

**Taschenbuch
mathematischer Formeln
und moderner Verfahren**

Professor Dr. Horst Stöcker

Judah M. Eisenberg Professor Laureatus an der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main,

Direktor und Senior Fellow des FIAS (Frankfurt Institute for Advanced Studies),
Gründungsdirektor der FIGSS (Frankfurt International Graduate School of Sciences).

Seit August 2007 Wissenschaftlicher Geschäftsführer der GSI (Gesellschaft für Schwerionenforschung).

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1811-3 (Buch)

ISBN 978-3-8171-1812-0 (Buch mit CD-ROM)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Nachdruck der 4., korrigierten Auflage 1999, 2003, 2007

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2007

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Brand-Erbisdorf <www.naake-satz.de>

Druck: Clausen & Bosse, Leck

Printed in Germany

Koautoren (und die von ihnen bearbeiteten Kapitel)

Gesamtdurchsicht für die 4. Auflage

Prof. Dr.-Ing. **Holger Lutz**, FH Gießen-Friedberg,

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. **Monika Lutz**, FH Gießen-Friedberg

Dipl.-Phys. **Jens Konopka**, Uni Frankfurt, **(1 & 2)** mit

Dr.-Ing. Dieter Zetsche, Mercedes-Benz AG, Stuttgart,

Prof. Dr. Helmut Kuhnle, Uni Hohenheim

Dr. **André Jahns**, Uni Frankfurt, **(3 & 4)** mit

Priv.-Doz. Dr. Hans Babovsky, Uni Kaiserslautern,

Dipl.-Phys. Nina Flach, Dresden,

Prof. Dr. Steffen Bohrmann, FHT Mannheim

Dr. **Christoph Hartnack**, Ecole de Mines und Subatech Nantes, **(5 & 16)** mit

Dipl.-Phys. Steffen Bass, Uni Frankfurt,

Prof. Dr.-Ing. Rainer Fremd, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Dr. **Jürgen Schaffner**, Niels Bohr Institut, Kopenhagen, **(6–8 & 12–15)** mit

Dr. **Mario Vidović**, Uni Frankfurt,

Prof. Dr.-Ing. Holger Lutz, FH Gießen-Friedberg,

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. Monika Lutz, FH Gießen-Friedberg

Prof. Dr. **Horst Stöcker**, Uni Frankfurt, **(9)** mit

Dr. Christian Hofmann, TU Dresden,

Dipl.-Ing. Helmut Kutz, Mauser AG, Oberndorf

Dr. **Klaus Rumrich**, Uni Frankfurt, **(10 & 24)** mit

Dipl.-Inform. Inge Rumrich, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Wieland Richter, Uni GH Paderborn

Prof. Dr. **Siegfried Fuchs**, Dresden, **(11 & 21)** mit

Dr. **Raffaele Mattiello**, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Georg Terlecki, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Dr. **Dirk Rischke**, Columbia University, New York, **(17)** mit

Prof. Dr. Rudolf Pitka, FH Frankfurt

Dr. **Thomas Schönfeld**, Uni Frankfurt, **(18)** mit

Prof. Dr. Wilhelm Werner, FH Heilbronn, Außenstelle Künzelsau

Dr. **Volker Blum**, Schumann & Partner, Köln, **(19 & 20)** mit

Dipl.-Phys. **Christoph Best**, Uni Frankfurt,

Phys. Techn. Ass. Astrid Steidl, NTA Isny,

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Wendt, FHT Esslingen

Prof. Dr. **Adolf Grauel**, Uni GH Paderborn, **(22)**

Dipl.-Phys. **Arnd Bischoff**, Uni Frankfurt, **(23)** mit

Prof. Dr. Bernd Schürmann, Siemens AG

Dipl.-Phys. **Markus Hofmann**, Uni Frankfurt, **(24)** mit

Dipl.-Phys. Christian Spieles, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Günter Flach, Dresden

Dipl.-Phys. **Luke Winkelmann**, Uni Frankfurt, **(25)** mit

Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler, FH der Telekom Dieburg

Mit Beiträgen von:

