L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Band I

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:
Mechanik
unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2022, 231 Seiten, 56 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5612-2

Band 2:
Klassische Feldtheorie
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2022, 496 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5562-0

Band 3:
Quantenmechanik
unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2021, 660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5636-8

Band 4:
Quantenelektrodynamik
unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2020, 628 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5632-0

Band 5:
Statistische Physik Teil 1
unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2016, 535 Seiten, 78 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5654-2

Band 6:
Hydrodynamik
korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2014, 705 Seiten, 136 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5554-5

Band 7:
Elastizitätstheorie
unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5498-2

Band 8:
Elektrodynamik der Kontinua
unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990, 2020, 565 Seiten, 65 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5500-2

Band 9:
Statistische Physik Teil 2
unveränderter Nachdruck der 4., berichtigten Auflage 1992, 2020, 404 Seiten, 18 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5656-6

Band 10:
Physikalische Kinetik
unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 1990, 2020, 480 Seiten, 35 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5624-5

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
L. D. Landau · E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der Theoretischen Physik**
ISBN 978-3-8085-5588-0

EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

L. D. Landau • E. M. Lifschitz

Mechanik

Mit 56 Abbildungen
und einem biographischen Artikel
von E. M. LIFSCHITZ
über LEW DAVIDOWITSCH LANDAU

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56122

Titel der Originalausgabe:
Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу
Механика

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1988

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. habil. Paul Ziesche (Dresden),
übersetzt aus dem Russischen von Doz. Dr. Hardwin Jungclaussen (Dresden).

Unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2022
Druck 6

ISBN 978-3-8085-5612-2

Umschlaggestaltung: Medienwerkstatt Dreimaster / www.3master.de, 63546 Hammersbach
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw (Polen)

VORWORT DES HERAUSGEBERS ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Das berühmte Lehrbuch der Theoretischen Physik von L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ umfaßt 10 Bände:

1. Mechanik,
2. Klassische Feldtheorie,
3. Quantenmechanik,
4. Quantenelektrodynamik,
5. Statistische Physik, Teil 1,
6. Hydrodynamik,
7. Elastizitätstheorie,
8. Elektrodynamik der Kontinua,
9. Statistische Physik, Teil 2,
10. Physikalische Kinetik.

Immer wieder ist diese umfassende und moderne Darstellung der Theoretischen Physik eine Fundgrube für den fortgeschrittenen Studenten und für den im Beruf tätigen und mit theoretisch-physikalischen Problemen konfrontierten Physiker. In diesem Band wird der traditionelle Stoff der klassischen Mechanik behandelt; er wird aber in Darstellung und Auswahl der Anwendungen mit Blick auf die moderne Physik dargeboten. Neben der allgemeinen Theorie (LAGRANGE- und HAMILTON-Formalismus) kommen Anwendungen auf wichtige konkrete und moderne Beispiele (KEPLER-Problem, Zerfall von Teilchen, Stoß und Streuung, RUTHERFORDsche Formel, Schwingungen von Molekülen, Resonanz, Kreisel) zur Sprache. Gebührenden Platz nehmen die Erhaltungssätze ein. Die Darstellung zeichnet sich durch physikalisch-anschauliche Argumentation bei gleichzeitiger Wahrung der formalen Strenge aus. Sehr wertvoll ist die Ergänzung durch Übungsaufgaben und Lösungen. Die Kontinuumsmechanik wird in Band 6 (Hydrodynamik) und 7 (Elastizitätstheorie) behandelt, die relativistische Mechanik in Band 2 (Feldtheorie).

Dieser neuesten deutschen Auflage liegt die vierte, verbesserte und ergänzte russische Auflage zu Grunde. Am Schluß findet sich ein biographischer Artikel aus der Feder von E. M. LIFSCHITZ, der Leben und Werk von L. D. LANDAU in kurzer Form darstellt und würdigt (er wurde von J. RICHTER, TH. NAUMANN und G. PAASCH übersetzt). Es folgt ein Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten von L. D. LANDAU. Diese biographische Ergänzung dürfte bei allen an Wissenschaftsgeschichte Interessierten besondere Aufmerksamkeit finden. Damit wird ein aufschlußreicher Einblick in das Wirken des Begründers einer weltbekannten Schule der Theoretischen Physik gegeben.

Die zwölfte deutsche Auflage der "Mechanik" war die erste Neuauflage eines LANDAU-LIFSCHITZ-Bandes nach dem Tod von Prof. E. M. LIFSCHITZ am 29. Oktober 1985. Die Jahre gemeinsamen Wirkens, seine ständige und freundliche Hilfe bei der Vorbereitung von deutschen Ausgaben dieses Lehrbuches bewahre ich in dankbarer Erinnerung. Sie sind mir Verpflichtung für die weitere Arbeit. – Druckfehler der dreizehnten Auflage wurden verbessert. Beim Korrekturlesen wurde ich dankenswerter Weise von Herrn G.-R. TILLACK unterstützt.

