

# **Strukturoptimierung**

## **Grundlagen und Anwendungen**





Edition  
Harri   
Deutsch 

# Strukturoptimierung

## Grundlagen und Anwendungen

von

Lothar Harzheim

**3. überarbeitete und erweiterte Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56580**

**Der Autor:**

Prof. Dr. Lothar Harzheim arbeitete nach seiner Promotion zunächst in der Gruppe von Prof. Dr. Mattheck (Deutscher Umweltpreis 2003) an der Entwicklung der bionischen Optimierungsprogramme CAO und SKO mit, bevor er zur Simulationsabteilung der Firma Opel wechselte.

Als Verantwortlicher für den Bereich Optimierung, Bio-Engineering und Robustheit hat er nicht nur die Optimierung im Unternehmen eingeführt und angewendet, sondern auch durch eigene Programme zur Topologieoptimierung den heutigen Entwicklungsstand mitgeprägt.

Prof. Dr. Harzheim hält regelmäßig Vorträge und Seminare zur Angewandten Strukturoptimierung, unter anderem als Honorarprofessor an der TU Darmstadt.

3. überarbeitete und erweiterte Auflage 2019

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5882-9

ISBN 9-783-8085-5883-6 (E-Book)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2019 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

# Vorwort zur dritten Auflage

Neben einigen kleineren Korrekturen wurden in der dritten Auflage folgende Kapitel in großen Teilen modifiziert oder ergänzt:

- 3.1.4 Skalierung der Restriktionen und Festlegung der Parameter: Es wurde die dynamische Anpassung der Straffunktion-Skalierung ergänzt.
- 7.1.2.3 Die Beta-Methode: Es wurden Formulierungen für Frequenzgangrestriktionen ergänzt.
- 8.2.1.6.1 Formoptimierung eines Vorderachslenkers: Das Optimierungsproblem wurde praxisgerechter umformuliert. Weiterhin wurden Varianten für verschiedene Zielsetzungen vorgestellt und die Optimierungsergebnisse verglichen und diskutiert.
- 10.4 Generelle Bemerkungen zu den stochastischen Optimierungsverfahren: Es wurden zusätzliche Möglichkeiten zur Berücksichtigung von Restriktionen ergänzt.

Weiterhin wurden zwei Kapitel mit neuen Themen und ein Kapitel mit einer Anwendung hinzugefügt:

- 6.2.5.3 Fluch der Dimensionalität
- 10.2.1.3 Differentielle Evolution (DE)
- 7.4.4 Optimierung eines Instrumententafelträgers unter Berücksichtigung von Frequenzgangrestriktionen

Wie auch bei den beiden vorherigen Auflagen möchte ich mich hier ganz herzlich bei all denen bedanken, die mich auf Fehler hingewiesen oder Modifikationen und Ergänzungen vorgeschlagen haben. Dies gilt vor allem für Herrn Michael Alb, auf dessen Anregung hin ich das Kapitel 10.2.1.3 hinzugefügt habe und dessen Restriktionsformulierung für die Differentielle Evolution in Kapitel 10.4 eingeflossen ist. Weiterhin gilt mein Dank meinem Kollegen Dr. Rainer Immel, dessen kritischer Blick und Diskussionsbereitschaft immer wieder hilfreich und inspirierend sind.

Verlagsseitig wurde ich wieder in der bewährten professionellen und freundlichen Art von Herrn Klaus Horn betreut. Ich fand wie gewohnt bei jedem Problem stets ein offenes Ohr und eine schnelle umfassende Hilfe. Ganz herzlichen Dank dafür. Ebenso sei Herrn Dr. Steffen Naake gedankt, der das Format wieder so zügig und professionell umgesetzt hat.

Ganz besonderen Dank gilt wieder meiner Familie und insbesondere meiner Frau Brigitte für die immerwährende Unterstützung bei diesem Projekt.

Mainz, im Frühjahr 2019

Lothar Harzheim



# Vorwort zur ersten Auflage

## Zum Buch

Dieses Buch ist im Rahmen der 3-stündigen Vorlesung „Angewandte Strukturoptimierung“ entstanden, die an der TU Darmstadt im Fachgebiet für Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau (fmb) in jedem Wintersemester angeboten wird. Es ist somit für Einsteiger geeignet, die sich in das Gebiet der Optimierung einarbeiten und die einen Überblick über die gängigsten und bewährtesten Optimierungsverfahren und deren Anwendungen gewinnen möchten. Darüber hinaus soll jedoch mit dem Buch auch dem erfahrenen Anwender ein Nachschlagewerk zur Verfügung gestellt werden. Um dieser doppelten Zielsetzung gerecht zu werden, ist es auch um diejenigen Details, Herleitungen und Optimierungsverfahren ergänzt, die in einer Vorlesung aus Zeitgründen nicht behandelt werden können. Dennoch hat das Buch keinen streng mathematischen Aufbau. Vielmehr steht an erster Stelle die Vermittlung der Idee eines Verfahrens bzw. einer Strategie, die – wo immer möglich – zu Beginn eines Kapitels dargestellt wird. In den Fällen, in denen die Idee nur im Zuge einer Herleitung entwickelt werden konnte, wurde der Text so angelegt, dass der Leser auch dann ein Verfahren verstehen kann, wenn er nicht alle Details nachvollzieht. Damit wird das Buch auch dem Leser gerecht, der nicht an den Einzelheiten interessiert ist – oder der sich zuerst einen Überblick verschaffen will, ehe er sich mit den Feinheiten befasst. Da wichtige Zusammenhänge hergeleitet und Details beschrieben werden, wird auf der anderen Seite auch derjenige fündig, der mehr in die Tiefe gehen will.