Dipl.-Phys. Thomas Achenbach, FTZ, Telekom, Darmstadt,
Prof. Dr. Jürgen Albrecht, Märkische Fachhochschule,
Prof. Dr. V. Baumgartner, HTW des Saarlandes, Saarbrücken,
Dipl.-Phys. Marcus Bleicher, Uni Frankfurt,
Prof. Dr. Gerhard Brecht, Fachhochschule Lippe,
Dipl.-Ing. Gerd Brinkmann, Leipzig,
Dr. Gerd Buchwald, Hoechst AG,
Prof. Dr. H. Carl, FH Biberach,
Prof. Dr. A. Dobranis, Rheinische FH Köln,
Dipl.-Phys. Adrian Dumitru, Uni Frankfurt,
Dipl.-Phys. Ulrich Eichmann, Uni Frankfurt,
Dr. Norbert Fleischer, Moskau,
Prof. Dr. W. Glaser, FH Hamburg,
Prof. Günter Graf, FH Karlsruhe,
Dipl.-Phys. Harald Graf, Uni Frankfurt,
Prof. E. Groth, FH Hamburg,
Prof. Dr. M. Herrmann, Uni Jena,
Prof. Dr. W. Hofner, FH Ravensburg-Weingarten,
Dipl.-Inform. Jürgen Hollatz, TU München,
Dr. Kyung-Ho Kang, Uni Frankfurt,
Prof. Dr. K. Karow, FH Rheinland Pfalz,
Dr. Andreas von Keitz, Uni Frankfurt,
Prof. Dr. H.-J. Kröcker, Humboldt-Uni Berlin,
Prof. Dr. E. Lanckau, TU Chemnitz,
Dr. B. Luderer, TU Chemnitz,
Gerhard Merziger, Hannover,
Prof. Dr. H.D. Motz, GH Wuppertal,
Dipl.-Ing. Robert Münzel, Studiendirektor, Feldbergschule Oberursel,
Dr. Hans-Georg Reusch, Uni Münster,
Dipl.-Phys. Matthias Rosenstock, Uni Frankfurt,
Dr. Wolfgang Schäfer, Bosch Telekom, Frankfurt,
Dr. H.-J. Schell, TU Chemnitz,
Prof. Dr. Kh. Schöffler, FH Krefeld,
Dr. Juri Stolyarsky, JINR Dubna,
Prof. Dr. Peter Thieler, FH Flensburg,
Dr. Dirk Troltenier, Louisiana State University,
Prof. Dr. U. Wöhrl, TH Zwickau.

Was für wen?

Die Anwendung der Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften wird heute durch den Einsatz von Computern bestimmt. In Ausbildung und Praxis werden daher die Methoden der analytischen Mathematik zunehmend durch numerische, computergerechte Rechenverfahren ergänzt.

Das **Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren** wurde von erfahrenen Hochschuldozenten, Wissenschaftlern und in der Praxis stehenden Ingenieuren unter diesem Gesichtspunkt erarbeitet und zusammengestellt.

Das Taschenbuch vereint

- elementare Schulmathematik,
- Basiswissen für Abiturienten und Abiturientinnen, Fachoberschüler und Studierende im Grundstudium,
- Aufbauwissen für fortgeschrittene Studierende,
- den mathematischen Background für alle Ingenieur- und Wissenschaftsbereiche.

Wozu?

- komplettes **Nachschlagewerk** für die Berufspraxis,
- als rasch verfügbarer Informationspool für Klausuren und Prüfungen,
- sicheres Hilfsmittel beim Lösen von Problemen und Übungsaufgaben.

Was ist enthalten und wie wird es dargestellt?

- alle wichtigen **Begriffe, Formeln, Regeln und Sätze**
- zahlreiche **Beispiele** und praktische **Anwendungen**
- ▷ Hinweise auf **Fehlerquellen**, wichtige Tips und Querverweise
- analytische und numerische **Lösungsverfahren** im direkten Vergleich
- **Programmsequenzen** in PASCAL-Notation.

Struktur und Besonderheiten

Die Anwender gewinnen die benötigten Informationen gezielt und rasch durch die benutzerfreundliche Gestaltung des Taschenbuchs:

- strukturiertes Inhaltsverzeichnis,
- Griffleisten und farbige Lesezeichen für den schnellen Zugriff,
- umfassendes Stichwortverzeichnis.

Neuerungen und Überarbeitungen in der vierten Auflage

Graphen und Bäume, Wavelets, Fuzzy Logik, Neuronale Netze, Betriebssysteme sowie die Programmiersprachen PASCAL, C, C++, FORTRAN und eine Einführung in die Computeralgebra mit MATHEMATICA und MAPLE.

Leserkontakt

Wir möchten auch Sie als Nutzer des Taschenbuchs bitten, Vorschläge und Ergänzungen an den Verlag zu senden.

