EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Quantentheorie

Spezielle Kapitel

von

Walter Greiner

3., überarbeitete Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56405

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

3., überarbeitete Auflage 1993
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5640-5

Satz: André Paulus
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

Vorwort zur 1. und 2. Auflage

Die theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Festkörperphysik, bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweihen; Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muß natürlich auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die theoretische Physik in das erste Studiensemester vorverlegt. Darum werden die Mechanik I und II, die Elektrodynamik und die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie II, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungs- und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, Klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Eichtheorien, Theorie der Elementarteilchen usw.. Einige davon, wie z.B. die zweisemestrigen Vorlesungen über die Theoretische Kernphysik bzw. die Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier mit den "Speziellen Kapiteln der Quantentheorie" eine besonders wichtige Ergänzungsvorlesung vor. Sie ist für das 5. Semester gedacht und so gehalten wie die Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeuges, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir, den Stoff so interessant wie möglich darzustellen.

Wir bedienen uns fast ausschließlich des Formalismus der zweiten Quantisierung (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen und Moden), den wir ausgiebig erläutern und auch in seinem Zusammenhang mit der elementaren Quantenmechanik diskutieren. Die Vorlesung beginnt mit der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes. Wir besprechen sowohl die Zustandsvektoren mit scharfer Photonenzahl, als auch die in der modernen Physik wichtigen kohärenten Zustände (Glauber-Vektoren). Die Emissions- und Absorptionsprozesse der Strahlung, die Bestimmung der Lebensdauer von angeregten Zuständen und der Linienbreite von Spektrallinien, das Selbstenergieproblem, die Photonenstreuung und die Theorie der Tscherenkov-Strahlung, zusammen mit vielen zur Vertiefung beitragenden Aufgaben (z.B. Zweiphotonenzerfall, Comptoneffekt, Photonen-Spektrum des schwarzen Körpers usw.) schmücken die ersten beiden Kapitel aus.

Das dritte Kapitel ist speziell der systematischen Diskussion der zweiten Quantisierung gewidmet. Dabei werden Fermi- und Bosestatistiken, das Spin-Statistik-Theorem und auch die Möglichkeit von Parastatistiken vorgestellt und ihr Zusammenhang mit der Art der Quantisierung (Antikommutatoren, Kommutatoren, Dreifachkommutatoren) aufgezeigt. Die Behandlung von Quantenfeldern mit Wechselwirkung wird allgemein vorgeführt und speziell auf die Probleme der Bremsstrahlung, der Rutherford-Streuung mit höheren Korrekturen und der Berechnung der Lebensdauer des 2s-Zustandes des H-Atoms gegen Zweiphotonenzerfall angewandt.

Die Unendlichkeiten der Quantenelektrodynamik sind das Thema des 5. Kapitels. Hierbei haben wir dem Casimireffekt, der Renormierung der Elektronenmasse und der Berechnung des Lambshift besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

In den beiden letzten Kapiteln werden die Methoden der Quantenfeldtheorie auf Fragestellungen aus dem Bereich der Festkörper- und Plasmaphysik angewandt: Quantengase, Superfluidität, Plasmonen und Photonen sind einige der diskutierten Phänomene.

Wir haben bei der Stoffauswahl bewußt moderne Themen aus verschiedenen Gebieten der Physik aufgegriffen (Glauber-Zustände, Zweiphotonenzerfall, Tscherenkov-Strahlung, Bremsstrahlung, Paraststistik, Casimir-Effekt, Maxwellscher Dämon, Superfluidität usw.). Damit soll jungen Physikern die vielfältige Anwendung der feldtheoretischen Methoden vor Augen geführt werden, ihre Begeisterung geweckt und gefördert und sie schließlich frühzeitig ohne Niveauverlust an moderne Forschungsgebiete herangeführt werden.

Wir bedanken uns bei den Damen A. Tüpker, B. Utschig, M. Knolle, E. Pfister, I. Heinz und G. Roth für ihre große Hilfe bei der technischen Anfertigung des Manuskriptes. Ihre Geduld und Ruhe bei den immer wieder notwendigen Änderungen waren bewundernswert.

Den Herren Dr. Jürgen Hoffmann und cand. phys. Horst Schaaser gilt unser besonderer Dank für ihre außerordentliche Hilfe beim Ausarbeiten der Übungsaufgaben und Beispiele und bei der Überwachung der technischen Ausführung.

Schließlich sprechen wir die Hoffnung aus, daß auch diese "Vorlesung über spezielle Kapitel der Quantentheorie" viele Freunde finden möge.