Das Buch besteht inhaltlich aus zwei Teilen. Im ersten, von einer speziellen Anwendung unabhängigen Teil, werden die theoretischen Grundlagen, die Lösungsverfahren und Optimierungsstrategien dargestellt. So können die vorgestellten Optimierungsverfahren und Strategien für alle Probleme eingesetzt werden, die sich mithilfe einer Simulation beschreiben lassen. Aus der mittlerweile unüberschaubaren Anzahl von Optimierungsalgorithmen werden in diesem Buch nur diejenigen dargestellt, die sich in der praktischen Anwendung bewährt haben oder zumindest für das Verständnis bewährter Algorithmen wichtig sind. Eine solche Auswahl kann natürlich immer nur subjektiv sein.

Der zweite Teil behandelt die spezielle Anwendung im Bereich der Strukturoptimierung. Er geht darauf ein, wie die Kopplung der FEM-Programme an die Optimierungssoftware vorgenommen wird und welche Besonderheiten bei der Formulierung des Optimierungsproblems zu beachten sind. Insbesondere die Form- und Topologieoptimierung werden ausführlich behandelt und deren Anwendungsmöglichkeiten anhand zahlreicher Beispiele aus der Praxis veranschaulicht.

Es ist ein Ziel des Buches, die Möglichkeiten aufzuzeigen, die heutzutage im Bereich der Strukturoptimierung zur Verfügung stehen; keinesfalls soll eine konkrete Software-Empfehlung gegeben werden. Zwar werden bei den Anwendungen die Namen der Optimierungsprogramme genannt, mit denen – weil sie im Arbeitsumfeld vorhanden waren – die Optimierung durchgeführt wurde, die Programme anderer Hersteller bieten aber häufig die gleiche oder zumindest eine vergleichbare Funktionalität. Solche alternativen Programme sind im Text auch erwähnt und im Anhang B zusammengefasst (jedoch erhebt die Liste keinen Anspruch auf Vollständigkeit).

## Zu den Abbildungen und Anwendungsbeispielen

Alle Anwendungsbeispiele mit den dazugehörigen Abbildungen sind während meiner Tätigkeit am Internationalen Technischen Entwicklungszentrum der Adam Opel GmbH in Rüsselsheim entstanden und mit freundlicher Genehmigung der Adam Opel GmbH freigegeben worden.

## Danksagung

In das Buch sind die Ergebnisse vieler Fachvorträge und Diskussionen eingeflossen. Mein Dank gilt somit all denjenigen, mit denen ich während meiner langjährigen Tätigkeit auf dem Gebiet der Optimierung Fachgespräche geführt und offene Fragen und Probleme diskutiert habe. Besonders intensiv ist ein solcher Erfahrungsaustausch natürlich im täglichen Arbeitsumfeld. So gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Claus Mattheck, bei dem ich während der dreijährigen Mitarbeit in seiner Gruppe über CAO und SKO den Zugang zur Optimierung gefunden habe. Weiterhin möchte ich mich für die konstruktive and angenehme Zusammenarbeit bei den Kollegen aus den verschiedenen Fachbereichen der Simulationsabteilung der Adam Opel GmbH bedanken, ohne die eine erfolgreiche Anwendung der Optimierungsalgorithmen nicht möglich gewesen wäre. Besonders möchte ich mich dort bei folgenden Personen bedanken: Bei meinem ehemaligen Chef Herrn Gerhard Graf, der gerade in der Einführungsphase der Optimierung immer ein hilfsbereiter und kompetenter Ratgeber bei auftretenden Problemen war und der mir die notwendige Freiheit gegeben hat, neue Ideen und Verfahren auszuprobieren. Bei Herrn Stefan Klug, der in den Anfangszeiten der Topologieoptimierung mit seiner professionellen Umsetzung der Designvorschläge in ein fertigbares Design maßgeblich zum Erfolg und zur Akzeptanz der Methode beigetragen hat. Bei meinem Kollegen Dr. Don Jones aus dem GM-TEC Center in Detroit, der mir Kriging und die funktionale Varianzanalyse nahegebracht und bei Fragen und Problemen Hilfestellung geleistet hat und dies auch heute noch tut. Bei meinem ehemaligen Kollegen Prof. Dr. Axel Schumacher für die zahlreichen inspirierenden Diskussionen und die angenehme, fruchtbare Zusammenarbeit bei den gemeinsamen Projekten. Bei meinem Kollegen Dr. Karsten Bohle, von dem die Grundidee des „Sensitivity Trackings“ stammt, für die anregenden Diskussionen und den Erfahrungsaustausch zum Thema Approximation und Robustheit.

Nicht nur von der fachlichen Seite her gab es Hilfestellung zu diesem Buch. So gilt mein Dank meinem Schwiegervater Herrn Heinz Kloth, der die Arbeit auf sich genommen hat, die erste Fassung des Buches durchzulesen, um all diese Fehler zu finden, die man als Autor so gerne überliest, weil man ja „weiß“, was dort stehen soll. Weiterhin gilt mein Dank dem Verlag Harri Deutsch, der dieses Buchprojekt ermöglicht hat. Insbesondere möchte ich mich für die angenehme und konstruktive Zusammenarbeit bei Herrn Klaus Horn bedanken, der mich während der gesamten Entstehungsphase des Buchs beraten und unterstützt hat und durch dessen Hilfe das Buch zum Schluss den letzten Schliff erhalten hat. Das gilt auch für Herrn Dr. Steffen Naake, der die Vorlage so zügig und kompetent in ein professionelles Erscheinungsbild umgesetzt hat. Weiterhin gilt mein Dank den Leitern der Simulationsabteilung und der Öffentlichkeitsarbeit der Adam Opel GmbH, die mich zu diesem Projekt ermutigt und dabei unterstützt haben. Besonders möchte ich mich bei meinen Eltern Helga und Otto Harzheim bedanken, denn ohne ihre Unterstützung während meiner Ausbildung wäre dieses Buch niemals entstanden. Mein besonders herzlicher Dank gilt jedoch meiner Familie, die während der Fertigstellungsphase an den zahlreichen Wochenenden und freien Tagen auf ihren Ehemann bzw. Vater verzichtet und damit dieses Projekt erst ermöglicht hat.