Autoren und Verlag Harri Deutsch

Gräfstraße 47

D-60486 Frankfurt am Main

E-Mail: verlag@harri-deutsch.de

<http://www.harri-deutsch.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlenrechnen (Arithmetik und Numerik)	1
1.1	Mengen	1
	Darstellung von Mengen	1
	Mengenoperationen	2
	Gesetze der Mengenalgebra	3
	Abbildung und Funktion	4
1.2	Zahlensysteme	4
	Dekadisches Zahlensystem	4
	Weitere Zahlensysteme	6
	Darstellung in Rechnern	6
	Horner-Schema zur Zahlendarstellung	7
1.3	Natürliche Zahlen	7
	Vollständige Induktion	8
	Vektoren und Felder, Indizierung	8
	Rechnen mit natürlichen Zahlen	8
1.4	Ganze Zahlen	11
1.5	Rationale Zahlen (gebrochene Zahlen)	11
	Dezimalbrüche	11
	Brüche	12
	Rechnen mit Brüchen	13
1.6	Rechnen mit Quotienten	14
	Proportion	14
	Dreisatz	14
1.7	Finanzmathematik	14
	Prozentrechnung	15
	Zins und Zinseszins	15
	Tilgungsrechnung	16
	Rentenrechnung	17
	Abschreibung	18
1.8	Irrationale Zahlen	18
1.9	Reelle Zahlen	19
1.10	Komplexe Zahlen	19
	Körper der komplexen Zahlen	20
1.11	Rechnen mit reellen Zahlen	20
	Vorzeichen und Betrag	20
	Ordnungsrelationen	21
	Intervalle	22
	Runden und Abschneiden	22
	Rechnen mit Intervallen	23
	Klammerung	23
	Addition und Subtraktion	24
	Summenzeichen	25
	Multiplikation und Division	26
	Produktzeichen	27
	Potenzen und Wurzeln	28
	Exponentiation und Logarithmus	30
1.12	Binomischer Satz	31
	Binomische Formeln	31
	Binomialkoeffizienten	31

	Pascalsches Dreieck	32
	Eigenschaften der Binomialkoeffizienten	32
	Entwicklung von Potenzen von Summen	33
2	Gleichungen und Ungleichungen (Algebra)	34
2.1	Grundlegende algebraische Begriffe	34
	Nomenklatur	34
	Gruppe	35
	Ring	36
	Körper	36
	Vektorraum	36
	Algebra	37
2.2	Gleichungen mit einer Unbekannten	37
	Elementare Äquivalenzumformungen	37
	Übersicht der verschiedenen Gleichungsarten	38
2.3	Lineare Gleichungen	39
	Gewöhnliche lineare Gleichungen	39
	Lineare Gleichungen in gebrochener Form	39
	Lineare Gleichungen in irrationaler Form	39
2.4	Quadratische Gleichungen	39
	Quadratische Gleichungen in gebrochener Form	40
	Quadratische Gleichungen in irrationaler Form	40
2.5	Kubische Gleichungen	40
2.6	Gleichungen vierten Grades	42
	Allgemeine Gleichung vierten Grades	42
	Biquadratische Gleichungen	42
	Symmetrische Gleichungen vierten Grades	42
2.7	Gleichungen beliebigen Grades	43
	Polynomdivision	43
2.8	Gebrochenrationale Gleichungen	44
2.9	Irrationale Gleichungen	44
	Wurzelgleichungen	44
	Potenzgleichungen	45
2.10	Transzendente Gleichungen	45
	Exponentialgleichungen	45
	Logarithmusgleichungen	46
	Trigonometrische (goniometrische) Gleichungen	46
2.11	Gleichungen mit Beträgen	46
	Gleichung mit einem Betragsausdruck	47
	Gleichungen mit mehreren Betragsausdrücken	47
2.12	Ungleichungen	48
	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen	48
	Addition und Multiplikation von Ungleichungen	49
2.13	Numerische Lösung von Gleichungen	49
	Grafische Lösung	49
	Intervallschachtelung	50
	Sekantenverfahren und Regula falsi	50
	Newton-Verfahren	51
	Sukzessive Approximation	52
3	Geometrie und Trigonometrie der Ebene	54
3.1	Ortslinien	54
3.2	Grundkonstruktionen	55
	Streckenhalbierung	55

	Winkelhalbierung	55
	Senkrechte	56
	Lot	56
	Parallele in gegebenem Abstand	56
	Parallele durch gegebenen Punkt	56
3.3	Winkel	56
	Winkelangabe	56
	Winkelarten	57
	Winkel an Parallelen	58
3.4	Ähnlichkeit und Strahlensätze	59
	Strahlensätze	59
	Streckenteilung	59
	Mittelwerte	60
	Stetige Teilung (Goldener Schnitt)	60
3.5	Dreiecke	61
	Kongruenzsätze	61
	Ähnlichkeit von Dreiecken	61
	Dreieckskonstruktion	62
	Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks	63
	Berechnung eines beliebigen Dreiecks	64
	Winkel- und Seitenbeziehungen im Dreieck	65
	Höhe	66
	Winkelhalbierende	66
	Seitenhalbierende	67
	Mittelsenkrechte, Inkreis, Umkreis, Ankreis	67
	Dreiecksfläche	68
	Verallgemeinerter Satz des Pythagoras	69
	Winkelbeziehungen	69
	Sinussatz	69
	Kosinussatz	69
	Tangenssatz	69
	Halbwinkelsätze	70
	Mollweidesche Formeln	70
	Seitensätze	70
	Gleichschenkliges Dreieck	70
	Gleichseitiges Dreieck	71
	Rechtwinkliges Dreieck	72
	Satz des Thales	73
	Satz des Pythagoras	73
	Kathetensatz	73
	Höhensatz	73
3.6	Vierecke	73
	Allgemeines Viereck	74
	Trapez	74
	Parallelogramm	74
	Rhombus (Raute)	75
	Rechteck	75
	Quadrat	76
	Sehnenviereck	76
	Tangentenviereck	77
	Drachenviereck	77
3.7	Regelmäßige n -Ecke (Polygone)	77
	Allgemeines regelmäßiges n -Eck	77
	Bestimmte regelmäßige Vielecke (Polygone)	78

