellen Zahlen $\mathbf{R}$ sein, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiele:

1.3 Zur Menge der Spielkartenfarben gehören $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$ und $\clubsuit$. Diese können zum Beispiel als Matrix

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \diamondsuit & \heartsuit \\ \spadesuit & \clubsuit \end{pmatrix}$$

angeordnet werden. Die erste Zeile enthält die roten Farben, die zweite die schwarzen.

1.4 Aus der Menge der Automobilmarken kann man einige auswählen und die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \text{VW} & \text{Renault} \\ \text{Mercedes} & \text{Citroën} \\ \text{BMW} & \text{Peugeot} \end{pmatrix}$$

bilden. Die jeweils in einer Spalte genannten Firmen haben ihren Sitz im selben Land.

1.5 Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{M}$ sind wiederum reelle Zahlen.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7.1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2.4 \end{pmatrix}.$$

Nun soll der Begriff der Matrix allgemein definiert werden.

> **Definition**
>
> Als **Matrix** bezeichnet man eine rechteckige Anordnung von Elementen einer bestimmten Grundmenge.
>
> Dieses Schema wird beidseitig durch Klammern begrenzt.

Matrizen sollen im Weiteren durch fettgedruckte Großbuchstaben bezeichnet werden. Auch andere Schreibweisen sind üblich. Vielfach werden diese Buchstaben auch unterstrichen, z. B. $\underline{\boldsymbol{A}}$. Auch deutsche Frakturbuchstaben sind möglich, werden aber in der letzten Zeit, in der sich viele Bezeichnungen am internationalen Standard orientieren, kaum noch verwendet.

Wozu werden Matrizen gebraucht? Von wem wurden solche Strukturen entwickelt?

Hält man es mit dem deutschen Mathematiker Leopold KRONECKER (1823–1891), der zu den Grundlagen der Mathematik meinte:

„Die ganzen Zahlen hat Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.“,

so müssen die Matrizen also von Menschen erdacht worden sein. Der Grund dafür ist, dass sich größere Probleme, bei denen sehr viele Zahlen verarbeitet werden müssen, mithilfe der Matrizenrechnung übersichtlicher beschreiben und standardisiert lösen lassen. Die Formulierung von Aufgaben in Matrizenschreibweise ist also ein Ordnungsprinzip, um die Lösungsverfahren besser algorithmieren zu können.

Anwendungen der Matrizenrechnung sind in fast allen Bereichen der Technik und Ökonomie zu finden. Dazu gehören Berechnungen der Statik und Dynamik von Bauwerken und Maschinen oder die Bilanzierung von Ein- und Ausgängen von Warenströmen in einem Unternehmen. Die Formulierung solcher Problemstellungen in Matrizenschreibweise hat sich im Zuge der Entwicklung leistungsfähiger Rechentechnik stark verbreitet. Alle höheren Programmiersprachen enthalten heute Matrizen- und Vektorstrukturen (Felder), ohne die eine übersichtliche Bearbeitung großer Aufgaben gar nicht möglich ist.

Im vorliegenden Buch wird die Matrizenschreibweise besonders bei der Lösung linearer Gleichungssysteme (Kapitel 2) verwendet.

Im Weiteren sollen nur noch *Matrizen* (Mehrzahl von Matrix) mit reellen Zahlen als Elemente betrachtet werden. Matrizen der in den Beispielen 1.3 und 1.4 angegebenen Art spielen in der linearen Algebra keine Rolle.

Die *nebeneinander* angeordneten Elemente bilden die **Zeilen** der Matrix, *untereinander* stehende Elemente die **Spalten**.

Beispiele:

1.6 Die erste Zeile der Matrix $\boldsymbol{M}$ aus Beispiel 1.5 lautet

$$2 \quad 3 \quad 7.1 \quad 3.$$

Die dritte Spalte enthält die Einträge:

$$\begin{matrix} 7.1 \\ 5 \\ 2. \end{matrix}$$

1.7 Die Matrizen $\boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{F}$ besitzen zwei Zeilen, während $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{M}$ aus drei Zeilen bestehen.

Die Spaltenzahl von $\boldsymbol{F}$ ist zwei, $\boldsymbol{W}$ besitzt drei und $\boldsymbol{M}$ vier Spalten.