Dresden, Januar 1997 P. ZIESCHE

VORWORT ZUR VIERTEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Mit diesem Band beginnt der Verlag Nauka eine Neuherausgabe der "Theoretischen Physik" von L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ. Zum ersten Mal erfolgt die Herausgabe des Werkes nach dem Tode von E. M. LIFSCHITZ. Vor mir lag die traurige und verantwortungsvolle Aufgabe, den Kurs ohne die Autoren vorzubereiten.

In der vorliegenden Auflage der "Mechanik" wurden die Druckfehler ausgebessert, die nach dem Erscheinen der dritten Auflage gefunden wurden, sowie einige kleinere Änderungen vorgenommen, die die Darstellung präziser machen. Diese Korrekturen wurden von E. M. LIFSCHITZ und mir vorbereitet und bereits teilweise in der letzten englischen Auflage dieses Buches berücksichtigt.

Moskau, Mai 1987 L. P. PITAJEWSKI

VORWORT ZUR DRITTEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Die zweite Auflage dieses Buches unterschied sich fast nicht von der ersten. Auch bei der Vorbereitung der neuen Auflage ergab sich nicht die Notwendigkeit einer wesentlichen Überarbeitung. Daher wurde ein großer Teil des Buches auf photomechanischem Wege (lediglich unter Ausbesserung der Druckfehler) hergestellt. Nur die letzten, den adiabatischen Invarianten gewidmeten Paragraphen wurden von mir zusammen mit L. P. PITAJEWSKI überarbeitet und ergänzt.

Moskau, Juni 1972 E. M. LIFSCHITZ

INHALTSVERZEICHNIS

Hinweis auf Bezeichnungen:

Andere Autoren verwenden als Bezeichnung für
die potentielle Energie (hier U) den Buchstaben V,
den Drehimpuls (hier $\boldsymbol{M}$) den Buchstaben $\boldsymbol{L}$,
das Drehmoment (hier $\boldsymbol{K}$) den Buchstaben $\boldsymbol{D}$ oder $\boldsymbol{M}$.

Der Herausgeber

I BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

§ 1. Verallgemeinerte Koordinaten

Einer der Grundbegriffe der Mechanik ist der Begriff des *Massenpunktes*.[1]) Unter dieser Bezeichnung versteht man einen Körper, dessen Ausmaße man bei der Beschreibung seiner Bewegung vernachlässigen kann. Natürlich hängt die Möglichkeit einer solchen Vernachlässigung von den konkreten Bedingungen der Aufgabe ab. So kann man z. B. die Planeten als Massenpunkte annehmen, wenn man ihre Bewegung um die Sonne untersucht, dagegen freilich nicht, wenn man ihre tägliche Drehung betrachtet. Die Lage eines Massenpunktes im Raum wird durch seinen Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ beschrieben, dessen Komponenten mit den kartesischen Koordinaten x, y, z zusammenfallen. Die Ableitung von $\boldsymbol{r}$ nach der Zeit t

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

heißt *Geschwindigkeit*, die zweite Ableitung $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ *Beschleunigung* des Punktes. Im folgenden werden wir oft die Differentiation nach der Zeit wie üblich durch einen Punkt über dem Buchstaben bezeichnen: $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$.

Zur Bestimmung der Lage eines Systems von N Massenpunkten im Raum müssen N Radiusvektoren gegeben sein, d. h. $3\,N$ Koordinaten. Allgemein versteht man unter der Zahl der *Freiheitsgrade* eines Systems die Anzahl der unabhängigen Größen, deren Angabe für die eindeutige Bestimmung der Lage des Systems notwendig ist; im vorliegenden Falle ist diese Zahl gleich $3\,N$. Diese Größen müssen nicht unbedingt kartesische Koordinaten sein; je nach den Bedingungen der Aufgabe kann die Wahl anderer Koordinaten vorteilhafter sein. Wenn die Gesamtheit irgendwelcher Größen $q_1, q_2, \ldots, q_s$ die Lage eines Systems (mit s Freiheitsgraden) völlig charakterisiert, so nennt man diese Größen *verallgemeinerte Koordinaten* und die Ableitungen $\dot{q}_i$ *verallgemeinerte Geschwindigkeiten.*

Die Angabe der verallgemeinerten Koordinaten bestimmt jedoch noch nicht den „mechanischen Zustand“ eines Systems in einem gegebenen Zeitpunkt, d. h., sie gestattet noch nicht, die Lage des Systems in zukünftigen Zeitpunkten vorherzusagen. Bei gegebenen Koordinaten kann das System belie-

[1]) Statt „Massenpunkt“ werden wir oft „Teilchen“ sagen.

bige Geschwindigkeiten haben, und je nach Größe und Richtung von denselben wird die Lage des Systems im nächstfolgenden Zeitpunkt (d. h. nach einem unendlich kleinen Zeitintervall dt) verschieden sein.

