



Edition
Harri 
Deutsch 

Quantentheorie

Spezielle Kapitel

von
Walter Greiner

3., überarbeitete Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56405

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

3., überarbeitete Auflage 1993
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5640-5

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 1993, 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG,
42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: André Paulus
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

Vorwort zur 1. und 2. Auflage

Die theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Festkörperphysik, bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweißen; Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muß natürlich auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die theoretische Physik in das erste Studiensemester verlegt. Darum werden die Mechanik I und II, die Elektrodynamik und die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie II, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungs- und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, Klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Eichtheorien, Theorie der Elementarteilchen usw.. Einige davon, wie z.B. die zweisemestrigen Vorlesungen über die Theoretische Kernphysik bzw. die Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier mit den "Speziellen Kapiteln der Quantentheorie" eine besonders wichtige Ergänzungsvorlesung vor. Sie ist für das 5. Semester gedacht und so gehalten wie die Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeuges, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir, den Stoff so interessant wie möglich darzustellen.

Wir bedienen uns fast ausschließlich des Formalismus der zweiten Quantisierung (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen und Moden), den wir ausgiebig erläutern und auch in seinem Zusammenhang mit der elementaren Quantenmechanik diskutieren. Die Vorlesung beginnt mit der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes. Wir besprechen sowohl die Zustandsvektoren mit scharfer Photonenzahl, als auch die in der modernen Physik wichtigen kohärenten Zustände (Glauber-Vektoren). Die Emissions- und Absorptionsprozesse der Strahlung, die Bestimmung der Lebensdauer von angeregten Zuständen und der Linienbreite von Spektrallinien, das Selbstenergieproblem, die Photonenstreuung und die Theorie der Tscherenkow-Strahlung, zusammen mit vielen zur Vertiefung beitragenden Aufgaben (z.B. Zweiphotonenzerfall, Comptoneffekt, Photonen-Spektrum des schwarzen Körpers usw.) schmücken die ersten beiden Kapitel aus.

Das dritte Kapitel ist speziell der systematischen Diskussion der zweiten Quantisierung gewidmet. Dabei werden Fermi- und Bosestatistiken, das Spin-Statistik-Theorem und auch die Möglichkeit von Parastatistiken vorgestellt und ihr Zusammenhang mit der Art der Quantisierung (Antikommutatoren, Kommutatoren, Dreifachkommutatoren) aufgezeigt. Die Behandlung von Quantenfeldern mit Wechselwirkung wird allgemein vorgeführt und speziell auf die Probleme der Bremsstrahlung, der Rutherford-Streuung mit höheren Korrekturen und der Berechnung der Lebensdauer des $2s$ -Zustandes des H-Atoms gegen Zweiphotonenzerfall angewandt.

Die Unendlichkeiten der Quantenelektrodynamik sind das Thema des 5. Kapitels. Hierbei haben wir dem Casimireffekt, der Renormierung der Elektronenmasse und der Berechnung des Lambshift besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

In den beiden letzten Kapiteln werden die Methoden der Quantenfeldtheorie auf Fragestellungen aus dem Bereich der Festkörper- und Plasmaphysik angewandt: Quantengase, Superfluidität, Plasmonen und Photonen sind einige der diskutierten Phänomene.

Wir haben bei der Stoffauswahl bewußt moderne Themen aus verschiedenen Gebieten der Physik aufgegriffen (Glauber-Zustände, Zweiphotonenzerfall, Tscherenkow-Strahlung, Bremsstrahlung, Parastistik, Casimir-Effekt, Maxwell'scher Dämon, Superfluidität usw.). Damit soll jungen Physikern die vielfältige Anwendung der feldtheoretischen Methoden vor Augen geführt werden, ihre Begeisterung geweckt und gefördert und sie schließlich frühzeitig ohne Niveauverlust an moderne Forschungsgebiete herangeführt werden.

Wir bedanken uns bei den Damen A. Tüpker, B. Utschig, M. Knolle, E. Pfis-

ter, I. Heinz und G. Roth für ihre große Hilfe bei der technischen Anfertigung des Manuskriptes. Ihre Geduld und Ruhe bei den immer wieder notwendigen Änderungen waren bewundernswert.