Eine *allgemeine Matrix* reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten schreibt man wie folgt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Die Elemente a_{ij} der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind reelle Zahlen. Der erste Index i gibt die Zeilennummer des Elementes an und kann Werte von 1 bis m annehmen. Der zweite Index j bezeichnet die Nummer der Spalte, in der a_{ij} steht, und liegt zwischen 1 und n. Unter Verwendung des Symbols **R** für den Bereich der reellen Zahlen lässt sich dieser Sachverhalt auch kürzer formulieren:

$$a_{ij} \in \mathbf{R} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

An dieser Schreibweise ist schon die gute Algorithmierbarkeit von Operationen mit Matrizen zu erkennen. Ein Rechnerprogramm, das die Elemente einer $(m \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ zeilenweise einliest und ausdruckt, kann z. B. durch folgenden Algorithmus realisiert werden:

Algorithmus A1: Einlesen und Ausdrucken einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$

```
var m,n : integer;
    A   : array[1..m, 1..n] of real;

    ⋮

for i := 1 to m do
  begin {i-Schleife}
  for j := 1 to n do
    begin {j-Schleife}
    read(A[i,j]);
    write(A[i,j]);
    end; {j-Schleife}
  writeln;
  end; {i-Schleife}
```

Durch die Anzahl der Zeilen und Spalten einer Matrix wird ihr *Typ* bestimmt:

- Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ mit m Zeilen und n Spalten heißt **Matrix vom Typ** (m,n).

In Analogie zur in (1.2) verwendeten Schreibweise kann auch hier kürzer formuliert werden:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m \times n} \tag{1.3}$$

Das Symbol $\mathbf{R}^{m \times n}$ steht dabei für die Menge der Matrizen mit m Zeilen und n Spalten reeller Elemente [1)].

Gebräuchlich ist weiterhin die folgende Formulierung:

- $\boldsymbol{A}$ ist eine reelle $(m \times n)$-Matrix.

Stimmen Zeilenzahl m und Spaltenzahl n einer Matrix überein $(m = n)$, so spricht man von einer **quadratischen Matrix**.

Beispiel:

1.8 Die Matrix $\boldsymbol{W}$ aus Beispiel 1.2 ist eine (2×3)-Matrix, da sie zwei Zeilen und drei Spalten besitzt.

[1)] Neben den reellen $(m \times n)$-Matrizen sind in vielen mathematischen Problemen Matrizen mit *komplexen* Elementen der Menge $\boldsymbol{C}^{m \times n}$ von Bedeutung.

Die Matrix $\boldsymbol{F}$ der Spielkartenfarben hat zwei Zeilen und zwei Spalten und ist damit eine quadratische (2×2)-Matrix.

$\boldsymbol{A}$ aus Beispiel 1.4 ist vom Typ (3,2) und für $\boldsymbol{M}$ gilt: $\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{3 \times 4}$.

Ist $\boldsymbol{A}$ eine quadratische $(n \times n)$-Matrix, so bilden die $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ die **Hauptdiagonale** der Matrix [1].

Beispiele:

1.9 In der Matrix

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \underline{4} & -3 & 1 \\ 2 & \underline{5} & 0 \\ -2 & 1 & \underline{2} \end{pmatrix}$$

wird die Hauptdiagonale durch die unterstrichenen Elemente 4, 5 und 2 gebildet.

1.10 Die in Beispiel 1.5 angegebene Matrix $\boldsymbol{M}$ besitzt *keine* Hauptdiagonale, obwohl es auch hier die Elemente a_{11} bis a_{33} gibt. Da aber $\boldsymbol{M}$ nicht quadratisch ist, wird der Begriff der Hauptdiagonalen in diesem Fall nicht verwendet.

1.1.2 Zeilen- und Spaltenvektoren

Matrizen, die nur *eine Zeile* besitzen, bezeichnet man als **Zeilenvektor**. Analog heißt eine Matrix mit nur einer Spalte **Spaltenvektor**.

Beispiele:

1.11 Die (1×5)-Matrix

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ist ein Zeilenvektor mit 5 Elementen ($\boldsymbol{V} \in \mathbf{R}^{1 \times 5}$).

1.12 Die Matrix $\boldsymbol{W} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$, die aus der Spalte

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

besteht, bezeichnet man als Spaltenvektor.