**Für  
Brigitte,  
Jens, Maike und Achim**



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	1
1.1	Optimierungstypen	3
1.2	Motivation und Grundbegriffe der Optimierung	4
1.3	Allgemeine Form des Optimierungsproblems	7
1.4	Optimierung basierend auf linearer und nichtlinearer Analyse	10
1.5	Konvexität	10
<b>2</b>	<b>Optimierung ohne Restriktionen</b>	14
2.1	Eindimensionale Optimierung (Liniensuche)	14
2.1.1	Einklammern des Minimums	15
2.1.2	Methode des goldenen Schnitts	15
2.1.3	Polynominterpolation	18
2.1.4	Unvollständige Liniensuche	19
2.2	Mehrdimensionale Optimierung	20
2.2.1	Nelder-Mead-Simplexverfahren	20
2.2.2	Suchrichtungsmethoden	22
2.2.2.1	Methoden 0-ter Ordnung	23
2.2.2.2	Methoden 1-ter Ordnung	26
2.2.2.2.1	Methode des steilsten Abstiegs	27
2.2.2.2.2	Konjugierte Suchrichtungen	28
2.2.2.2.3	Methode der konjugierten Gradienten (Methode nach Fletcher und Reeves)	30
2.2.2.3	Methoden 2-ter Ordnung: Quasi-Newton-Methode	33
2.2.2.4	Skalierung von Designvariablen	36
2.3	Abbruchkriterien	38
<b>3</b>	<b>Optimierung mit Restriktionen</b>	39
3.1	Indirekte Methoden	39
3.1.1	Externe Straffunktion	39
3.1.2	Interne Straffunktion	41
3.1.3	Erweiterte interne Straffunktion	41
3.1.4	Skalierung der Restriktionen und Festlegung der Parameter	43
3.1.5	Die erweiterte Lagrange-Methode	45
3.1.5.1	Erweiterte Lagrange-Methode für Gleichheitsrestriktionen	46
3.1.5.2	Erweiterte Lagrange-Methode für Ungleichheitsrestriktionen	47
3.2	Direkte Methoden	48
3.2.1	Eindimensionale Optimierung mit Restriktionen	48
3.2.1.1	Einklammern des Minimums	48
3.2.1.2	Methode des goldenen Schnitts	49
3.2.1.3	Polynominterpolation	50
3.2.2	Mehrdimensionale Optimierung mit Restriktionen	51
3.2.2.1	Kuhn-Tucker-Bedingungen	51
3.2.2.2	Zoutendjiks Methode der zulässigen Richtungen	56
3.2.2.3	Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen	60
3.2.2.4	Starten im unzulässigen Bereich	61
3.2.2.5	Die generalisierte Methode der reduzierten Gradienten	62

<b>4</b>	<b>Lagrange-Funktion und Dualität</b>	65
4.1	Lagrange-Funktion mit Gleichheitsrestriktionen	65
4.2	Lagrange-Funktion mit Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktionen	66
4.3	Sattelpunkteigenschaften	68
4.4	Dualität	69
4.4.1	Primale Methode	69
4.4.2	Duale Methode	70
4.4.3	Dualität bei separierbaren Problemen	74
4.5	Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren	76
<b>5</b>	<b>Optimalitätskriterienverfahren</b>	79
5.1	Das Prinzip vom voll beanspruchten Tragwerk	79
5.2	Die adaptive biologische Wachstumsregel	81
5.3	Optimalitätskriterien aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen	84
<b>6</b>	<b>Approximationsverfahren</b>	85
6.1	Lokale Approximation	85
6.1.1	Lineare und quadratische Approximation	86
6.1.1.1	Sequenzielle lineare Programmierung	87
6.1.1.2	Sequenzielle quadratische Programmierung	89
6.1.1.3	Successive Response Surface Method	89
6.1.2	Reziproke Approximation	92
6.1.3	CONLIN	93
6.1.4	MMA (Method of Moving Asymptotes)	93
6.2	Globale Approximation	99
6.2.1	Lineare Regression	101
6.2.1.1	Polynome	101
6.2.1.2	Bestimmung der Regressionsparameter	102
6.2.1.3	SVD (Singular Value Decomposition)	103
6.2.1.4	Die Moving-Least-Square-Methode	106
6.2.1.5	Sequenzielle Antwortflächen-Methode	108
6.2.2	Nichtlineare Regression	108
6.2.2.1	Neuronale Netzwerke	109
6.2.2.2	Bestimmung der Regressionsparameter	111
6.2.2.3	Levenberg-Marquardt-Methode	111
6.2.3	Statistische Test- und Fehlerterme	113
6.2.4	Interpolationen	114
6.2.4.1	Kriging	114
6.2.4.2	Radiale Basisfunktionen	122
6.2.5	Versuchsplanung	128
6.2.5.1	Klassische Versuchsplanung	130
6.2.5.1.1	Vollständig faktorielle Versuchspläne	131
6.2.5.1.2	Koshal Designs	132
6.2.5.1.3	D-Optimale Versuchspläne	133
6.2.5.2	Moderne Versuchsplanung	134
6.2.5.2.1	Monte Carlo Sampling	134
6.2.5.2.2	Latin Hypercube Sampling	134
6.2.5.2.3	Orthogonal Arrays	136
6.2.5.2.4	Randeffekt	137
6.2.5.3	Fluch der Dimensionalität	138