3.8	Kreisförmige Objekte	80
	Kreis	80
	Kreisförmige Flächen	81
	Kreisring	81
	Kreisausschnitt (Kreissektor)	81
	Kreisringsektor	82
	Kreisabschnitt (Krissegment)	82
	Ellipse	83
4	Geometrie des Raumes	84
4.1	Allgemeine Sätze	84
	Satz von Cavalieri	84
	Simpsonsche Regel	84
	Guldinsche Regeln	84
4.2	Prisma	85
	Schiefes Prisma	85
	Gerades Prisma	85
	Quader (Rechteck)	85
	Würfel	85
	Schief abgeschnittenes n -seitiges Prisma	86
4.3	Pyramide	86
	Tetraeder	86
	Pyramidenstumpf	87
4.4	Reguläre Polyeder	87
	Eulerscher Polyedersatz	87
	Tetraeder	87
	Würfel (Hexaeder)	88
	Oktaeder	88
	Dodekaeder	88
	Ikosaeder	89
4.5	Sonstige Körper	89
	Prismoid, Prisma	89
	Keil	89
	Obelisk	90
4.6	Zylinder	90
	Allgemeiner Zylinder	90
	Gerader Kreiszyylinder	90
	Schiefabgeschnittener Kreiszyylinder	91
	Zylinderhuf	91
	Hohlzylinder (Rohr)	91
4.7	Kegel	92
	Gerader Kreiskegel	92
	Gerader Kreiskegelstumpf	92
4.8	Kugel	93
	Vollkugel	93
	Hohlkugel	93
	Kugelausschnitt (Kugelsektor)	93
	Kugelabschnitt (Kugelsegment, Kalotte, Kugelkappe)	94
	Kugelzone (Kugelschicht)	94
	Kugelzweieck	94
4.9	Kugelgeometrie	95
	Allgemeines Kugeldreieck (Eulersches Dreieck)	95
	Rechtwinkliges Kugeldreieck	96
	Schiefwinkliges Kugeldreieck	97

4.10	Rotationskörper	97
	Ellipsoid	97
	Rotationsparaboloid	98
	Rotationshyperboloid	98
	Tonne (Faß)	98
	Torus (Ring)	98
4.11	Fraktale Geometrie	99
	Skaleninvarianz und Selbstähnlichkeit	99
	Konstruktion selbstähnlicher Objekte	99
	Hausdorff-Dimension	99
	Cantor-Menge	100
	Koch-Kurve	100
	Kochsche Schneeflocke	100
	Sierpiński-Dreieck	100
	Box-counting-Algorithmus	101
5	Funktionen	102
5.1	Folgen, Reihen und Funktionen	102
	Folgen und Reihen	102
	Eigenschaften von Folgen, Grenzwerte	103
	Funktionen	104
	Klassifikation von Funktionen	106
	Grenzwert und Stetigkeit	107
5.2	Kurvendiskussion	109
	Definitionsbereich	109
	Symmetrie	109
	Verhalten im Unendlichen	109
	Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen	110
	Nullstellen	111
	Vorzeichenverlauf	111
	Steigungsverlauf, Extrema	112
	Krümmung	113
	Wendepunkt	113
5.3	Steckbrief für Funktionen	114
5.4	Konstante Funktion	120
5.5	Sprungfunktion	122
5.6	Betragsfunktion	125
5.7	Deltafunktion	129
5.8	Gaußklammer-Funktion, Restfunktion	132
5.9	Lineare Funktion – Gerade	136
5.10	Quadratische Funktion – Parabel	139
5.11	Kubische Funktion	142
5.12	Potenzfunktion höheren Grades	146
5.13	Polynome höheren Grades	150
5.14	Darstellung von Polynomen und spezielle Polynome	153
	Summen- und Produktdarstellung	153
	Taylorentwicklung	154
	Horner-Schema	155
	Newtonsches Interpolationspolynom	157
	Lagrange-Polynome	158
	Bezier-Polynome und Splines	159
	Spezielle Polynome	164
5.15	Hyperbel	167
5.16	Reziproke quadratische Funktion	170