Die gleichzeitige Angabe aller Koordinaten und Geschwindigkeiten bestimmt jedoch, wie die Erfahrung zeigt, den Zustand des Systems vollständig und erlaubt im Prinzip, die zukünftige Bewegung vorherzusagen. Das bedeutet vom mathematischen Standpunkt aus, daß durch die Angabe aller Koordinaten q und Geschwindigkeiten $\dot{q}$ zu irgendeinem Zeitpunkt auch die Größe der Beschleunigungen $\ddot{q}$ zu diesem Zeitpunkt eindeutig gegeben ist.[1])

Die Beziehungen, welche die Beschleunigungen mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten verknüpfen, heißen *Bewegungsgleichungen.* Diese Gleichungen sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktion $q(t)$. Ihre Integration erlaubt im Prinzip, die Funktion $q(t)$, d. h. die Bahngleichungen des mechanischen Systems, zu bestimmen.

§ 2. Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Die allgemeinste Formulierung des Bewegungsgesetzes mechanischer Systeme ist durch das sogenannte *Prinzip der kleinsten Wirkung* (oder HAMILTON*sches Prinzip*) gegeben. Nach diesem Prinzip ist jedes mechanische System durch eine bestimmte Funktion charakterisiert:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

oder in abgekürzter Schreibweise $L(q, \dot{q}, t)$. Die Bewegung des Systems ergibt sich daraus folgendermaßen:

Angenommen, in den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ nehme das System bestimmte Lagen ein, die durch zwei Koordinatenkonfigurationen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ charakterisiert sind. Die Bewegung des Systems zwischen diesen beiden Lagen verläuft dann auf eine solche Weise, daß das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2,1}$$

den kleinstmöglichen Wert annimmt.[2]) Die Funktion L heißt LAGRANGE-*Funktion* des gegebenen Systems, das Integral (2,1) heißt *Wirkung.*

Die Tatsache, daß die LAGRANGE-Funktion nur q und $\dot{q}$ enthält, jedoch keine höheren Ableitungen $\ddot{q}, \dddot{q}, \ldots$, ist der Ausdruck für den erwähnten Umstand,

---

[1]) Der Kürze halber werden wir in Zukunft oft unter q die Gesamtheit aller Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_s$ verstehen (und unter $\dot{q}$ analog die Gesamtheit aller Geschwindigkeiten).

[2]) Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß das Prinzip der kleinsten Wirkung nicht immer für die Bahn im Ganzen gilt, sondern nur für jeden genügend kleinen Abschnitt; für die gesamte Bahn kann es sich zeigen, daß das Integral (2,1) lediglich einen extremalen, aber nicht einen minimalen Wert annimmt. Dieser Umstand ist jedoch ganz unwesentlich bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen, welche nur die Extremalbedingung benutzt.

daß der mechanische Zustand vollkommen durch die Angabe der Koordinaten und Geschwindigkeiten bestimmt ist.

Wir gehen nun zur Ableitung der Differentialgleichungen über, die die Aufgabe lösen, das Minimum des Integrals (2,1) zu finden. Zur Vereinfachung der Formeln nehmen wir zunächst an, daß das System nur *einen* Freiheitsgrad besitzt und daher nur *eine* Funktion $q(t)$ bestimmt werden soll.

Angenommen, $q = q(t)$ sei eben diese Funktion, die S zu einem Minimum macht. Das bedeutet: S wächst, wenn $q(t)$ durch eine beliebige Funktion der Form

$$q(t) + \delta q(t) \tag{2,2}$$

ersetzt wird: $\delta q(t)$ ist eine Funktion, die in dem ganzen Zeitintervall von t_1 bis t_2 klein ist (sie heißt *Variation* der Funktion $q(t)$); da für $t = t_1$ und $t = t_2$ alle zu vergleichenden Funktionen (2,2) dieselben Werte $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ annehmen sollen, so muß

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2,3}$$

sein.

Die Änderung von S beim Ersetzen von q durch $q + \delta q$ ist durch die Differenz

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

gegeben.