6.2.6	Test der Vorhersagegüte . . . . .	140
6.2.7	Vergleich der globalen Approximationen und Optimierungsstrategie . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Kopplung an FEM</b> . . . . .	<b>150</b>
7.1	Strukturantworten und Formulierungen des Optimierungsproblems . . . . .	150
7.1.1	Bauteilsteifigkeit . . . . .	150
7.1.2	Das Min-Max-Problem . . . . .	152
7.1.2.1	Die direkte Formulierung . . . . .	152
7.1.2.2	Die $p$ -Norm . . . . .	153
7.1.2.3	Die Beta-Methode . . . . .	153
7.1.2.4	Die Kreisselmeier-Steinhauser-Funktion (KS-Funktion) . . . . .	157
7.1.3	Frequenzen . . . . .	160
7.1.4	Weitere Strukturantworten . . . . .	162
7.1.5	Berücksichtigung von mehreren Lastfällen . . . . .	162
7.2	Sensitivitätsanalyse . . . . .	163
7.2.1	Finite Differenzen . . . . .	163
7.2.2	Analytische und semi-analytische Sensitivitätsanalyse . . . . .	165
7.2.2.1	Die direkte Methode . . . . .	165
7.2.2.2	Die adjungierte Methode . . . . .	166
7.2.2.3	Exakte semi-analytische Sensitivitäten . . . . .	168
7.3	Programmsysteme zur Optimierung . . . . .	170
7.3.1	Programme mit integriertem Optimierungsalgorithmus . . . . .	171
7.3.2	Externe Optimierer . . . . .	173
7.4	Anwendung: Dimensionierung . . . . .	174
7.4.1	Wandstärkenoptimierung von Blechbauteilen einer Karosserie . . . . .	175
7.4.2	Optimierung einer Karosseriestruktur unter Einsatz von Blechen mit variabler Wandstärke . . . . .	176
7.4.3	„Taylor Rolled Blank“ Optimierung eines Lenkungsquerträgers . . . . .	183
7.4.4	Optimierung eines Instrumententafelträgers unter Berücksichtigung von Frequenzgangrestriktionen . . . . .	184
<b>8</b>	<b>Formoptimierung</b> . . . . .	<b>187</b>
8.1	CAD-basierte Formoptimierung . . . . .	188
8.1.1	Anwendungsbeispiele . . . . .	190
8.1.1.1	Formoptimierung eines Torsionsprofils . . . . .	190
8.1.1.2	Formoptimierung eines Motorhalters . . . . .	191
8.2	FE-Netz-basierte Formoptimierung . . . . .	192
8.2.1	Sensitivitätsbasierte Formoptimierung . . . . .	193
8.2.1.1	Erzeugung von Formbasisvektoren über Lastfälle . . . . .	197
8.2.1.2	SHAPE200 . . . . .	198
8.2.1.3	Morphing . . . . .	206
8.2.1.3.1	Grundversion von Morphing . . . . .	206
8.2.1.3.2	Erweitere Version von Morphing . . . . .	209
8.2.1.3.3	Freiformoptimierung . . . . .	209
8.2.1.4	Sickenoptimierung . . . . .	210
8.2.1.5	Diskussion der Vor- und Nachteile der Formoptimierung mit Formbasisvektoren . . . . .	214
8.2.1.6	Anwendungen . . . . .	214
8.2.1.6.1	Formoptimierung eines Vorderachslenkers . . . . .	214
8.2.1.6.2	Formoptimierung eines Motorhalters . . . . .	221
8.2.1.6.3	Formoptimierung eines Kunststoff-Spritzgussteils . . . . .	223

	8.2.1.6.4	Formoptimierung eines Karosserie-Blechbauteils . . . . .	225
	8.2.1.6.5	Sickenoptimierung einer Ersatzradmulde . . . . .	227
	8.2.1.6.6	Sickenoptimierung einer Fahrzeugbodengruppe . . . . .	228
8.2.2		Das CAO-Verfahren . . . . .	229
	8.2.2.1	Wachstumssimulation mithilfe einer Wachstumsschicht . . . . .	231
	8.2.2.2	Direkte Methode der Wachstumssimulation . . . . .	232
	8.2.2.3	Berücksichtigung von geometrischen Restriktionen . . . . .	234
	8.2.2.4	Das CAIO-Verfahren . . . . .	237
	8.2.2.5	Diskussion der Vor- und Nachteile des CAO-Verfahrens . . . . .	237
	8.2.2.6	Anwendungen . . . . .	238
	8.2.2.6.1	Beispiele aus der Natur . . . . .	238
	8.2.2.6.2	Formoptimierung eines Achsschenkels . . . . .	240
	8.2.2.6.3	Formoptimierung eines Differenzialkäfigs . . . . .	240
	8.2.2.6.4	Formoptimierung eines Karosserie-Blechbauteils . . . . .	241
<b>9</b>		<b>Topologieoptimierung . . . . .</b>	<b>243</b>
9.1		Mathematische Topologieoptimierung . . . . .	245
	9.1.1	E-Modul – Dichte-Relation . . . . .	245
	9.1.1.1	Die Homogenisierungsmethode . . . . .	246
	9.1.1.2	Der SIMP-Ansatz . . . . .	249
	9.1.2	Optimierungsziele und Lösungsverfahren . . . . .	250
	9.1.2.1	Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit . . . . .	251
	9.1.2.2	Dynamische Topologieoptimierung . . . . .	255
	9.1.2.2.1	Künstliche Eigenformen . . . . .	256
	9.1.2.2.2	Modellierungsschwäche . . . . .	257
	9.1.2.3	Duale Methode . . . . .	263
	9.1.3	Topologieoptimierung mit nachgezogener Lasteinleitung . . . . .	267
	9.1.4	Mathematische und numerische Probleme . . . . .	269
9.2		Empirische Topologieoptimierung . . . . .	275
	9.2.1	Das SKO-Verfahren . . . . .	275
	9.2.2	TopShape . . . . .	277
	9.2.3	Weitere empirische Optimierungsverfahren . . . . .	280
9.3		Vergleich von SKO und mathematischen Verfahren . . . . .	281
9.4		Die Level Set Methode . . . . .	281
9.5		Anwendungen . . . . .	289
	9.5.1	Akademische Beispiele . . . . .	289
	9.5.2	Praktische Anwendungen . . . . .	291
	9.5.2.1	Auffinden einer optimalen Lochanordnung . . . . .	292
	9.5.2.2	Bestimmung einer optimalen Sickenanordnung . . . . .	298
	9.5.2.3	Ermittelung von optimalen Merkmalen von Gussteilen . . . . .	301
	9.5.2.3.1	Topologieoptimierung ohne Gussteilrestriktionen . . . . .	302
	9.5.2.3.2	Topologieoptimierung mit Gussteilrestriktionen . . . . .	311
	9.5.2.4	Topologieoptimierung eines Querträgers . . . . .	324
	9.5.2.5	Topologieoptimierung eines Hinterwagens . . . . .	328
	9.5.2.6	Designerstuhl . . . . .	329
	9.5.2.7	Optimierung von Schweißpunkten . . . . .	330
	9.5.3	Weitere Anwendungsbereiche . . . . .	332
<b>10</b>		<b>Globale Optimierungsverfahren . . . . .</b>	<b>335</b>
10.1		Multistart . . . . .	335