5.17	Potenzfunktionen mit negativem Exponenten	173
5.18	Quotient zweier Polynome	176
	Polynomdivision und Partialbruchzerlegung	180
	Padé-Approximation	182
5.19	Quadratwurzelfunktion	185
5.20	Wurzelfunktionen	188
5.21	Potenzfunktion mit gebrochenem Exponenten	191
5.22	Wurzeln von rationalen Funktionen	194
	Kegelschnitte	199
5.23	Logarithmusfunktion	202
5.24	Exponentialfunktion	206
5.25	Exponentialfunktionen von Potenzen	212
5.26	Hyperbolische Sinus- und Kosinusfunktion	219
5.27	Hyperbolische Tangens- und Kotangensfunktion	224
5.28	Sekans hyperbolicus und Kosekans hyperbolicus	229
5.29	Areasinus hyperbolicus und Areakosinus hyperbolicus	234
5.30	Areatangens hyperbolicus und Areakotangens hyperbolicus	237
5.31	Areasekans hyperbolicus und Areakosekans hyperbolicus	240
5.32	Sinus- und Kosinusfunktion	247
	Überlagerung von Schwingungen	254
	Periodische Funktionen	259
5.33	Tangens und Kotangens	260
5.34	Sekans und Kosekans	266
5.35	Arkussinus und Arkuskosinus	272
5.36	Arkustangens und Arkuskotangens	275
5.37	Arkusekans und Arkuskosekans	279
5.38	Algebraische Kurven n -ter Ordnung	282
	Kurven zweiter Ordnung	282
	Kurven dritter Ordnung	284
	Kurven vierter und höherer Ordnung	285
5.39	Rollkurven	287
5.40	Spiralen	289
5.41	Andere Kurven	290
6	Vektorrechnung	291
6.1	Vektoralgebra	291
	Vektor und Skalar	291
	Spezielle Vektoren	291
	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	292
	Vektoraddition	292
	Vektorsubtraktion	293
	Rechengesetze	293
	Lineare (Un-) Abhängigkeit von Vektoren	294
	Basis	294
6.2	Skalarprodukt oder inneres Produkt	297
	Rechenregeln	298
	Eigenschaften und Anwendungen des Skalarproduktes	298
	Orthogonalisierung von Vektoren	300
	Richtungskosinus	301
	Anwendung der Vektorrechnung: Hyperwürfel	302
6.3	Vektorprodukt zweier Vektoren	302
	Eigenschaften des Vektorproduktes	303
6.4	Mehrfachprodukte von Vektoren	304
	Spatprodukt	304

7	Koordinatensysteme	307
7.1	Koordinatensysteme in zwei Dimensionen	307
	Kartesische Koordinaten	307
	Polarkoordinaten	307
	Umrechnungen zwischen 2-D-Koordinatensystemen	308
7.2	2-D-Koordinatentransformation	308
	Parallelverschiebung (Translation)	308
	Drehung (Rotation)	309
	Spiegelung (Reflexion)	310
	Skalierung	311
7.3	Koordinatensysteme in drei Dimensionen	311
	Kartesische Koordinaten	311
	Zylinderkoordinaten	311
	Kugelkoordinaten	312
	Umrechnungen zwischen dreidimensionalen Koordinatensystemen	312
7.4	Koordinatentransformation in drei Dimensionen	313
	Parallelverschiebung (Translation)	313
	Drehung (Rotation)	313
7.5	Anwendung in der Computergrafik	314
7.6	Transformationen	314
	Objektdarstellung und Objektbeschreibung	314
	Homogene Koordinaten	316
	2-D-Translation mit homogenen Koordinaten	317
	2-D-Skalierung mit homogenen Koordinaten	317
	3-D-Translation mit homogenen Koordinaten	318
	3-D-Skalierung mit homogenen Koordinaten	318
	3-D-Rotation von Punkten mit homogenen Koordinaten	318
	Positionierung eines Objektes im Raum	319
	Rotation von Objekten um eine beliebige Achse im Raum	320
	Simulation von Bewegungsabläufen	322
	Spiegelungen	322
	Transformation von Koordinatensystemen	323
	Translation eines Koordinatensystems	323
	Rotation eines Koordinatensystems um eine Hauptachse	323
7.7	Projektionen	325
	Grundprinzipien	325
	Parallelprojektion	325
	Zentralprojektion	327
	Allgemeine Formulierung von Projektionen	328
7.8	Window-Viewport-Transformationen	330
8	Analytische Geometrie	331
8.1	Elemente der Ebene	331
	Abstand zweier Punkte	331
	Teilung einer Strecke	331
	Fläche eines Dreiecks	331
	Gleichung einer Kurve	332
8.2	Gerade	332
	Gleichungsformen der Geraden	332
	Hessesche Normalform	333
	Schnittpunkt von Geraden	334
	Winkel zwischen Geraden	334
	Parallele und senkrechte Geraden	335