Die Entwicklung dieser Differenz nach Potenzen von δq und $\delta\dot{q}$ (im Integranden) beginnt mit Gliedern erster Ordnung. Die notwendige Bedingung dafür, daß S ein Minimum[1]) wird, ist das Verschwinden der Gesamtheit dieser Glieder; diese Gesamtheit heißt erste Variation (oder gewöhnlich einfach Variation) des Integrals. Auf diese Weise kann das Prinzip der kleinsten Wirkung in folgender Form geschrieben werden:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 \tag{2,4}$$

oder, nach Ausführung der Variation,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0\,.$$

Wenn man berücksichtigt, daß $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ ist, und das zweite Glied partiell integriert, erhält man

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt = 0\,. \tag{2,5}$$

[1]) allgemein ein Extremum

Auf Grund der Bedingung (2,3) verschwindet jedoch das erste Glied in diesem Ausdruck. Das Integral, das übrig bleibt, soll für beliebige Werte von δq gleich Null sein. Das ist aber nur möglich, wenn der Integrand verschwindet. Auf diese Weise erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,.$$

Im Falle von s (> 1) Freiheitsgraden müssen s verschiedene Funktionen $q_i(t)$ unabhängig voneinander variiert werden. Offenbar erhalten wir dann s Gleichungen der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)\,. \tag{2,6}$$

Das sind die gesuchten Differentialgleichungen. Sie heißen in der Mechanik LAGRANGE*sche Gleichungen.*[1])

Wenn die LAGRANGE-Funktion eines gegebenen mechanischen Systems bekannt ist, so verknüpfen die Gleichungen (2,6) die Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Koordinaten miteinander, d. h., sie stellen die Bewegungsgleichungen des Systems dar.

In mathematischer Hinsicht bilden die Gleichungen (2,6) ein System von s gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für s unbekannte Funktionen $q_i(t)$. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems enthält $2s$ freie Konstanten. Zu ihrer Festlegung und damit zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des mechanischen Systems ist die Kenntnis der Anfangsbedingungen notwendig, die den Zustand des Systems in irgendeinem gegebenen Zeitpunkt charakterisieren, d. h. die Kenntnis der Anfangswerte aller Koordinaten und Geschwindigkeiten.

Angenommen, ein mechanisches System bestehe aus zwei Teilen A und B. Die LAGRANGE-Funktionen der als abgeschlossen betrachteten Teilsysteme seien L_A und L_B. Im Grenzfall, wo die beiden Teile sich in so großer Entfernung voneinander befinden, daß man die Wechselwirkung zwischen ihnen vernachlässigen kann, strebt die LAGRANGE-Funktion des Gesamtsystems dem Grenzwert

$$\lim L = L_A + L_B \tag{2,7}$$

zu. Die LAGRANGE-Funktionen addieren sich also. Diese Eigenschaft bedeutet, daß die Bewegungsgleichungen jedes der beiden nicht miteinander in Wechselwirkung stehenden Teile keine Größen enthalten können, die sich auf den anderen Teil des Systems beziehen.

---

[1]) In der Variationsrechnung heißen sie die EULERschen Gleichungen. Die Variationsrechnung untersucht die formale Aufgabe, die Extremalwerte von Integralen der Form (2,1) zu finden.

Offenbar wirkt sich die Multiplikation der LAGRANGE-Funktion eines mechanischen Systems mit einem beliebigen konstanten Faktor an sich nicht auf die Bewegungsgleichungen aus. Scheinbar folgt hieraus eine wesentliche Unbestimmtheit: Die LAGRANGE-Funktionen verschiedener isolierter mechanischer Systeme müßten mit beliebigen voneinander verschiedenen Konstanten multipliziert werden können. Die additive Eigenschaft (2,7) beseitigt diese Unbestimmtheit. Sie erlaubt lediglich, daß die LAGRANGE-Funktionen aller Systeme mit der gleichen Konstanten multipliziert werden. Das bedeutet aber weiter nichts, als daß man die Maßeinheit dieser physikalischen Größe willkürlich wählen kann. Wir kehren zu dieser Frage noch einmal in § 4 zurück.

Wir müssen hier noch folgende allgemeine Bemerkung machen. Betrachten wir zwei Funktionen $L'(q, \dot{q}, t)$ und $L(q, \dot{q}, t)$, die sich voneinander durch die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion $f(q, t)$ der Koordinaten und der Zeit unterscheiden:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \,. \tag{2,8}$$

Die mit Hilfe dieser beiden Funktionen berechneten Integrale (2,1) sind durch die Beziehung

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$$

verknüpft, d. h., sie unterscheiden sich voneinander durch ein Zusatzglied, das bei der Variation der Wirkung verschwindet, so daß die Bedingung $\delta S' = 0$ mit der Bedingung $\delta S = 0$ zusammenfällt und die Form der Bewegungsgleichungen unverändert bleibt. Auf diese Weise ist die LAGRANGE-Funktion bis auf ein Zusatzglied bestimmt, das die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion der Koordinaten und der Zeit ist.