Den Herren Dr. Jürgen Hoffmann und cand. phys. Horst Schaaser gilt unser besonderer Dank für ihre außerordentliche Hilfe beim Ausarbeiten der Übungsaufgaben und Beispiele und bei der Überwachung der technischen Ausführung.

Schließlich sprechen wir die Hoffnung aus, daß auch diese "Vorlesung über spezielle Kapitel der Quantentheorie" viele Freunde finden möge.

Frankfurt am Main, im Mai 1980

Walter Greiner

Vorwort zur 3. Auflage

Die Vorlesungen über Theoretische Physik haben viele Freunde gefunden, sodaß eine Neuauflage notwendig wurde. Dies gab uns Gelegenheit, zahlreiche Druck- und Flüchtigkeitsfehler der ersten Auflage zu eliminieren und gleichzeitig notwendig erscheinende didaktische und sachliche Verbesserungen vorzunehmen.

Besonders der Abschnitt über Superfluidität wurde erweitert. Aber auch gänzlich neue Kapitel wurden eingefügt; so z.B. die Paar-Korrelationen bei Fermionen und Bosonen, Grundelemente der Quantenstatistik, Struktur der Atome, elementare Struktur der Moleküle und schließlich Feynmans Pfadintegralformulierung der Schrödingerschen Quantenmechanik. Dies sind zum Teil faszinierende und wichtige Themen, die angehende Physiker interessieren und die sie kennen sollten. Auch eine Reihe Übungsaufgaben und Beispiele wurden ausgetauscht bzw. neu aufgenommen. Wir hoffen, daß damit die Vorlesungen gewinnen.

Wir bedanken uns besonders bei Herrn Akademischen Oberrat Dr. J. Reinhardt für seine Verbesserungsvorschläge, bei den Herren Dr. G. Plunien und Dr. S. Schramm für die Ausarbeitung einiger Aufgaben und Beispiele und bei Herrn Dipl. Phys. A. Paulus für die Überwachung der Drucklegung. Für ihre Hilfe bei der Neugestaltung sei auch den Herren Dipl. Phys. V. Blum, Dipl. Phys. C. Greiner, Dipl. Phys. R. Heuer, C. Hofmann, Dipl. Phys. C. Ionescu, H.-J. Kampfenkel, U. Katscher, Dipl. Phys. G. Peilert, Dr. M. Rufa, Dipl. Phys. K. Rummrich, Dipl. Phys. A. Scherdin, Dipl. Phys. D. Schnabel, Dr. G. Staad und Dipl. Phys. T. Stahl herzlich gedankt; so auch Frau H. Steidle für die Gestaltung vieler Figuren.

Frankfurt am Main, im Januar 1989

Walter Greiner

Inhaltsverzeichnis

1. Die Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes	1
Die Maxwell-Gleichungen	1
Ebene elektromagnetische Wellen	3
Die Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes	5
Zustandsvektoren des elektromagnetischen Feldes	15
Kohärente Zustände (Glauber-Vektoren) des Strahlungsfeldes	19
2. Die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Materie	36
Die Emission von Strahlung durch ein angeregtes Atom	38
Die Lebensdauer eines angeregten Zustandes	41
Absorption von Photonen	56
Photonenstreuung an freien Elektronen	64
Berechnung des totalen Photonen-Streuquerschnitts	68
Die Tscherenkov-Strahlung eines Schrödingerschen Elektrons	76
Die natürliche Linienbreite und Selbstenergie	89
3. Über die zweite Quantisierung	99
Das Spin-Statistik-Theorem	118
Zusammenhang der zweiten Quantisierung mit der elementaren Quantenmechanik	119
4. Quantenfelder mit Wechselwirkung	130
5. Die Unendlichkeiten in der Quantenelektrodynamik — Renormierungsprobleme	159
Die Anziehung paralleler, leitender Platten auf Grund der Quantenfluktuation des Feldes (Casimir-Effekt)	159
Die Renormierung der Elektronenmasse	171
Die Aufspaltung der $2s_{1/2}$ - $2p_{3/2}$ -Zustände im Wasserstoff — die Lamb-Shift	179
Was ist bei Bethe inkonsistent?	189