8.3	Kreis	335
	Kreisgleichungen	335
	Kreis und Gerade	336
	Kreisschnitt	336
	Kreistangentengleichung	336
8.4	Ellipse	336
	Gleichungsformen der Ellipse	337
	Brennpunkteigenschaften der Ellipse	337
	Durchmesser der Ellipse	338
	Tangente und Normale der Ellipse	338
	Krümmung der Ellipse	338
	Ellipsenflächen und Ellipsenumfang	338
8.5	Parabel	339
	Gleichungsformen der Parabel	339
	Brennpunkteigenschaften der Parabel	340
	Parabeldurchmesser	340
	Tangente und Normale der Parabel	340
	Krümmung einer Parabel	341
	Parabelflächen und Parabelbogenlänge	341
	Parabel und Gerade	341
8.6	Hyperbel	341
	Gleichungsformen der Hyperbel	342
	Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	343
	Tangente und Normale der Hyperbel	343
	Konjugierte Hyperbeln und Durchmesser	343
	Krümmung einer Hyperbel	344
	Flächen einer Hyperbel	344
	Hyperbel und Gerade	344
8.7	Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte	345
	Form der Kegelschnitte	345
	Hauptachsentransformation	345
	Geometrische Konstruktion (Kegelschnitt)	345
	Leitlinieneigenschaft	346
	Polargleichung	346
8.8	Elemente im Raum	347
	Abstand zweier Punkte	347
	Teilung einer Strecke	347
	Rauminhalt eines Tetraeders	347
8.9	Geraden im Raum	347
	Parameterdarstellung einer Geraden	347
	Schnittpunkt zweier Geraden	348
	Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden	348
	Fußpunkt des Lotes (Lotgerade)	348
	Abstand zwischen Punkt und Gerade	349
	Abstand zweier Geraden	349
8.10	Ebenen im Raum	349
	Parameterdarstellung der Ebene	350
	Koordinatendarstellung der Ebene	350
	Hessesche Normalform der Ebene	350
	Umformungen	350
	Abstand Punkt–Ebene	351
	Schnittpunkt Gerade–Ebene	351
	Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen	351
	Fußpunkt des Lotes (Lotgerade)	351

Spiegelung	352
Abstand zweier paralleler Ebenen	352
Schnittmenge zweier Ebenen	352
8.11 Flächen zweiter Ordnung in Normalform	352
Ellipsoid	353
Hyperboloid	353
Kegel	354
Paraboloid	354
Zylinder	355
8.12 Allgemeine Fläche zweiter Ordnung	355
Allgemeine Gleichung	355
Hauptachsentransformation	356
Gestalt einer Fläche zweiter Ordnung	356
9 Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme	358
9.1 Matrizen	358
Zeilen- und Spaltenvektoren	360
9.2 Spezielle Matrizen	360
Transponierte, konjugierte und adjungierte Matrizen	360
Quadratische Matrizen	361
Dreiecksmatrizen	362
Diagonalmatrizen	363
9.3 Operationen mit Matrizen	365
Addition und Subtraktion von Matrizen	365
Multiplikation einer Matrix mit skalarem Faktor c	366
Multiplikation von Vektoren, Skalarprodukt	367
Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	368
Multiplikation von Matrizen	368
Rechenregeln der Matrixmultiplikation	369
Multiplikation mit einer Diagonalmatrix	370
Matrizenmultiplikation nach dem Falk-Schema	371
Zeilensummen- und Spaltensummenproben	372
9.4 Determinanten	373
Zweireihige Determinanten	373
Allgemeine Rechenregeln für Determinanten	374
Determinantenwert Null	375
Dreireihige Determinanten	376
Determinanten höherer (n -ter) Ordnung	378
Berechnung n -reihiger Determinanten	379
Reguläre und inverse Matrix	379
Berechnung der inversen Matrix mit Determinanten	380
Rang einer Matrix	381
Bestimmung des Ranges mit Unterdeterminanten	382
9.5 Lineare Gleichungssysteme	382
Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten	384
9.6 Numerische Lösungsverfahren	385
Gaußscher Algorithmus für lineare Gleichungssysteme	385
Vorwärtselimination	385
Pivotisierung	387
Rückwärtseinsetzen	388
LR-Zerlegung	389
Lösbarkeit von $(m \times n)$ -Gleichungssystemen	391
Gauß-Jordan-Verfahren zur Matrixinversion	393
Berechnung der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1}	395