§ 3. Das GALILEIsche Relativitätsprinzip

Für die Untersuchung mechanischer Erscheinungen muß man irgendein Bezugssystem wählen. In verschiedenen Bezugssystemen haben die Bewegungsgleichungen im allgemeinen verschiedene Formen. Wenn man ein beliebiges Bezugssystem wählt, so kann es sein, daß die Beschreibung sehr einfacher Erscheinungen äußerst kompliziert aussieht. Die Aufgabe besteht natürlich darin, ein Bezugssystem zu finden, in dem die Gesetze der Mechanik die einfachste Form annehmen.

In einem beliebigen Bezugssystem ist der Raum im allgemeinen weder homogen noch isotrop. Das bedeutet, daß verschiedene Lagen im Raum und verschiedene Richtungen in mechanischer Hinsicht nicht äquivalent sind, selbst wenn der betrachtete Körper in keiner Wechselwirkung mit anderen Körpern steht. Dasselbe trifft im allgemeinen Fall auch für die Zeit zu, die dann nicht homogen ist, d. h., verschiedene Zeitmomente sind nicht äquivalent. Die Komplikation, welche derartige Eigenschaften des Raumes und der Zeit bei der Beschreibung mechanischer Erscheinungen mit sich bringt, ist offensichtlich. So könnte z. B. ein freier Körper (d. h. ein Körper, der unter keiner äußeren Einwirkung steht) sich nicht dauernd in Ruhe befinden; wenn auch die Geschwindigkeit des Körpers zu irgendeinem Zeitpunkt gleich Null ist, so würde der Körper schon im nächsten Moment beginnen, sich in irgendeiner Richtung zu bewegen.

Es zeigt sich jedoch, daß es immer möglich ist, ein Bezugssystem zu finden, bezüglich dessen der Raum homogen und isotrop und die Zeit ebenfalls homogen ist. Ein solches System heißt *Inertialsystem*. In ihm wird z. B. ein freier Körper, der sich zu irgendeinem Zeitpunkt in Ruhe befindet, auf unbegrenzte Zeit in Ruhe verharren.

Wir können sogleich einige Aussagen machen über die Lagrange-Funktion eines Massenpunktes, der sich frei in einem Inertialsystem bewegt. Die Homogenität des Raumes und der Zeit bedeutet, daß diese Funktion weder den Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ noch die Zeit t explizit enthalten kann, d. h., L ist nur eine Funktion der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Infolge der Isotropie des Raumes kann die Lagrange-Funktion auch nicht von der Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}$ abhängen, so daß sie lediglich eine Funktion des absoluten Betrages, d. h. des Quadrates $\boldsymbol{v}^2 = v^2$ ist:

$$L = L(v^2)\,. \tag{3,1}$$

Infolge der Unabhängigkeit der Lagrange-Funktion von $\boldsymbol{r}$ wird $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$, und deswegen hat die Lagrange-Gleichung die Form[1])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0\,,$$

so daß $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \text{const}$ gilt. Da aber $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ nur eine Funktion der Geschwindigkeit ist, so folgt daraus

$$\boldsymbol{v} = \text{const}\,. \tag{3,2}$$

Auf diese Weise kommen wir zu dem Ergebnis, daß in einem Inertialsystem jede freie Bewegung mit einer Geschwindigkeit konstanter Größe und konstanter Richtung verläuft. Diese Behauptung ist der Inhalt des sogenannten *Trägheitsgesetzes*.

---

[1]) Unter der Ableitung einer skalaren Größe nach einem Vektor verstehen wir einen Vektor, dessen Komponenten gleich den Ableitungen dieser Größe nach den entsprechenden Komponenten des Vektors sind.

Wenn wir neben dem bereits vorhandenen Inertialsystem ein anderes System einführen, das sich gegen das erste geradlinig und gleichförmig bewegt, so werden die Gesetze der freien Bewegung im neuen System dieselben sein wie im ursprünglichen: Die freie Bewegung verläuft wiederum mit konstanter Geschwindigkeit.

Die Erfahrung zeigt jedoch, daß in diesen Systemen nicht nur die Gesetze der freien Bewegung die gleichen sind, sondern daß solche Systeme in jeder Beziehung mechanisch völlig äquivalent sind. Auf diese Weise existiert nicht ein einziges, sondern eine unendliche Vielzahl von Inertialsystemen, die sich zueinander relativ geradlinig und gleichförmig bewegen. In allen diesen Systemen sind sowohl die Eigenschaften des Raumes und der Zeit als auch alle Gesetze der Mechanik dieselben. Diese Behauptung ist der Inhalt des sogenannten GALILEI*schen Relativitätsprinzips*, eines der wichtigsten Prinzipien der Mechanik.