Das anomale magnetische Moment des Elektrons im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenelektrodynamik	190
6. Nichtrelativistische Quantenfeldtheorie wechselwirkender Teilchen und ihre Anwendung	197
Quantengase	202
Das fast-ideale, entartete Bose-Einstein-Gas	214
7. Die Superfluidität	235
Grundgedanken einer mikroskopischen Theorie der Superfluidität . .	236
Landaus Theorie der Superfluidität	249
8. Paar-Korrelationen bei Fermionen und Bosonen	256
Paar-Korrelationsfunktion für Fermionen	256
Paar-Korrelationsfunktion für Bosonen	262
Der Hanbury-Brown und Twiss-Effekt	267
Cooper-Paare	271
9. Quasiteilchen in Plasmen und Metallen	289
Plasmonen und Phononen	296
10. Grundelemente der Quantenstatistik	304
Konzept der Quantenstatistik und Ensemble-Begriff	304
Dichteoperator eines Vielteilchensystems	305
Dynamik des quantenstatistischen Ensembles	317
Geordnete und ungeordnete Systeme — Dichteoperator und Entropie	321
Stationäre Ensembles	324
11. Struktur der Atome	330
Das Zweielektronenatom	330
Die Hartree-Näherung	339
Die Thomas-Fermi-Näherung	341
Das Hartree-Fock Verfahren	346
Das Periodensystem der Elemente	355
Die Aufspaltung der Konfiguration (orbitalen Zustands-Multipletts)	356
Die Spin-Bahn-Wechselwirkung	364
Die Behandlung der Spin-Bahn-Aufspaltung im Hartree-Fock-Verfahren	377
Der Zeemaneffekt	380

12.Elementare Struktur der Moleküle	386
Die Born-Oppenheimer-Näherung	388
Das H_2^+ -Ion als Beispiel	392
Das Wasserstoffmolekül H_2	399
Elektronenpaarung	404
Räumlich orientierte Orbitale	407
Hybridisierung	409
Kohlenwasserstoffe	414
13.Feynmans Pfadintegralformulierung der Schrödingerschen Wellenmechanik	420
Die Rolle der Hamiltonschen Wirkungsfunktion in der klassischen Mechanik und der Schrödingerschen Wellenmechanik	421
Die Übergangsamplitude als Pfadintegral	424
Die Pfadintegraldarstellung des Schrödinger-Propagators	432
Eine alternative Herleitung der Schrödinger-Gleichung	436

Aufgaben und Beispiele

1.1	Aufgabe: Die Coulomb-Eichung	4
1.2	Aufgabe: Die Berechnung der Magnetfeldanteile zur Energie des elektromagnetischen Feldes	12
1.3	Aufgabe: Der Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes . . .	17
1.4	Aufgabe: Matrixelemente mit kohärenten Zuständen	23
1.5	Aufgabe: Das mittlere Schwankungsquadrat der elektrischen Feldstärke im kohärenten Zustand	24
1.6	Beispiel zur Vertiefung: Der Bohm-Aharonov-Effekt	25
2.1	Aufgabe: Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge	46
2.2	Aufgabe: Die Lebensdauer des $2p$ -Zustandes mit $m = 0$ im H-Atom gegen Zerfall in den $1s$ -Zustand	48
2.3	Aufgabe: Die Unmöglichkeit des Zerfalls des $2s$ -Zustands des H-Atoms bei $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -Wechselwirkung	49
2.4	Aufgabe: Der Wechselwirkungsterm zwischen dem Spin des Elektrons und dem elektromagnetischem Feld im Hamiltonoperator . .	50
2.5	Aufgabe: Die Lebensdauer des Grundzustandsniveaus des H-Atoms bei Hyperfeinstrukturaufspaltung	51
2.6	Aufgabe: Der Einphotonenzerfall des $2s$ -Zustandes des H-Atoms	54
2.7	Aufgabe: Der differentielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für die photoelektrische Emission eines Elektrons des H-Atoms (Dipolapproximation)	59
2.8	Beispiel: Das Photonenspektrum des schwarzen Körpers	63
2.9	Aufgabe: Der Comptoneffekt	71
2.10	Aufgabe: Der Zweiphotonenzerfall des $2s$ -Zustandes des H-Atoms	72
2.11	Beispiel zur Vertiefung: Die Feldenergie in Medien mit Dispersion	77
2.12	Aufgabe: Der Tscherenkov-Winkel	89
2.13	Aufgabe: Die Plemjl-Formel	96
3.1	Aufgabe: Wird die Poissonklammer-Algebra von Kommutatoren und Antikommutatoren erfüllt?	104