10.2	Globale Optimierungsverfahren aus dem Bereich der Bionik . . . . .	336
10.2.1	Evolutionäre Algorithmen . . . . .	336
10.2.1.1	Evolutionstrategien (ES) . . . . .	337
10.2.1.2	Genetische Algorithmen (GA) . . . . .	340
10.2.1.3	Differentielle Evolution (DE) . . . . .	343
10.2.1.4	Abschließende Bemerkungen zu den evolutionären Algorithmen . .	346
10.2.2	Optimierung mit Teilchenschwärmen (Particle Swarm Optimization) . . . . .	346
10.3	Simulated Annealing . . . . .	356
10.4	Generelle Bemerkungen zu den stochastischen Optimierungsverfahren . . . . .	357
10.5	Der EGO-Algorithmus . . . . .	359
10.6	Würfeln auf dem Computer . . . . .	361
10.7	Globale Optimierungsstrategien . . . . .	362
<b>11</b>	<b>Optimierungsstrategien . . . . .</b>	<b>364</b>
11.1	Mehrzieloptimierung . . . . .	364
11.1.1	Zielgewichtung . . . . .	367
11.1.2	Formulierung mit der KS-Funktion . . . . .	370
11.1.3	Methode der Abstandsfunktionen . . . . .	371
11.1.4	Restriktionsformulierung . . . . .	372
11.1.5	Pareto-Front Bestimmung über Versuchsplanung . . . . .	373
11.1.6	Pareto-basierte genetische Algorithmen . . . . .	374
11.2	Multidisziplinäre Optimierung . . . . .	374
11.3	Die ESL (Equivalent Static Loads) Methode . . . . .	377
11.4	Bestimmung der wichtigsten Designvariablen und Reduktion der Variablen . . . . .	381
11.4.1	Bestimmung der wichtigsten Variablen über lokale Sensitivitäten . . . . .	382
11.4.2	Bestimmung der wichtigsten Variablen über globale Sensitivitäten . . . . .	382
11.4.2.1	Globale Sensitivitäten aus finiten Differenzen . . . . .	383
11.4.2.2	Globale Sensitivitäten über eine Varianzanalyse (ANOVA) . . . . .	384
11.4.2.2.1	Lineares Regressionsmodell . . . . .	385
11.4.2.2.2	Funktionale Varianzanalyse . . . . .	386
11.4.2.2.3	Diskrete Varianzanalyse . . . . .	394
11.4.3	Verfolgen von Sensitivitäten . . . . .	398
11.5	Robustheits- und Zuverlässigkeitsoptimierung . . . . .	401
11.5.1	Gegenüberstellung von Versuch und Simulation . . . . .	403
11.5.2	Statistische Grundlagen . . . . .	406
11.5.3	Stochastische Simulation . . . . .	412
11.5.3.1	Monte-Carlo-Methode und lineares Regressionsmodell . . . . .	414
11.5.3.2	Latin Hypercube Sampling . . . . .	416
11.5.3.3	Die FOSM-Methode . . . . .	416
11.5.3.4	Variation der Eingangsstreuung . . . . .	418
11.5.3.5	Funktionale Varianzanalyse . . . . .	418
11.5.3.6	Diskrete Varianzanalyse . . . . .	421
11.5.4	Formulierungen des Optimierungsproblems . . . . .	421
11.6	Anwendungsbeispiele . . . . .	430
11.6.1	Robustheitsanalyse und Optimierung des Systems Fensterrahmen/Türdichtung	430
11.6.2	Optimierung und Robustheitsuntersuchung einer Mehrlenkerhinterachse hinsichtlich des Rollgeräusches . . . . .	438
11.6.3	Robustheitsoptimierung eines Verzweigungsproblems beim Pendelumschlagen eines Hinterachsstabilisators . . . . .	453
11.6.3.1	Die „Pushing-Away“-Strategie . . . . .	459
11.6.3.2	Metamodell basierte Robustheitsoptimierung . . . . .	461

---

11.6.4	Multidisziplinäre Wandstärkenoptimierung einer Karosserie . . . . .	463
11.6.5	Multidisziplinäre Form- und Wandstärkenoptimierung einer Sitzquerträger- Struktur . . . . .	465
<b>12</b>	<b>Literatur</b> . . . . .	475
	<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	496

# 1 Einleitung

Optimierung ist eine Strategie, die in vielen Bereichen des täglichen Lebens angewendet wird. So wird beispielsweise versucht, Ampelschaltungen zu optimieren, Aktienkurse und Gewinne zu maximieren, Verluste zu minimieren, ein Produkt mit möglichst geringen Kosten herzustellen und eine Ware zu dem günstigsten Preis zu erwerben, um nur einige Beispiele zu nennen. Offenbar entspricht es dem menschlichen Wesen, immer das Optimale anzustreben und das Bestmögliche herauszuholen.