9.7	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	397
	Gesamtschritt-Verfahren (Jacobi)	398
	Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel)	398
	Konvergenzkriterien für iterative Verfahren	399
	Speicherung der Koeffizientenmatrix	400
9.8	Tabelle der Lösungsmethoden	401
9.9	Eigenwertgleichungen	402
9.10	Systeme von Ungleichungen und Lineare Optimierung	404
	Aufgabenstellung	404
	Mathematische Modellformulierung	405
	Matrizenschreibweise der linearen Optimierung	406
	Umwandlung von Ungleichungen in Gleichungen, Schlupfvariablen	406
	Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen, grafische Lösung	406
	Simplexmethode, Simplexalgorithmus	407
	Dualität in der linearen Optimierung	410
9.11	Tensoren	410
	Rechenregeln für Tensoren	411
10	Boolesche Algebra – Anwendung in der Schaltalgebra	413
10.1	Grundbegriffe	413
	Aussagen und Wahrheitswerte	413
	Aussagenvariablen	413
10.2	Boolesche Verknüpfungen	414
	Negation, nicht, not	414
	Konjunktion, und, and	414
	Disjunktion, (inklusive) oder, or	415
	Rechenregeln	415
10.3	Boolesche Funktionen	416
	Verknüpfungsbasis	417
10.4	Normalformen	417
	Disjunktive Normalform	418
	Konjunktive Normalform	418
	Darstellung von Funktionen durch Normalformen	418
10.5	Karnaugh-Veitch-Diagramme	420
	Erstellen eines KV-Diagrammes	420
	Eintragen einer Funktion in ein KV-Diagramm	421
	Minimierung mit Hilfe von KV-Diagrammen	421
10.6	Minimierung nach Quine und McCluskey	423
11	Graphen und Algorithmen	425
11.1	Graphen	425
	Grundbegriffe	425
	Darstellung von Graphen	426
	Bäume	427
11.2	Matchings	428
11.3	Netzwerke	428
	Flüsse in Netzwerken	428
	Eulerscher Zug und Hamiltonscher Kreis	429
12	Differentialrechnung	430
12.1	Ableitung einer Funktion	430
	Differential	430
	Differenzierbarkeit	431
12.2	Differentiationsregeln	432

Ableitungen elementarer Funktionen	432
Ableitungen trigonometrischer Funktionen	432
Ableitungen hyperbolischer Funktionen	432
Konstantenregel	433
Faktorregel	433
Potenzregel	433
Summenregel	433
Produktregel	433
Quotientenregel	433
Kettenregel	434
Logarithmische Ableitung von Funktionen	435
Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	435
Ableitung von Funktionen in Polarkoordinaten	435
Ableitung einer impliziten Funktion	436
Ableitung der Umkehrfunktion	436
Tabelle der Differentiationsregeln	437
12.3 Mittelwertsätze	437
Satz von Rolle	438
Mittelwertsatz der Differentialrechnung	438
Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung	438
12.4 Höhere Ableitungen	439
Steigungsverlauf, Extrema	440
Krümmung	441
Wendepunkt	441
12.5 Näherungsverfahren zur Differentiation	442
Grafische Differentiation	442
Numerische Differentiation	442
12.6 Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	443
Partielle Ableitung	443
Totales Differential	445
Extrema von Funktionen in zwei Dimensionen	445
Extrema mit Nebenbedingungen	446
12.7 Anwendungen der Differentialrechnung	446
Berechnung unbestimmter Ausdrücke	446
Kurvendiskussion	448
Extremalaufgaben	448
Fehlerrechnung	449
Nullstellensuche nach Newton	450
13 Differentialgeometrie	451
13.1 Ebene Kurven	451
Darstellung von Kurven	451
Ableitung in impliziter Darstellung	451
Ableitung in Parameterdarstellung	451
Ableitung in Polarkoordinaten	451
Bogenelement einer Kurve	452
Tangente, Normale	452
Krümmung einer Kurve	453
Evoluten und Evolventen	454
Wendepunkte, Scheitel	455
Singuläre Punkte	455
Asymptoten	456
Einhüllende einer Kurvenschar	456
13.2 Raumkurven	457

	Darstellung von Raumkurven	457
	Begleitendes Dreibein	457
	Krümmung	459
	Windung (Torsion) einer Kurve	459
	Frenetsche Formeln	460
13.3	Flächen	460
	Darstellung einer Fläche	460
	Tangentialebene und Flächennormale	460
	Singuläre Flächenpunkte	461
14	Unendliche Reihen	462
14.1	Reihen	462
14.2	Konvergenzkriterien	462
	Spezielle Zahlenreihen	465
14.3	Taylor- und MacLaurin-Reihen	465
	Formel von Taylor	466
	Taylor-Reihe	466
14.4	Potenzreihen	467
	Konvergenzbetrachtungen für Potenzreihen	467
	Eigenschaften konvergenter Potenzreihen	468
	Umkehrung von Potenzreihen	469
14.5	Spezielle Potenzreihenentwicklungen	469
	Binomische Reihen	469
	Spezielle Binomische Reihen	470
	Reihen von Exponentialfunktionen	470
	Reihen von logarithmischen Funktionen	471
	Reihen von trigonometrischen Funktionen	472
	Reihen von Arkusfunktionen	472
	Reihen von Hyperbelfunktionen	473
	Reihen von Areafunktionen	473
	Partialbruchentwicklungen	473
	Unendliche Produkte	474
15	Integralrechnung	475
15.1	Integralbegriff und Integrierbarkeit	475
	Stammfunktion	475
	Unbestimmtes und bestimmtes Integral	475
	Geometrische Deutung	476
	Regeln zur Integrierbarkeit	477
	Uneigentliche Integrale	478
15.2	Integrationsregeln	479
	Regeln für unbestimmte Integrale	479
	Regeln für bestimmte Integrale	479
	Tabelle der Integrationsregeln	480
	Integrale einiger elementarer Funktionen	481
15.3	Integrationsverfahren	482
	Integration durch Substitution	483
	Partielle Integration	485
	Integration durch Partialbruchzerlegung	487
	Integration durch Reihenentwicklung	489
15.4	Numerische Integration	490
	Rechteckregel	491
	Trapezregel	491
	Simpson-Regel	491