3.2	Aufgabe: Dreifachkommutatoren bei der Entwicklung der Paraoperatoren	106
3.3	Aufgabe: Zu den Paraoperatoren: Einführung des Operators \hat{C}_{jk}	108
3.4	Aufgabe: Besetzungszahlen von Para-Fermi-Zuständen	110
3.5	Aufgabe: Zu den Bosonen-Vertauschungsrelationen	115
3.6	Beispiel: Konsistenz der Phasenwahl für die Fermi-Zustände mit den Fermionen-Vertauschungsbeziehungen	117
3.7	Aufgabe: Konstanz des Gesamtteilchenzahl-Operators	123
4.1	Beispiel: Die nichtrelativistische Bremsstrahlung	135
4.2	Aufgabe: Der Rutherford-Streuquerschnitt	148
4.3	Aufgabe: Die Lebensdauer des 2s-Zustandes des H-Atoms gegen Zweiphotonzerfall (in zweiter Quantisierung)	150
4.4	Aufgabe: Korrekturen zweiter Ordnung zum Rutherford-Streuquerschnitt	155
5.1	Aufgabe: Anziehung paralleler, leitender Platten auf Grund des Casimir-Effektes	164
5.2	Beispiel: Die Messung des Casimir-Effektes	168
5.3	Beispiel: Casimirs Versuch für ein Modell des Elektrons	170
5.4	Ergänzung: Historische Zwischenbemerkung zur Masse des Elektrons	173
5.5	Beispiel: Das Experiment von Lamb und Retherford	181
5.6	Aufgabe: Die Lamb-Shift	193
6.1	Aufgabe: Das feldtheoretische Vielteilchenproblem	198
6.2	Aufgabe: Die Gleichgewichtslösung der quantenmechanischen Boltzmann-Gleichung	204
6.3	Aufgabe: Die Gleichgewichtslösung der klassischen Boltzmann-Gleichung	210
6.4	Aufgabe: Der Übergang von der Entropieformel des Bose-(Fermi-) Gases zur klassischen Entropieformel	212
6.5	Aufgabe: Beweis des H-Theorems	212
6.6	Beispiel zur Vertiefung: Die Entropie eines Quantengases	222
6.7	Aufgabe: Die Verteilung von N Teilchen auf G Zustände, Anzahl der Kombinationen	227
6.8	Aufgabe: Die Stirling-Formel	228
6.9	Beispiel zur weiteren Vertiefung: Entropie und Information	229

6.10	Beispiel: Der Maxwellsche Dämon	233
7.1	Aufgabe: Koeffizientenwahl zur Bogoliubovtransformation	244
7.2	Aufgabe: Hydrodynamische Analogie zur Superfluidität	254
8.1	Beispiel: Die Paar-Korrelationsfunktion für einen Bosonenstrahl	264
8.2	Aufgabe: Die Bosonenpaar-Korrelationsfunktion in Abhängigkeit des Quantisierungsvolumen	266
8.3	Aufgabe: Die Debye-Frequenz	280
8.4	Aufgabe: Die Korrelationslänge eines Cooper-Paares	284
8.5	Aufgabe: Bestimmung der Kopplungsstärke eines gebundenen Cooper-Paares	287
9.1	Aufgabe: Das elektrostatische Potential einer Ladung im Plasma	299
9.2	Aufgabe: Die klassische Dielektrizitätsfunktion	301
9.3	Aufgabe: Umformung der dielektrischen Funktion $\epsilon(q, \omega)$	302
10.1	Beispiel zur Vertiefung: Dichteoperatoren in zweiter Quantisierung	308
10.2	Aufgabe: Transformationsgleichungen für Feldoperatoren	313
10.3	Aufgabe: Vertauschungsrelationen für Fermionen-Feldoperatoren	314
10.4	Aufgabe: Der Dichteoperator eines Gemisches	319
10.5	Aufgabe: Konstruktion des Dichteoperators eines Systems von unpolarisierten Elektronen	320
10.6	Beispiel zur Vertiefung: Systeme nichtwechselwirkender Fermionen und Bosonen	327
11.1	Aufgabe: Berechnung einiger benötigter Integrale	334
11.2	Aufgabe: Beweis einer Gleichung	348
11.3	Aufgabe: Die Hartree-Fock-Gleichungen als nichtlokale Schrödingergleichungen	350
11.4	Beispiel: Eine Approximation für den Hartree-Fock-Austauschterm	354
11.5	Aufgabe: Anwendung der Hundschen Regel	362
11.6	Beispiel: Das Wigner-Eckart-Theorem	366