Dieses Buch beschränkt sich nur auf einen Ausschnitt der möglichen Optimierungsanwendungen und Strategien, indem nur die simulationsgestützte Optimierung [4], [16], [17], [27], [127], [222], [283] betrachtet wird. Dies bedeutet, dass ein mathematisches Modell für das zu optimierende Problem vorliegen muss. Mit diesem Modell können dann die Ausgabegrößen beziehungsweise die Systemantworten bestimmt werden, welche wiederum von den Eingabegrößen wie Variablen und Parametern abhängen. Dabei kann es sich bei dem Modell um eine Simulation des Problems in analytischer oder numerischer Form oder auch um eine Approximation handeln, die aus einer Anzahl vorliegender Datenpunkte aufgebaut worden ist. Im letzteren Fall müssen die Daten nicht zwangsweise das Ergebnis einer Simulation sein, sondern können auch aus einem Experiment stammen.

Die zweite Einschränkung besteht darin, dass sich der Anwendungsbereich auf die Strukturoptimierung [21], [31], [118], [132], [169], [333], [382], also auf die Optimierung mechanischer Strukturen beschränkt. Viele der behandelten Grundlagen und Optimierungsalgorithmen gelten jedoch in den meisten Fällen für jede simulationsgestützte Optimierung.

In den Ingenieurbereichen hat die Simulation in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen, und ein Ende dieser Entwicklung ist zurzeit noch nicht absehbar. So verlagert sich beispielsweise in der Automobilindustrie der Schwerpunkt von der versuchsbasierten Entwicklung immer mehr hin zur virtuellen Entwicklung. Durch diese Schwerpunktsverlagerung in Richtung der Simulation im Entwicklungsprozess ist auch die Bedeutung der simulationsgestützten Optimierung gewachsen und eröffnet auch vollkommen neue Einsatzmöglichkeiten. So wäre es vor Jahren unvorstellbar gewesen, dass es mithilfe der Optimierung möglich ist, für ein Gussbauteil den optimalen Querschnitt und die optimale Anzahl und Anordnung der Rippen innerhalb des Profils zu finden.

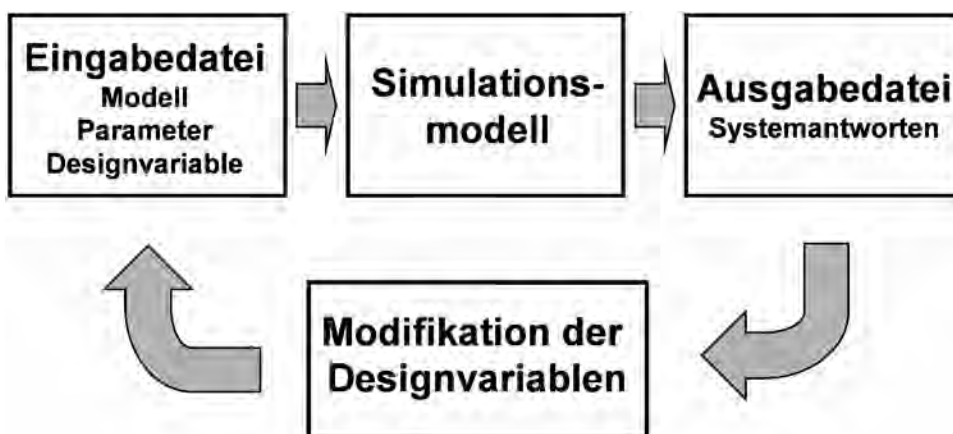


Abb. 1.1 Struktur eines simulationsgestützten Optimierungsprozesses

In Abbildung 1.1 ist ein typischer Ablauf eines simulationsgestützten Optimierungsprozesses dargestellt. Als Eingabegrößen liegt in einer Eingabedatei neben der Modellbeschreibung ein Satz von Parametern und Designvariablen vor. Erstere sind fest vorgegeben und können nicht mehr verändert werden, während letztere in einen vorgegebenen Bereich variiert werden können. Beispiele für Eingabeparameter sind Materialkennwerte eines vorgegebenen Werkstoffs und für Designvariable die Wandstärken von Blechen. Mit dem mathematischen Modell werden dann die Systemantworten (Responses), die von Interesse sind, bestimmt, wie beispielsweise das Gewicht, Verschiebungen, Spannungen oder Eigenfrequenzen. Die Aufgabe des Ingenieurs besteht nun darin, die Werte der Systemantworten zu interpretieren und zu beurteilen. Liegen diese außerhalb des zulässigen Bereiches oder sollen diese so weit wie möglich verbessert werden, müssen die Designvariablen innerhalb des zulässigen Bereichs solange variiert werden, bis das gewünschte Ergebnis erreicht worden ist. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten, diesen Optimierungsprozess durchzuführen. Er kann manuell ausgeführt werden, das heißt, dass der Ingenieur aufgrund seiner Erfahrung neue Werte für die Designvariablen auswählt. Mit dem modifizierten Eingabesatz wird dann erneut die Berechnung durchgeführt, die neuen Systemantworten beurteilt und daraus gegebenenfalls erneute Änderungen der Designvariablen abgeleitet. Dieser Prozess wird solange wiederholt, bis das Ziel erreicht ist.