Das Gesagte zeigt klar die Bedeutung der Inertialsysteme. Aus diesem Grunde werden sie in der Regel bei Untersuchungen mechanischer Erscheinungen verwendet. Im folgenden werden wir stets Inertialsysteme betrachten, wenn nichts Gegenteiliges gesagt wird.

Die völlige mechanische Äquivalenz all der unendlich vielen Inertialsysteme zeigt andererseits, daß kein einziges „absolutes" Bezugssystem existiert, das man vor anderen bevorzugen könnte.

Die Koordinaten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ ein und desselben Punktes in zwei verschiedenen Bezugssystemen K und K', von denen sich das zweite gegen das erste mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ bewegt, sind miteinander durch die Beziehung

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V} t \tag{3,3}$$

verknüpft. Hierbei versteht es sich, daß der Gang der Zeit in beiden Bezugssystemen der gleiche ist:

$$t = t' . \tag{3,4}$$

Diese Annahme einer absoluten Zeit ist eine wesentliche Grundlage für die Vorstellungen der klassischen Mechanik[1]).

Die Formeln (3,3), (3,4) heißen GALILEI-*Transformation*. Das GALILEIsche Relativitätsprinzip kann auch so formuliert werden: Die Bewegungsgleichungen der Mechanik müssen bezüglich dieser Transformation invariant sein.[2])

§ 4. Die LAGRANGE-Funktion des freien Massenpunktes

Wir wollen nun die Form der LAGRANGE-Funktion bestimmen und betrachten zunächst den einfachsten Fall: die freie Bewegung eines Massenpunktes in einem Inertialsystem. Wie wir schon gesehen haben, hängt die LAGRANGE-Funktion

[1]) Sie ist in der relativistischen Mechanik nicht mehr richtig.

[2]) Damit ist gemeint, daß die Bewegungsgleichungen beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen ihre Form beibehalten, z. B. $\ddot{\boldsymbol{r}} = 0 \rightarrow \ddot{\boldsymbol{r}}' = 0$ (Anm. d. Herausg.).

in diesem Fall lediglich vom Quadrat des Geschwindigkeitsvektors ab. Um die genaue Form dieser Abhängigkeit zu finden, benutzen wir das GALILEIsche Relativitätsprinzip. Wenn das Inertialsystem K sich gegen das Inertialsystem K' mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit $\boldsymbol{\varepsilon}$ bewegt, so ist $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Da die Bewegungsgleichungen in allen Inertialsystemen ein und dieselbe Form haben müssen, so muß die LAGRANGE-Funktion $L(v^2)$ bei dieser Transformation in die Funktion L' übergehen, die sich von $L(v^2)$ höchstens um die totale Ableitung einer Funktion der Koordinaten und der Zeit unterscheiden kann (s. Ende § 2).

Es gilt

$$L' = L(v'^2) = L\,(v^2 + 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2)\,.$$

Entwicklung dieses Ausdrucks nach Potenzen von ε und Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung ergibt

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2}\, 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nur dann eine totale Ableitung nach der Zeit, wenn es linear von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ abhängt. Daher muß $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ konstant sein, d. h., die LAGRANGE-Funktion ist in dem betrachteten Fall direkt proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit:

$$L = \frac{m}{2}\,v^2\,. \tag{4,1}$$

Aus der Tatsache, daß eine LAGRANGE-Funktion dieser Form das GALILEIsche Relativitätsprinzip für infinitesimale Transformationen der Geschwindigkeit erfüllt, folgt unmittelbar, daß die LAGRANGE-Funktion im Falle endlicher Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ des Bezugssystems K gegen das System K' invariant ist. Tatsächlich ist

$$L' = \frac{m}{2}\,v'^2 = \frac{m}{2}\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = \frac{m}{2}\,v^2 + m\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}\,V^2$$

oder

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(m\,\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}\,V^2 t\right).$$

Das zweite Glied ist eine totale Ableitung und kann fortgelassen werden.

Die Größe m heißt Masse. Infolge der Additivität der LAGRANGE-Funktion haben wir für ein System von nicht miteinander in Wechselwirkung stehenden Teilchen

$$L = \sum_a \frac{m_a\,v_a^2}{2}\,.^{1)} \tag{4,2}$$

---

[1]) Als Index, der die Nummer des Teilchens angibt, werden wir die ersten Buchstaben des lateinischen Alphabetes verwenden, als Indizes, welche die Koordinaten numerieren, benutzen wir die Buchstaben $i, k, l, \ldots$.

Es muß betont werden, daß erst bei Berücksichtigung dieser Eigenschaft der Additivität die Definition der Massen einen realen Sinn erhält.