11.7 Beispiel: Begründung der Spin-Bahn-Wechselwirkung	370
11.8 Aufgabe: Umformung des Spin-Bahn-Kopplungsterms	376
11.9 Aufgabe: Berechnung des Starkeffekts	383
12.1 Aufgabe: Berechnung eines Überlappintegrals und einiger Matrix- elemente für das H_2^+ -Ion	396
13.1 Aufgabe: Impuls und Energie am Endpunkt einer klassischen Tra- jektorie	423
13.2 Aufgabe: Die Übergangsamplitude $K(b, a)$ für ein freies Teil- chen	431
13.3 Aufgabe: Die Trotter-Produktregel	434

1. Die Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes

Aus den Vorlesungen über klassische Elektrodynamik (Band III) kennen wir die Maxwell-Gleichungen als Grundgleichungen aller klassischen elektromagnetischen Phänomene. In der Quantenelektrodynamik geht es einerseits um die Quantisierung der Maxwell-Gleichungen, andererseits aber auch um die Quantisierung des Elektron-Positron-Feldes, des Pionenfeldes und anderer Felder und ihrer Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld (d.h. den quantisierten elektromagnetischen Wellen). Wir erinnern uns zunächst noch einmal kurz an die klassischen Maxwell-Gleichungen.

Die Maxwell-Gleichungen

Maxwells Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld lauten im Gaußschen Maßsystem, das wir wie schon früher durchweg benutzen werden:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Kombiniert man die Divergenz der zweiten Gleichung mit der zeitlichen Ableitung der dritten, so läßt sich die Kontinuitätsgleichung für die elektrischen Ladungs- und Stromdichten ρ und \vec{j} folgern:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Die elektrischen und magnetischen Feldstärken, \vec{E} und \vec{B} , lassen sich durch das Vektorpotential \vec{A} und das skalare Potential φ ausdrücken

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3)$$

Die erste und dritte Gleichung (1) sind damit offensichtlich sofort identisch erfüllt. Die Potentiale \vec{A} und φ sind nicht eindeutig, denn man erhält dieselben Felder \vec{E} und \vec{B} auch mit den neuen Potentialen \vec{A}' und φ' , die durch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4)$$

gegeben sind. $\chi(\vec{r}, t)$ ist dabei eine willkürliche Funktion des Ortes \vec{r} und der Zeit t . Diese Änderung der Potentiale (4), die keine Änderungen für

die Feldstärken \vec{E} und \vec{B} nach sich zieht, heißt *Eichtransformation*. Wir haben in den Vorlesungen über Quantenmechanik (vgl. Band IV) schon öfters nachgewiesen, daß bei minimaler Kopplung

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (5)$$

die Wellenfunktion Ψ bei einer Umeichung (4) durch

$$\Psi' = \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \chi\right) \quad (6)$$

ersetzt werden muß; dann aber die Form der Wellengleichung (Schrödinger-Gleichung, Pauli-Gleichung etc.) unverändert bleibt. Die Transformationen (6) werden oft auch *Eichtransformationen erster Art*, und die Transformationen (4) *Eichtransformationen zweiter Art* genannt. Setzt man die Gleichungen (3) in die zweite und dritte Maxwell-Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \varphi &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (7)$$

Falls der Vektor \vec{A} in orthogonalen Koordinaten geschrieben wird, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}. \quad (8)$$