Diese manuelle Vorgehensweise ist meistens mühselig und zeitaufwendig. Schneller und einfacher ist es häufig, einen mathematischen Algorithmus einzusetzen, der in den einzelnen Iterationsschritten die Beurteilung der Systemantworten übernimmt und die Veränderung der Designvariablen bestimmt und ausführt. Dabei findet man mit einem solchen Algorithmus häufiger eine bessere Lösung als mit der manuellen Optimierung und dies meistens auch noch mit geringerem Zeitaufwand. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Erfahrung des Ingenieurs nicht mehr wichtig wäre. Im Gegensatz zu den Werbesprüchen einiger Software-Hersteller kann Optimierung im Allgemeinen nicht auf Knopfdruck von einem unerfahrenen Anwender durchgeführt werden. Es ist sicherlich vorstellbar, dass es die eine oder andere Standardoptimierungsaufgabe gibt, die auch ohne großes Hintergrundwissen erfolgreich behandelt werden kann. Generell ist jedoch die Erfahrung des Anwenders für eine erfolgreiche Optimierung wichtig und notwendig. So muss der Anwender beispielsweise das Optimierungsproblem so definieren, dass es auch zu dem gewünschten Ergebnis führt. Dazu gehören sowohl die Auswahl der Designvariablen als auch die Auswahl der Systemantworten, die während der Optimierung berücksichtigt werden sollen. Weiterhin muss das Optimierungsergebnis auf Plausibilität und Qualität hin beurteilt werden.

Man wird häufig gerade von Einsteigern gefragt, wie genau denn die Optimierungsergebnisse sind. Diese Frage ist falsch gestellt. Die Genauigkeit des Ergebnisses wird durch das Simulationsmodell festgelegt und nicht durch das Optimierungsprogramm. Der Optimierungsalgorithmus sucht nur die beste Lösung im Rahmen der Systemantworten, die ihm vom Simulationsmodell zur Verfügung gestellt werden. Hat dieses Modell Schwächen oder Bereiche, in dem das Problem nicht angemessen modelliert wird, kann es vorkommen, dass der Optimierungsalgorithmus gerade in diesem Bereich die beste Lösung findet. Hier ist wieder der qualifizierte Anwender gefragt, der den Gültigkeitsbereich des Simulationsmodells kennt und ja auch bei der manuellen Optimierung dafür sorgen muss, dass dieser nicht verlassen wird. Jedoch deckt gerade ein Optimierungsalgorithmus gerne solche Schwachstellen auf und findet in solchen Fällen häufig die beste Lösung außerhalb des Gültigkeitsbereichs. Ist eine solche Situation eingetreten, muss entweder das Optimierungsproblem neu formuliert oder das Simulationsmodell verbessert werden.

Die Frage nach der Genauigkeit des Modells bezieht sich auch auf die Lastfälle, die bei der Optimierung berücksichtigt werden. Auch ohne Optimierung ist es wichtig, dass alle wichtigen Lastfälle in der Simulation berücksichtigt werden, um das Bauteil oder die Struktur vollständig beurteilen zu können. Fehlt ein wichtiger Lastfall, ist es möglich, dass das Bauteil genau bei diesem versagt. Es gibt jedoch normalerweise einen großen Erfahrungsschatz, welche Lastfälle relevant sind und berücksichtigt werden müssen. Man muss sich dennoch darüber im Klaren sein, dass man

beim Einsatz eines Optimierungsprogramms immer an die Grenzen geht. Gibt es bei der Beurteilung eines Bauteils ohne Optimierung immer noch eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlender Lastfall sich wegen vorhandener Sicherheitsreserven nicht auswirkt, so ist das bei einem optimierten Bauteil meistens nicht der Fall. Man kann vielmehr davon ausgehen, dass ein optimiertes Design genau in dem Lastfall versagen wird, der in der Optimierung nicht berücksichtigt worden ist.

Dies alles zeigt, dass es eine Optimierung auf Knopfdruck im Normalfall nicht geben kann, sondern ein Optimierungsprogramm ein Werkzeug ist, das nur dann effektiv eingesetzt werden kann, wenn es von einem versierten Anwender bedient wird. Deshalb beeinflusst die Qualifikation und die Erfahrung des Anwenders maßgeblich die Qualität des Ergebnisses.

Es soll zum Abschluss dieses Abschnitts noch darauf hingewiesen werden, dass nicht alle Optimierungsprobleme mithilfe eines Optimierungsalgorithmus gelöst werden können, obwohl heute eine große Anzahl von sehr guten und effektiven Optimierungsprogrammen auf dem Markt ist. Der Grund dafür kann sein, dass eine Parametrisierung des Problems gar nicht oder nur mit großem Aufwand möglich ist oder dass die Rechenzeit jeden vernünftigen Rahmen sprengen würde.

## 1.1 Optimierungstypen

Man kann in der Strukturoptimierung zwischen drei verschiedenen Anwendungsbereichen unterscheiden, die in Abbildung 1.2 veranschaulicht sind.

1. Bei der *Dimensionierung* (Sizing) werden nur Zahlenwerte variiert, wie beispielsweise Wandstärken von verschiedenen Blechen einer Karosserie oder Querschnittsflächen von Balken. Diese Zahlenwerte stehen meistens in einer Eingabedatei für die Analyse und können damit leicht modifiziert werden.
2. Bei der *Formoptimierung* muss dagegen die Form modifiziert und dem Optimierungsprogramm die möglichen Formvariationen übergeben werden. Dies kann je nach Problemstellung und verfügbaren Programmen sehr schwierig und zeitaufwendig sein. Die Formoptimierung stellt somit sicherlich eine der anspruchsvollsten und arbeitsintensivsten Form der Optimierung dar.
3. In der *Topologieoptimierung* geht man noch einen Schritt weiter, indem auch das Entstehen von Löchern innerhalb einer Komponente zugelassen wird. Dass diese auf den ersten Blick noch anspruchsvollere Form der Optimierung einfach in der Anwendung ist und damit überhaupt in der Praxis Anwendung gefunden hat, verdankt sie der Tatsache, dass die wirkliche Kontur durch eine Dichteverteilung approximiert wird.