Romberg-Integration	492
Gauß-Quadratur	493
Tabelle der numerischen Integrationsverfahren	494
15.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung	496
15.6 Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale	496
Bogenlänge (Rektifikation)	496
Flächeninhalt	497
Rotationskörper (Drehkörper)	498
15.7 Funktionen in Parameterdarstellung	499
Bogenlänge in Parameterdarstellung	499
Sektorenformel	499
Rotationskörper in Parameterdarstellung	500
15.8 Mehrfachintegrale und ihre Anwendungen	500
Definition von Mehrfachintegralen	500
Flächenberechnung	501
Schwerpunkt von Bögen	502
Trägheitsmoment von Bögen	502
Schwerpunkt einer Fläche	502
Trägheitsmoment von Flächen	503
Schwerpunkt eines Körpers	503
Trägheitsmoment eines Körpers	503
Schwerpunkt von Drehkörpern	503
15.9 Technische Anwendung der Integralrechnung	504
Statisches Moment, Schwerpunkt	504
Massenträgheitsmoment	505
Statik	507
Arbeitsberechnungen	507
Mittelwerte	508
16 Vektoranalysis	509
16.1 Felder	509
Symmetrien in Feldern	510
16.2 Differentiation und Integration von Vektoren	511
Skalenfaktoren in allgemeinen orthogonalen Koordinaten	513
Differentialoperatoren	513
16.3 Gradient und Potential	514
16.4 Richtungsableitung und Vektorgradient	516
16.5 Divergenz und Gaußscher Integralsatz	517
16.6 Rotation und Stokesscher Integralsatz	520
16.7 Laplace-Operator und Greensche Formeln	522
16.8 Kombinationen von div, rot und grad, Berechnung von Feldern	523
Zusammenfassung	525
17 Komplexe Variablen und Funktionen	526
17.1 Komplexe Zahlen	526
Imaginäre Zahlen	526
Algebraische Darstellung komplexer Zahlen	526
Kartesische Darstellung komplexer Zahlen	527
Konjugiert komplexe Zahlen	527
Betrag einer komplexen Zahl	527
Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	528
Exponentialdarstellung komplexer Zahlen	528
Umrechnung zwischen kartesischer und trigonometrischer Darstellung	529
Riemannsche Zahlenkugel	529

17.2	Elementare Rechenoperationen mit komplexen Zahlen	530
	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	530
	Multiplikation und Division komplexer Zahlen	531
	Potenzieren im Komplexen	533
	Radizieren im Komplexen	534
17.3	Elementare Funktionen einer komplexen Variablen	534
	Folgen im Komplexen	534
	Reihen im Komplexen	535
	Exponentialfunktion im Komplexen	536
	Natürlicher Logarithmus im Komplexen	536
	Allgemeine Potenz im Komplexen	537
	Trigonometrische Funktionen im Komplexen	537
	Hyperbelfunktionen im Komplexen	538
	Inverse trigonometrische, inverse hyperbolische Funktionen im Komplexen	540
17.4	Anwendungen komplexer Funktionen	540
	Darstellung von Schwingungen in der komplexen Ebene	540
	Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz	541
	Ortskurven	542
	Inversion von Ortskurven	543
17.5	Ableitung von Funktionen einer komplexen Variablen	544
	Definition der Ableitung im Komplexen	544
	Ableitungsregeln im Komplexen	544
	Cauchy-Riemannsche Differenzierbarkeitsbedingungen	545
	Konforme Abbildungen	545
17.6	Integration in der komplexen Ebene	547
	Komplexe Kurvenintegrale	547
	Cauchyscher Integralsatz	548
	Stammfunktionen im Komplexen	548
	Cauchysche Integralformeln	549
	Taylorreihe einer analytischen Funktion	549
	Laurentreihen	550
	Klassifikation singulärer Punkte	550
	Residuensatz	551
	Inverse Laplacetransformation	551
18	Differentialgleichungen	552
18.1	Allgemeines	552
18.2	Geometrische Interpretation	553
18.3	Lösungsmethoden bei Differentialgleichungen erster Ordnung	554
	Trennung der Variablen	554
	Substitution	555
	Exakte Differentialgleichung	555
	Integrierender Faktor	556
18.4	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	556
	Variation der Konstanten	556
	Allgemeine Lösung	557
	Bestimmung einer partikulären Lösung	557
	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	557
18.5	Einige spezielle Gleichungen	558
	Bernoullische Differentialgleichung	558
	Riccatische Differentialgleichung	558
	Clairautsche Differentialgleichung	558
18.6	Differentialgleichungen 2. Ordnung	559
	Einfache Spezialfälle	559