Hierbei bedeutet der letzte Term $\vec{\nabla}^2 \vec{A}$ rechts einen Vektor, dessen einzelne Komponenten ΔA_i , d.h. der Laplace-Operator angewandt auf die Komponenten A_i sind. Denkt man sich (8) in (7) eingesetzt, so lassen sich die entstehenden Gleichungen beträchtlich vereinfachen, wenn man eine Eichtransformation (4) zu den neuen Potentialen \vec{A}' , φ' durchführt, die derart bestimmt sind, daß sie die *Lorentzbedingung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

erfüllen. Die Eichfunktion χ kann aus der Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi = - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (10)$$

bestimmt werden. Die Gleichungen (7) lauten dann

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \vec{\nabla}^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (11)$$

Ebene elektromagnetische Wellen

Wenn $\vec{j} = 0$ und $\varrho = 0$, d.h. der Raum vollständig leer ist, läßt sich immer eine Eichfunktion χ finden derart, daß

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t) &= 0, \\ \varphi'(\vec{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

für alle \vec{r} und t . Das gilt in voller Allgemeinheit (vgl. Aufgabe 1.1). Die Eichung (12) heißt *Coulomb-Eichung*. Dann können transversale ebene Wellen als Lösungen für \vec{A}' (und daher auch für \vec{E} und \vec{B}) gefunden werden. Lassen wir im folgenden die Striche bei \vec{A}' und φ' (was sowieso verschwindet) wieder weg, so erhalten wir anstelle von (9) und (11)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \\ \varphi &= 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Eine typische ebene Welle als Lösung von (13) ist durch ein reelles Vektorpotential \vec{A} mit dem Wellenzahlvektor \vec{k} und dem reellen Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}$ gegeben:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= 2\vec{\varepsilon}|\vec{A}_0| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \\ &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.},\end{aligned}\tag{14}$$

wobei $\vec{A}_0 = |\vec{A}_0| \vec{\varepsilon} e^{i\alpha}$ ist und c.c. nichts weiter als "complex conjugate" (das komplex Konjugierte) des vorangehenden Terms bedeuten soll. Man sieht sofort, daß der Ansatz (14) die erste der Gleichungen (13) erfüllt, falls

$$\omega = kc = |\vec{k}|c\tag{15}$$

ist, und die zweite der Gleichungen (13) erfüllt, wenn

$$\vec{A}_0 \perp \vec{k}\tag{16}$$

der Polarisationsvektor \vec{A}_0 transversal ist, also senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor \vec{k} steht. Die elektrischen und magnetischen Felder, zum Vektor-

potential (14) gehörend, bestimmen sich aus (3) zu

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -2k\vec{\varepsilon}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha), \\ \vec{B} &= -2k\times\vec{\varepsilon}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha).\end{aligned}\quad (17)$$

Der *Poynting-Vektor*

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (18)$$

ist offensichtlich in der Richtung von \vec{k} . Im ladungs- und stromfreien Raum ist $\vec{H} = \vec{B}$. Nach Mittelung über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ der Oszillation ergibt sich sein Betrag zu

$$\bar{S} = \frac{\omega^2}{2\pi c} \bar{\varepsilon}^2 \quad (19)$$

wobei $\bar{\varepsilon}^2 = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{A}_0 \cdot \vec{A}_0^*$ ist. Die Größe \bar{S} charakterisiert die Intensität der ebenen Welle.

1.1 Aufgabe: Die Coulomb-Eichung

Zeigen Sie, falls $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ und $\rho = 0$ ist, daß die allgemeinste Lösung der Maxwell-Gleichungen durch Potentiale \vec{A}' und φ' mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ und $\varphi' = 0$ ausgedrückt werden kann (Coulomb-Eichung).