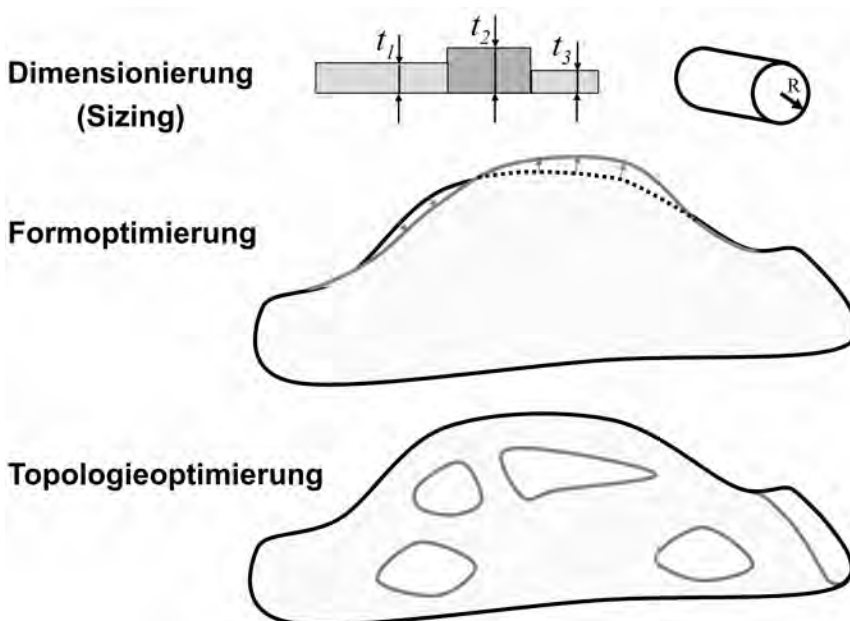


Abb. 1.2 Veranschaulichung der verschiedenen Optimierungstypen

Auf die Details der einzelnen Optimierungstypen und deren Anwendung wird später ausführlich eingegangen.

## 1.2 Motivation und Grundbegriffe der Optimierung

Um mit der Struktur von Optimierungsproblemen vertraut zu werden, soll zu Anfang ein einfaches Optimierungsproblem betrachtet werden. In Abbildung 1.3 ist eine Blechplatte gezeigt, aus der eine Box gefertigt werden soll. Dazu wird an allen Ecken ein Quadrat mit der Kantenlänge  $x$  herausgeschnitten. Die verbleibenden Kanten werden hoch gebogen und die Ecken zusammenschweißt. Die Anforderung lautet nun, den Verschnitt bei der Herstellung der Box möglichst gering zu halten. Dies bedeutet in diesem Fall konkret, dass aus dem verfügbaren Blech eine Box hergestellt werden soll, bei der das Volumen  $V$  maximal ist. Damit kann man das Optimierungsproblem folgendermaßen formulieren:

$$\max V(x), \quad (1.1)$$

Dabei ist das Volumen gegeben als:

$$V(x) = (b - 2x)(a - 2x)x$$

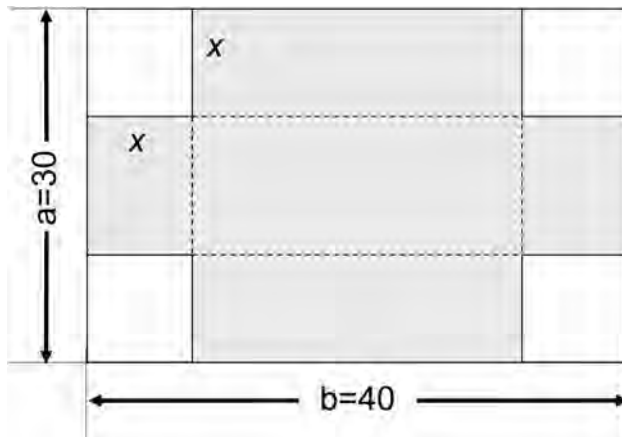


Abb. 1.3 Bemaßung der Blechplatte, aus der eine Box gefertigt werden soll

Die Variable ist in diesem Fall die Kantenlänge  $x$  der entfernten Quadrate beziehungsweise die Höhe der Box. Sie wird in der Optimierung als Designvariable bezeichnet. Diese wird auf einen Wertebereich zwischen 0 und  $a/2$  eingeschränkt, da bei den in Abbildung 1.3 gezeigten Kantenlängen nur dieser Bereich physikalisch sinnvoll ist. Das Optimierungsproblem wird gelöst, indem  $V(x)$  nach der Variablen  $x$  abgeleitet und die Ableitung gleich null gesetzt wird. Man erhält dann

$$\frac{dV}{dx} = ab - 4(a + b)x + 12x^2 = 0, \quad (1.2)$$

woraus sich als physikalisch sinnvolle Lösung ergibt (siehe Abbildung 1.4)

$$x^* = x_1 = \frac{a + b}{6} - \sqrt{\left(\frac{a + b}{6}\right)^2 - \frac{ab}{12}} = 5,7. \quad (1.3)$$

Hier wurde die übliche Notation verwendet, die Designvariable im Optimum mit einem Stern zu kennzeichnen.

Jetzt sollen jedoch die Boxen in Regale gestellt werden, die nur eine Höhe  $\bar{x}$  besitzen. Damit wird das Optimierungsproblem um eine Ungleichheitsrestriktion  $g_1(x)$  erweitert:

$$g_1(x) = x - \bar{x} \leq 0 \quad (1.4)$$

Dabei wurde die Ungleichheitsrestriktion in der Form geschrieben, die in der Optimierung üblich ist. Diese Ungleichheitsrestriktion führt dazu, dass nicht mehr der gesamte Wertebereich von  $x$  zur