Da Vektoren nur eine Zeile bzw. eine Spalte besitzen, ist der dazugehörige Index nicht mehr notwendig und kann weggelassen werden. Die Elemente eines Zeilen- oder Spaltenvektors besitzen damit nur noch einen Index, der ihre Position innerhalb des Vektors angibt. Da Vektoren unter den Matrizen eine besondere Bedeutung besitzen, sollen sie zur Unterscheidung von diesen mit *fettgedruckten Kleinbuchstaben* bezeichnet werden. So kann die einzeilige Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

[1] Eine Hauptdiagonale gibt es nur bei quadratischen Matrizen. Stimmt Zeilen- und Spaltenzahl einer Matrix nicht überein, wird dieser Begriff nicht verwendet.

auch als Zeilenvektor mit Elementen ohne Zeilenindex geschrieben werden:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ist auch für die einspaltige Matrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

die Formulierung als Spaltenvektor möglich:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Es wird sich in den weiteren Kapiteln dieses Buches zeigen, dass Spaltenvektoren wesentlich häufiger auftreten als Zeilenvektoren. Es ist deshalb gebräuchlich, nur von einem *Vektor* zu sprechen, wenn man einen Spaltenvektor meint. Ein Zeilenvektor dagegen wird immer mit seinem vollständigen Namen bezeichnet.

Um einen Spaltenvektor **a** zu kennzeichnen, kann die in (1.3) eingeführte Schreibweise verwendet werden:

$$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^{n \times 1}.$$

Wegen der eigenständigen Bedeutung der Vektoren lässt man meist den Index 1 weg und schreibt stattdessen nur

$$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^{n}.$$

Das Symbol $\mathbf{R}^n$ bezeichnet dabei die Menge der Spaltenvektoren mit n Elementen. Es hat nichts mit einer Potenz von reellen Zahlen zu tun. Da diese Menge weitere mathematische Eigenschaften besitzt, spricht man auch vom *Raum* $\mathbf{R}^n$. Unterschieden werden muss allerdings zur Menge der Zeilenvektoren, die weiterhin mit $\mathbf{R}^{1 \times n}$ bezeichnet wird.

Vektoren mit zwei bzw. drei Elementen kann man geometrisch veranschaulichen (siehe Kapitel 3). Der Raum $\mathbf{R}^2$ stellt geometrisch eine Ebene dar, in die ein Koordinatensystem gelegt wurde.

Bezeichnet man die Koordinatenrichtungen mit x und y, so stellen die Elemente (Kordinaten) a_1 und a_2 des Vektors

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

dessen Koordinaten in x- und y-Richtung dar (Bild 1.1).

Beispiel:

1.13 Der Vektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ lässt sich in der x-y-Ebene wie in Bild 1.2 eingezeichnet darstellen.

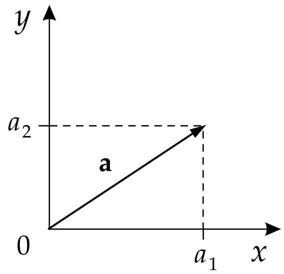

Bild 1.1

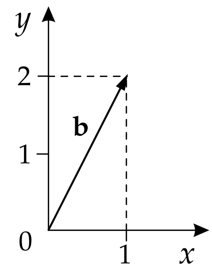

Bild 1.2

Analoges gilt für den dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$. Hier bezeichnen die Koordinaten des Vektors

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

die Komponenten in den Koordinatenrichtungen x, y, und z.

Für größere Dimensionen ist eine geometrische Vorstellung kaum noch möglich. Der Leser sollte jedoch im Verlauf des weiteren Studiums der linearen Algebra versuchen, sich die dargestellten Zusammenhänge stets an Beispielen in der Ebene $\mathbf{R}^2$ und im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$ zu veranschaulichen. Dazu ist besonders das Studium des Kapitels über Vektorrechnung zu empfehlen.

Aufgaben:

1.1 Gegeben sind folgende Matrizen und Vektoren:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 11 & -10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -3.1 & -1.2 & 2.6 & 3.1 & -4.7 \\ 0.9 & 3.5 & 2.5 & -1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2.1 & -2.1 \\ 0.5 & 3.0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ -1.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 & 2.4 & 4.2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Typ dieser Matrizen und Vektoren!
b) Welche Matrizen sind quadratisch?