Wie schon in § 2 erwähnt wurde, kann man die LAGRANGE-Funktion stets mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren; das wirkt sich auf die Bewegungsgleichungen nicht aus. Für die Funktion (4,2) bedeutet ein solcher Faktor eine Änderung der Maßeinheit der Masse; die Massenverhältnisse verschiedener Teilchen — nur sie haben einen realen physikalischen Sinn — bleiben bei dieser Transformation unverändert.

Es ist leicht zu sehen, daß die Masse nicht negativ sein kann. Gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung für eine reelle Bewegung eines Massenpunktes vom Punkt 1 zum Punkt 2 hat das Integral

$$S = \int_1^2 \frac{m\, v^2}{2}\, dt$$

tatsächlich ein Minimum. Wenn die Masse negativ wäre, so würde das Wirkungsintegral für eine Bahn, auf der das Teilchen sich zunächst schnell von 1 entfernt und sich sodann schnell 2 nähert, einen beliebig großen negativen Wert annehmen, d. h., es würde kein Minimum existieren.[1])

Es ist nützlich zu bemerken, daß

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2} \tag{4,3}$$

gilt. Darum genügt es zur Aufstellung der LAGRANGE-Funktion, das Quadrat der Länge eines Bogenelementes dl in dem entsprechenden Koordinatensystem zu finden.

In kartesischen Koordinaten ist z. B. $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ und damit

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,. \tag{4,4}$$

In Zylinderkoordinaten ist $dl^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2$, so daß

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \tag{4,5}$$

wird. In sphärischen Koordinaten ist $dl^2 = dr^2 + r^2\, d\Theta^2 + r^2 \sin^2\Theta\, d\varphi^2$ und

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\Theta}^2 + r^2 \sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2)\,. \tag{4,6}$$

---

[1]) Die Bemerkung auf Seite 2 widerspricht diesem Ergebnis nicht, da bei $m < 0$ das Integral für keinen einzigen kleinen Bereich der Bahn ein Minimum annehmen könnte.

§ 5. Die Lagrange-Funktion eines Systems von Massenpunkten

Wir betrachten jetzt ein System von Massenpunkten, die zwar untereinander, aber nicht mit irgendwelchen anderen Körpern in Wechselwirkung stehen, solch ein System heißt *abgeschlossen.* Es zeigt sich, daß die Wechselwirkung zwischen Teilchen dadurch beschrieben werden kann, daß man zur Lagrange-Funktion (4,2) für nicht miteinander wechselwirkende Massenpunkte eine bestimmte Koordinatenfunktion hinzufügt, die vom Charakter der Wechselwirkung abhängt.[1] Wenn wir diese Funktion mit $-U$ bezeichnen, so können wir schreiben

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots) \tag{5,1}$$

($\boldsymbol{r}_a$ ist der Radiusvektor des a-ten Punktes). Dies ist die allgemeine Form der Lagrange-Funktion eines abgeschlossenen Systems.

Die Summe

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

heißt die *kinetische Energie,* die Funktion U die *potentielle Energie* des Systems; der Sinn dieser Bezeichnungen wird in § 6 deutlich. Die Tatsache, daß die potentielle Energie nur von der Lage aller Massenpunkte in ein und demselben Zeitpunkt abhängt, bedeutet, daß eine Änderung der Lage eines von ihnen sich sofort auf alle übrigen auswirkt; man kann sagen, daß die Wechselwirkung sich augenblicklich „ausbreitet". Diese Eigenschaft der Wechselwirkung in der klassischen Mechanik steht in engem Zusammenhang mit der Grundvoraussetzung, daß die Zeit absolut ist und das Galileische Relativitätsprinzip gilt. Wenn die Wechselwirkung sich nicht augenblicklich, sondern mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, so würde diese Geschwindigkeit in verschiedenen Systemen (die sich relativ zueinander bewegen) verschieden sein, da die Annahme einer absoluten Zeit automatisch bedeutet, daß die gewöhnliche Regel der Vektoraddition auf alle Erscheinungen anwendbar ist. Dann wären aber die Bewegungsgesetze miteinander in Wechselwirkung stehender Körper verschieden in verschiedenen Inertialsystemen, was dem Relativitätsprinzip widerspräche.

In § 3 sprachen wir nur von der Homogenität der Zeit. Die Form der Lagrange-Funktion (5,1) zeigt nun, daß die Zeit nicht nur homogen, sondern auch isotrop ist, d. h., ihre Eigenschaften sind in beiden Richtungen die gleichen. Tatsächlich läßt der Übergang von t zu $-t$ die Lagrange-Funktion und infolgedessen auch die Bewegungsgleichungen unverändert. Mit anderen Worten, wenn in einem System irgendeine Bewegung möglich ist, so ist stets auch die entgegengesetzte Bewegung möglich, d. h. eine solche, bei der das System

[1] Diese Aussage gilt für die klassische, nichtrelativistische Mechanik, die in diesem Buch behandelt wird.

dieselben Zustände in umgekehrter Reihenfolge durchläuft. In diesem Sinne sind alle Bewegungen, die nach den Gesetzen der klassischen Mechanik verlaufen, reversibel.