Frankfurt am Main, im Mai 1980 Walter Greiner

Vorwort zur 3. Auflage

Die Vorlesungen über Theoretische Physik haben viele Freunde gefunden, sodaß eine Neuauflage notwendig wurde. Dies gab uns Gelegenheit, zahlreiche Druck- und Flüchtigkeitsfehler der ersten Auflage zu eliminieren und gleichzeitig notwendig erscheinende didaktische und sachliche Verbesserungen vorzunehmen.

Besonders der Abschnitt über Superfluidität wurde erweitert. Aber auch gänzlich neue Kapitel wurden eingefügt; so z.B. die Paar-Korrelationen bei Fermionen und Bosonen, Grundelemente der Quantenstatistik, Struktur der Atome, elementare Struktur der Moleküle und schließlich Feynmans Pfadintegralformulierung der Schrödingerschen Quantenmechanik. Dies sind zum Teil faszinierende und wichtige Themen, die angehende Physiker interessieren und die sie kennen sollten. Auch eine Reihe Übungsaufgaben und Beispiele wurden ausgetauscht bzw. neu aufgenommen. Wir hoffen, daß damit die Vorlesungen gewinnen.

Wir bedanken uns besonders bei Herrn Akademischen Oberrat Dr. J. Reinhardt für seine Verbesserungsvorschläge, bei den Herren Dr. G. Plunien und Dr. S. Schramm für die Ausarbeitung einiger Aufgaben und Beispiele und bei Herrn Dipl. Phys. A. Paulus für die Überwachung der Drucklegung. Für ihre Hilfe bei der Neugestaltung sei auch den Herren Dipl. Phys. V. Blum, Dipl. Phys. C. Greiner, Dipl. Phys. R. Heuer, C. Hofmann, Dipl. Phys. C. Ionescu, H.-J. Kampfenkel, U. Katscher, Dipl. Phys. G. Peilert, Dr. M. Rufa, Dipl. Phys. K. Rummrich, Dipl. Phys. A. Scherdin, Dipl. Phys. D. Schnabel, Dr. G. Staad und Dipl. Phys. T. Stahl herzlich gedankt; so auch Frau H. Steidle für die Gestaltung vieler Figuren.

Frankfurt am Main, im Januar 1989 — Walter Greiner

Inhaltsverzeichnis

Aufgaben und Beispiele

1. Die Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes

Aus den Vorlesungen über klassische Elektrodynamik (Band III) kennen wir die Maxwell-Gleichungen als Grundgleichungen aller klassischen elektromagnetischen Phänomene. In der Quantenelektrodynamik geht es einerseits um die Quantisierung der Maxwell-Gleichungen, andererseits aber auch um die Quantisierung des Elektron-Positron-Feldes, des Pionenfeldes und anderer Felder und ihrer Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld (d.h. den quantisierten elektromagnetischen Wellen). Wir erinnern uns zunächst noch einmal kurz an die klassischen Maxwell-Gleichungen.

Die Maxwell-Gleichungen

Maxwells Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld lauten im Gaußschen Maßystem, das wir wie schon früher durchweg benutzen werden:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0\,, \qquad & \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\varrho\,, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Kombiniert man die Divergenz der zweiten Gleichung mit der zeitlichen Ableitung der dritten, so läßt sich die Kontinuitätsgleichung für die elektrischen Ladungs- und Stromdichten ϱ und $\vec{j}$ folgern:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0\,. \tag{2}$$

Die elektrischen und magnetischen Feldstärken, $\vec{E}$ und $\vec{B}$, lassen sich durch das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential φ ausdrücken

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi\,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,. \tag{3}$$

Die erste und dritte Gleichung (1) sind damit offensichtlich sofort identisch erfüllt. Die Potentiale $\vec{A}$ und φ sind nicht eindeutig, denn man erhält dieselben Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auch mit den neuen Potentialen $\vec{A}'$ und φ', die durch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi\,, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{4}$$

gegeben sind. $\chi(\vec{r},t)$ ist dabei eine willkürliche Funktion des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t. Diese Änderung der Potentiale (4), die keine Änderungen für die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nach sich zieht, heißt *Eichtransformation*. Wir haben in den Vorlesungen über Quantenmechanik (vgl. Band IV) schon öfters nachgewiesen, daß bei minimaler Kopplung

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \tag{5}$$

die Wellenfunktion Ψ bei einer Umeichung (4) durch

$$\Psi' = \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right) \tag{6}$$

ersetzt werden muß; dann aber die Form der Wellengleichung (Schrödinger-Gleichung, Pauli-Gleichung etc.) unverändert bleibt. Die Transformationen (6) werden oft auch *Eichtransformationen erster Art*, und die Transformationen (4) *Eichtransformationen zweiter Art* genannt. Setzt man die Gleichungen (3) in die zweite und dritte Maxwell-Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}^2\varphi &= -4\pi\varrho\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Falls der Vektor $\vec{A}$ in orthogonalen Koordinaten geschrieben wird, gilt