1.2 Geben Sie die folgenden Elemente der Matrizen aus Aufgabe 1.1 an!

a) b_{22} aus $\boldsymbol{B}$ **b)** c_{24} aus $\boldsymbol{C}$
c) f_{23} aus $\boldsymbol{F}$ **d)** g_{32} aus $\boldsymbol{G}$
e) h_{11} aus $\boldsymbol{H}$ **f)** k_{33} aus $\boldsymbol{K}$

1.3 Bestimmen Sie von den in Aufgabe 1.1 gegebenen Matrizen

a) die 2. Zeile von $\boldsymbol{A}$
b) die 3. Spalte von $\boldsymbol{C}$
c) die Hauptdiagonale von $\boldsymbol{G}$
d) die Hauptdiagonale von $\boldsymbol{E}$
e) die 2. Spalte von $\boldsymbol{K}$
f) die 1. Zeile von $\boldsymbol{D}$

1.2 Matrizenoperationen

Im Abschnitt 1.1.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Matrizenschreibweise im Wesentlichen ein standardisiertes Ordnungsprinzip für praktische Aufgabenstellungen darstellt. Dementsprechend müssen auch die Operationen mit Matrizen so festgelegt werden, dass sie für die Lösung dieser Aufgaben sinnvoll sind.

1.2.1 Gleichheit

Für die Festlegung der folgenden Operationen muss zunächst geklärt werden, wann Matrizen *gleich* sind.

> Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ heißen **gleich**, wenn sie vom gleichen Typ sind und ihre Elemente an gleichen Positionen übereinstimmen.

Symbolisch lässt sich dies wie folgt formulieren:

Die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sind genau dann gleich, wenn gilt:

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{m \times n} \text{ und } a_{ij} = b_{ij} \text{ für } i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

Beispiele:

1.14 Die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sind gleich, da beide (2×3)-Matrizen sind und die Elemente an allen Positionen übereinstimmen:

$$a_{11} = b_{11} = 1, \quad a_{12} = b_{12} = 2, \quad a_{13} = b_{13} = 1, \quad \ldots$$

1.15 Dagegen sind die zwei Matrizen

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht gleich, da sie unterschiedliche Typen besitzen.

1.16 Ebenfalls ungleich sind die Matrizen

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sie besitzen zwar den gleichen Typ (2,3), das Element $e_{11} = 1$ stimmt jedoch nicht mit $f_{11} = 2$ überein.

1.2.2 Addition und Subtraktion

Matrizen können addiert und subtrahiert werden, wenn sie die gleiche Zeilen- und Spaltenzahl besitzen.

> Zwei Matrizen *von gleichem Typ* werden addiert, indem die Elemente an gleichen Positionen addiert werden. Die entstehende Matrix heißt **Summe** und ist vom gleichen Typ wie die zu summierenden Matrizen.

Symbolisch kann die Addition zweier Matrizen gleichen Typs folgendermaßen erklärt werden:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

1.17 Die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

haben beide zwei Spalten und drei Zeilen und können daher addiert werden. Die Elemente der Summe

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

werden durch Addition der Elemente mit gleichem Zeilen- und Spaltenindex aus $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ berechnet.

$g_{11} = a_{11} + b_{11} = 2,\ g_{12} = a_{12} + b_{12} = 4,\ \ldots$

Somit ergibt sich als Ergebnis

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.18 Die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

können dagegen nicht addiert werden, da sie unterschiedliche Typen besitzen. Mit welchen Zahlen sollte man auch die dritte Spalte von $\boldsymbol{C}$ summieren?

1.19 Es sollen die Matrizen

$$H = \begin{pmatrix} 1.1 & 3.2 \\ 2.3 & 4.4 \\ 1.5 & 5.6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 2.0 & 2.9 \\ 1.8 & 2.7 \\ 0.0 & 8.1 \end{pmatrix}$$

addiert werden.

Lösung:

Die Summierung ist möglich, da beide Matrizen aus 3 Zeilen und 2 Spalten bestehen. Das Ergebnis lautet

$$H + J = \begin{pmatrix} 3.1 & 6.1 \\ 4.1 & 7.1 \\ 1.5 & 13.7 \end{pmatrix}.$$

Auch die Algorithmierung der Addition ist durch zwei Schleifen leicht möglich.

Algorithmus A2: Matrizenaddition $\boldsymbol{C = A + B, A, B, C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$

```
var m,n   : integer;
    A,B,C : array[1..m, 1..n] of real;

    ⋮

for i := 1 to m do
  begin {i-Schleife}
  for j := 1 to n do
    C[i,j] := A[i,j] + B[i,j];
  end; {i-Schleife}
```

Die Addition von Matrizen ist *kommutativ* und *assoziativ*, d. h., Summanden können vertauscht werden, und die Reihenfolge, in der mehr als zwei Matrizen addiert werden, ist beliebig.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \end{aligned}$$

Die *Subtraktion* zweier Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl erfolgt analog der Addition.