Lösung: Die beiden Bedingungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ und $\rho' = 0$ zusammen sichern automatisch die Gültigkeit der Lorentzbedingung (9). Daher gelten auch die Gleichungen (11). Es entsteht aber nur dann kein Widerspruch zu den beiden Bedingungen, falls $\rho = 0$ und $\text{div } \vec{j} = 0$ ist. Für gegebenes $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\varphi(\vec{r}, t)$ findet man die zur Coulomb-eichung führende Eichfunktion $\chi(\vec{r}, t)$ aus den aus (4) folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = c\varphi(\vec{r}, t), \quad 1$$

$$\vec{\nabla}^2 \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t). \quad 2$$

Aus 1 folgt

$$\chi(\vec{r}, t) = c \int \varphi(\vec{r}, t) dt + \text{const.} \quad 3$$

was zusammen mit 2

$$c \int dt \left[\vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad 4$$

ergibt. Dies ist als Konsistenzbedingung aufzufassen. Wir prüfen ihre Gültigkeit, indem wir von

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

ausgehen und weiterrechnen

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \right) = 4\pi \rho$$

oder

$$-\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{c \partial t} - \vec{\nabla}^2 \varphi \right) = 4\pi \rho. \quad 5$$

Diese Gleichung ist von den Potentialen \vec{A} und φ als Lösungen der Maxwell-Gleichungen immer erfüllt. Wenn $\rho = 0$ ist, folgt also automatisch die Gültigkeit von 4. Damit ist 3 die Eichfunktion und wir können die Coulomb-Eichung immer, ohne Verlust an Allgemeinheit, unter den gegebenen Bedingungen erreichen.

Die Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Wir schreiben die Maxwell-Gleichungen für das Feld ohne Quellen noch einmal auf:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= +\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20)$$

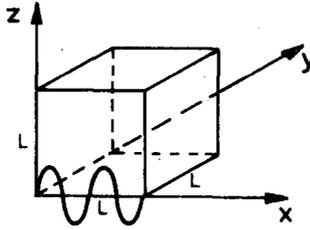
Wählt man die Coulomb-Eichung (13) - vgl. Aufgabe 1.1 -

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

so sind mit (3) die ersten drei Gleichungen (20) identisch erfüllt. Die letzte Gleichung (20) ergibt dann die Wellengleichung für das Vektorpotential

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (22)$$

was aus (13) schon bekannt ist. Bei der Entwicklung der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes ist es vorteilhaft, das Feld durch einen Satz diskreter Variablen zu beschreiben. Wir sperren daher das elektromagnetische Feld in einen großen Kasten (Würfel) vom Volumen $\Omega = L^3$ ein und diskretisieren damit die Normalmoden des Feldes. Das allgemeine \vec{A} -Feld wird dann nach den Normalmoden $\vec{A}_{\vec{k}\sigma}$ entwickelt; die Fourierkoeffizienten $a_{\vec{k}\sigma}(t)$



Der Würfel, in welchem das elektromagnetische Feld eingesperrt wird. Ein Wellenzug mit zwei vollen Wellenlängen entlang der x -Achse ist angedeutet.

sind dann die eigentlichen Feldvariablen, die die Dynamik beschreiben. Ihre Quantisierung werden wir anstreben.

Es erhebt sich die Frage nach den Randbedingungen des Feldes auf den Wänden des Kastens. Am bequemsten ist es, Periodizität von \vec{A} auf den Wänden zu fordern; was bedeutet, daß die Normalmoden dadurch bestimmt werden, daß volle Wellenlängen in den Kasten passen. Mathematisch lautet diese Forderung

$$\begin{aligned}\vec{A}(L, y, z, t) &= \vec{A}(0, y, z, t), \\ \vec{A}(x, L, z, t) &= \vec{A}(x, 0, z, t), \\ \vec{A}(x, y, L, t) &= \vec{A}(x, y, 0, t).\end{aligned}\quad (23)$$

Mit dem Ansatz

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z) e^{i\omega t}\quad (24)$$

folgt aus (22)

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{A}(x, y, z) = 0.\quad (25)$$

Setzen wir

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \text{also } \omega_k^2 = c^2 k^2,\quad (26)$$

so ergibt sich

$$\vec{A}_{\vec{k}\sigma} = N_k \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \sigma = 1, 2,\quad (27)$$

wobei $\vec{\epsilon}_{\vec{k}1}$ und $\vec{\epsilon}_{\vec{k}2}$ zwei Polarisationsvektoren sind, die wegen der aus (21) und (27) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ folgenden Transversalitätsbedingung

$$\vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} = 0\quad (28)$$

senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \vec{k} stehen müssen.