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A}\,. \tag{8}$$

Hierbei bedeutet der letzte Term $\vec{\nabla}^2\vec{A}$ rechts einen Vektor, dessen einzelne Komponenten ΔA_i, d.h. der Laplace-Operator angewandt auf die Komponenten A_i sind. Denkt man sich (8) in (7) eingesetzt, so lassen sich die entstehenden Gleichungen beträchtlich vereinfachen, wenn man eine Eichtransformation (4) zu den neuen Potentialen $\vec{A}'$, φ' durchführt, die derart bestimmt sind, daß sie die *Lorentzbedingung*

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

erfüllen. Die Eichfunktion χ kann aus der Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{10}$$

bestimmt werden. Die Gleichungen (7) lauten dann

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \\ \vec{\nabla}^2\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} &= -4\pi\varrho\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Ebene elektromagnetische Wellen

Wenn $\vec{j} = 0$ und $\varrho = 0$, d.h. der Raum vollständig leer ist, läßt sich immer eine Eichfunktion χ finden derart, daß

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t) &= 0\,, \\ \varphi'(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

für alle $\vec{r}$ und t. Das gilt in voller Allgemeinheit (vgl. Aufgabe 1.1). Die Eichung (12) heißt *Coulomb-Eichung*. Dann können transversale ebene Wellen als Lösungen für $\vec{A}'$ (und daher auch für $\vec{E}$ und $\vec{B}$) gefunden werden. Lassen wir im folgenden die Striche bei $\vec{A}'$ und φ' (was sowieso verschwindet) wieder weg, so erhalten wir anstelle von (9) und (11)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \tfrac{1}{c^2} \tfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0\,, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0\,, \\ \varphi &= 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Eine typische ebene Welle als Lösung von (13) ist durch ein reelles Vektorpotential $\vec{A}$ mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$ und dem reellen Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}$ gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= 2\vec{\varepsilon}\,|\vec{A}_0| \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega\, t + \alpha\right) \\ &= \vec{A}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \vec{A}_0^*\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ &= \vec{A}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}\,, \end{aligned} \tag{14}$$

wobei $\vec{A}_0 = |\vec{A}_0|\,\vec{\varepsilon} e^{i\alpha}$ ist und c.c. nichts weiter als "complex conjugate"(das komplex Konjugierte) des vorangehenden Terms bedeuten soll. Man sieht sofort, daß der Ansatz (14) die erste der Gleichungen (13) erfüllt, falls

$$\omega = k\,c = |\vec{k}|\,c \tag{15}$$

ist, und die zweite der Gleichungen (13) erfüllt, wenn

$$\vec{A}_0 \perp \vec{k} \tag{16}$$

der Polarisationsvektor $\vec{A}_0$ transversal ist, also senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor $\vec{k}$ steht. Die elektrischen und magnetischen Felder, zum Vektorpotential (14) gehörend, bestimmen sich aus (3) zu

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -2k\,\vec{\varepsilon}\,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha\right) , \\ \vec{B} &= -2k\times\vec{\varepsilon}\,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha\right) . \end{aligned} \tag{17}$$

Der *Poynting-Vektor*

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{H} \tag{18}$$

ist offensichtlich in der Richtung von $\vec{k}$. Im ladungs- und stromfreien Raum ist $\vec{H} = \vec{B}$. Nach Mittelung über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ der Oszillation ergibt sich sein Betrag zu

$$\overline{S} = \frac{\omega^2}{2\pi c}\,\vec{\varepsilon}^{\,2} \tag{19}$$

wobei $\vec{\varepsilon}^{\,2} = \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon} = \vec{A}_0\cdot\vec{A}_0^*$ ist. Die Größe $\overline{S}$ charakterisiert die Intensität der ebenen Welle.

1.1 Aufgabe: Die Coulomb-Eichung

Zeigen Sie, falls $\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} = 0$ und $\varrho = 0$ ist, daß die allgemeinste Lösung der Maxwell-Gleichungen durch Potentiale $\vec{A}'$ und φ' mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$ und $\varphi' = 0$ ausgedrückt werden kann (Coulomb-Eichung).