> Zwei Matrizen *von gleichem Typ* werden subtrahiert, indem die Elemente an gleichen Positionen subtrahiert werden. Die entstehende Matrix heißt **Differenz** und ist vom gleichen Typ wie die zu subtrahierenden Matrizen.

Elementeweise geschrieben wird die Differenz wie folgt gebildet:

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & a_{m3} - b_{m3} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Bei der Subtraktion dürfen die beiden Matrizen selbstverständlich nicht vertauscht werden.

Beispiele:

1.20 Die Differenz der Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ aus Beispiel 1.17 kann bestimmt werden, da beide Matrizen gleichen Typs sind. Da $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gleich sind, enthält die Differenz nur Nullen.

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.21 Die Matrizen $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ aus Beispiel 1.18 können auf Grund ihrer unterschiedlichen Typen *nicht subtrahiert* werden.

1.22 Die Subtraktion von $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{H}$ aus Beispiel 1.19 ergibt

$$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.3 \\ 0.5 & 1.7 \\ 1.5 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix, die nur Nullen enthält, wie sie als Ergebnis in Beispiel 1.20 entstand, wird **Nullmatrix** ($\mathbf{0}$) genannt. Da Matrizen unterschiedliche Zeilen- und Spaltenzahlen haben, gibt es auch Nullmatrizen unterschiedlicher Typen.

Die Addition einer beliebigen Matrix mit einer Nullmatrix gleichen Typs führt wieder auf die Ausgangsmatrix.

$$\boldsymbol{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

Aufgaben:

1.4 **a)** Welche Paare von Matrizen und Vektoren aus der Aufgabe 1.1 (s. Seite 15) können addiert und subtrahiert werden?

b) Berechnen Sie die jeweiligen Summen und Differenzen!

1.5 Bilden Sie mit den Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die folgenden Summen und Differenzen, sofern dies möglich ist:

a) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$	**b)** $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$	**c)** $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$
d) $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$	**e)** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$	**f)** $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$
g) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$	**h)** $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$	**i)** $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}$
j) $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$	**k)** $\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$	**l)** $\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D})$

1.2.3 Multiplikation

Eine Matrix kann mit einer reellen Zahl oder mit einer anderen Matrix multipliziert werden.

> Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ wird mit einer *reellen Zahl* α multipliziert, indem *jedes Element der Matrix* $\boldsymbol{A}$ mit α multipliziert wird.

$$\alpha \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

1.23 Die Matrix $\boldsymbol{A}$ aus Beispiel 1.17 soll mit dem Faktor 3 multipliziert werden.

Lösung:

Analog der Vorschrift zur Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl ergibt sich

$$\boldsymbol{K} = 3 \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.24 Es ist die Matrix $\boldsymbol{H}$ aus Beispiel 1.19 mit dem Faktor -1.5 zu multiplizieren.

Lösung:

Multipliziert man jedes Element von $\boldsymbol{H}$ mit dem angegebenen Faktor, so erhält man

$$\boldsymbol{L} = -1.5 \cdot \boldsymbol{H} = -1.5 \cdot \begin{pmatrix} 1.1 & 3.2 \\ 2.3 & 4.4 \\ 1.5 & 5.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.65 & -4.8 \\ -3.45 & -6.6 \\ -2.25 & -8.4 \end{pmatrix}.$$

Die *Multiplikation zweier Matrizen* gehört zu den grundlegenden Operationen der Matrizenrechnung. Zu ihrer Einführung soll noch einmal das Beispiel 1.1 herangezogen werden.

Beispiel:

1.25 Fritz und Paul versuchen nun, ihre durchschnittliche Wandergeschwindigkeit v_{F} und v_{P} zu bestimmen. Aus den aufgenommenen Werten und den aus der Physik bekannten Zusammenhängen über Weg, Zeit und Geschwindigkeit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{h} \cdot v_{\mathrm{F}} + 1\,\mathrm{h} \cdot v_{\mathrm{P}} &= 14\,\mathrm{km} \\ 2\,\mathrm{h} \cdot v_{\mathrm{F}} + 2\,\mathrm{h} \cdot v_{\mathrm{P}} &= 20\,\mathrm{km}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die Einheit für die gesuchten Größen v_{F} und v_{P} ist damit km/h. Im Weiteren werden die Einheiten weggelassen.

Die Gleichungen (1.5) stellen ein lineares Gleichungssystem dar. An dieser Stelle geht es jedoch nicht um die Lösung des Systems, sondern um seine Formulierung in Matrizenschreibweise und um eine daraus abzuleitende *sinnvolle* Vorschrift für die Multiplikation von Matrizen.