Wenn wir die LAGRANGE-Funktion kennen, so können wir die Bewegungsgleichungen aufschreiben:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5,2}$$

Einsetzen von (5,1) ergibt

$$m_a \frac{\partial \boldsymbol{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5,3}$$

In dieser Form heißen die Bewegungsgleichungen NEWTON*sche Gleichungen* und bilden die Grundlage der Mechanik von Teilchensystemen. Der Vektor

$$\boldsymbol{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}, \tag{5,4}$$

der auf der rechten Seite der Gleichung (5,3) steht, heißt die *Kraft*, die auf den a-ten Punkt wirkt. Sie hängt ebenso wie U nur von den Koordinaten aller Teilchen ab, aber nicht von ihren Geschwindigkeiten. Die Gleichung (5,3) zeigt also, daß die Beschleunigungsvektoren der Teilchen Funktionen der Koordinaten allein sind.

Die potentielle Energie ist nur bis auf eine beliebige additive Konstante definiert; durch Hinzufügen einer Konstante würden sich die Bewegungsgleichungen nicht ändern (das ist ein spezieller Fall der am Ende von § 2 erwähnten Mehrdeutigkeit der LAGRANGE-Funktion). Die natürlichste und übliche Wahl dieser Konstanten besteht darin, daß man das Verschwinden der potentiellen Energie bei unendlich großen Abständen zwischen den Teilchen fordert.

Wenn man für die Beschreibung der Bewegung nicht kartesische, sondern beliebige verallgemeinerte Koordinaten q_i benutzt, so muß man, um die LAGRANGE-Funktion zu erhalten, die entsprechenden Transformationen durchführen:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \ldots, q_s), \qquad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k.$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Funktion

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

einsetzen, so erhalten wir die gesuchte LAGRANGE-Funktion in der Form

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k - U(q), \tag{5,5}$$

wo die a_{ik} nur von den Koordinaten abhängen. Die kinetische Energie ist auch in verallgemeinerten Koordinaten eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten, kann aber außerdem noch von den Koordinaten abhängen.

Bisher haben wir nur von abgeschlossenen Systemen gesprochen. Jetzt wollen wir ein nichtabgeschlossenes System A betrachten, das mit einem anderen System B in Wechselwirkung steht, das eine gegebene Bewegung ausführt. In diesem Fall sagt man, daß das System A sich in einem gegebenen Feld bewegt (das durch das System B erzeugt wird). Da wir die Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung durch unabhängige Variation jeder einzelnen Koordinate erhalten (d. h., man tut so, als ob die übrigen bekannt wären), so können wir zum Auffinden der LAGRANGE-Funktion L_A des Systems A die LAGRANGE-Funktion L des Gesamtsystems $A + B$ benutzen und in ihr die Koordinaten q_B durch die gegebenen Funktionen der Zeit ersetzen.

Unter der Voraussetzung, daß das System $A + B$ abgeschlossen ist, erhalten wir

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)\,,$$

wo die ersten beiden Glieder die kinetischen Energien der Systeme A und B, das dritte Glied die gesamte potentielle Energie bedeuten. Indem man für die q_B die gegebenen Zeitfunktionen einsetzt und das Glied $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ fortläßt, das nur von der Zeit abhängt (und darum die totale Ableitung irgendeiner Funktion der Zeit ist), erhält man

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t))\,.$$

Auf diese Weise wird die Bewegung eines Systems im äußeren Feld durch eine LAGRANGE-Funktion des gewöhnlichen Typs beschrieben, nur mit dem Unterschied, daß jetzt die potentielle Energie explizit von der Zeit abhängen kann.

Die allgemeine Form der LAGRANGE-Funktion eines Teilchens, das sich in einem äußeren Feld bewegt, ist also

$$L = \frac{m v^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{5,6}$$

und die Bewegungsgleichungen lauten

$$m \dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\,. \tag{5,7}$$

Ein Feld heißt *homogen*, wenn in allen Punkten dieselbe Kraft $\boldsymbol{F}$ auf das Teilchen wirkt. Die potentielle Energie in einem solchen Feld ist offenbar

$$U = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}\,. \tag{5,8}$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen bemerken wir noch folgendes über die Anwendung der LAGRANGE-Funktion auf verschiedene konkrete Aufgaben. Man hat es oft mit mechanischen Systemen zu tun, in denen die Wechselwirkungen zwischen den Körpern (Massenpunkten) sogenannten „*Bindungs*"charakter