Lösung: Die beiden Bedingungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$ und $\varrho' = 0$ zusammen sichern automatisch die Gültigkeit der Lorentzbedingung (9). Daher gelten auch die Gleichungen (11). Es entsteht aber nur dann kein Widerspruch zu den beiden Bedingungen, falls $\varrho = 0$ und $\mathit{div}\,\vec{\jmath} = 0$ ist. Für gegebenes $\vec{A}(\vec{r},t)$ und $\varphi(\vec{r},t)$ findet man die zur Coulombeichung führende Eichfunktion $\chi(\vec{r},t)$ aus den aus (4) folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi}{\partial t} &= c\,\varphi(\vec{r},t) , && \underline{1} \\ \vec{\nabla}^2\chi &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) . && \underline{2} \end{aligned}$$

Aus $\underline{1}$ folgt

$$\chi(\vec{r},t) = c\int\varphi(\vec{r},t)\,dt + \text{const.} \qquad \underline{3}$$

was zusammen mit $\underline{2}$

$$c\int dt\left[\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = 0 \qquad \underline{4}$$

ergibt. Dies ist als Konsistenzbedingung aufzufassen. Wir prüfen ihre Gültigkeit, indem wir von

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho$$

ausgehen und weiterrechnen

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \right) = 4\pi\,\varrho$$

oder

$$-\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{c\,\partial t} - \vec{\nabla}^2\varphi \right) = 4\pi\,\varrho\,. \qquad \underline{5}$$

Diese Gleichung ist von den Potentialen $\vec{A}$ und φ als Lösungen der Maxwell-Gleichungen immer erfüllt. Wenn $\varrho = 0$ ist, folgt also automatisch die Gültigkeit von $\underline{4}$. Damit ist $\underline{3}$ die Eichfunktion und wir können die Coulomb-Eichung immer, ohne Verlust an Allgemeinheit, unter den gegebenen Bedingungen erreichen.

Die Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Wir schreiben die Maxwell-Gleichungen für das Feld ohne Quellen noch einmal auf:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\,, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0\,, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= +\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

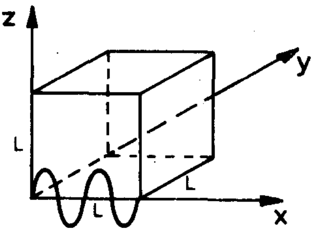
Wählt man die Coulomb-Eichung (13) - vgl. Aufgabe 1.1 -

$$\begin{aligned} \varphi &= 0\,, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0\,, \end{aligned} \tag{21}$$

so sind mit (3) die ersten drei Gleichungen (20) identisch erfüllt. Die letzte Gleichung (20) ergibt dann die Wellengleichung für das Vektorpotential

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = 0\,, \tag{22}$$

was aus (13) schon bekannt ist. Bei der Entwicklung der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes ist es vorteilhaft, das Feld durch einen Satz diskreter Variablen zu beschreiben. Wir sperren daher das elektromagnetische Feld in einen großen Kasten (Würfel) vom Volumen $\Omega = L^3$ ein und diskretisieren damit die Normalmoden des Feldes. Das allgemeine $\vec{A}$-Feld wird dann nach den Normalmoden $\vec{A}_{\vec{k}\sigma}$ entwickelt; die Fourierkoeffizienten $a_{\vec{k}\sigma}(t)$



Der Würfel, in welchem das elektromagnetische Feld eingesperrt wird. Ein Wellenzug mit zwei vollen Wellenlängen entlang der x-Achse ist angedeutet.

sind dann die eigentlichen Feldvariablen, die die Dynamik beschreiben. Ihre Quantisierung werden wir anstreben.

Es erhebt sich die Frage nach den Randbedingungen des Feldes auf den Wänden des Kastens. Am bequemsten ist es, Periodizität von $\vec{A}$ auf den Wänden zu fordern; was bedeutet, daß die Normalmoden dadurch bestimmt werden, daß volle Wellenlängen in den Kasten passen. Mathematisch lautet diese Forderung

$$\begin{aligned} \vec{A}(L,y,z,t) &= \vec{A}(0,y,z,t) \ , \\ \vec{A}(x,L,z,t) &= \vec{A}(x,0,z,t) \ , \\ \vec{A}(x,y,L,t) &= \vec{A}(x,y,0,t) \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Mit dem Ansatz

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \vec{A}(x,y,z)\, e^{i\omega t} \tag{24}$$

folgt aus (22)

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{A}(x,y,z) = 0\,. \tag{25}$$

Setzen wir

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,, \qquad \text{also } \omega_k^2 = c^2\,k^2\,, \tag{26}$$

so ergibt sich

$$\vec{A}_{\vec{k}\sigma} = N_k\, \vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad \sigma = 1,2\ , \tag{27}$$

wobei $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}1}$ und $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}2}$ zwei Polarisationsvektoren sind, die wegen der aus (21) und (27) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ folgenden Transversalitätsbedingung

$$\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} = 0 \tag{28}$$

senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ stehen müssen.