Vorkurs der Ingenieurmathematik

von

Jürgen Wendeler

5., erweiterte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 57327

Autor:
Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler war Professor an
der ehemaligen Fachhochschule der Telekom, Dieburg

5. Auflage 2022

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5944-4

Alle Bilder wurden nach Vorlagen des Autors vom Verlag erstellt.

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09212 Limbach-Oberfrohna
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagfoto: © Michael – stock.adobe.com
Druck: Plump Druck & Medien, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Dieses Buch dient der Vorbereitung auf ein Ingenieurstudium. Es entstand aus einer Reihe von Aufsätzen, die der Autor in den Unterrichtsblättern der Deutschen Telekom AG veröffentlicht hat und deren methodische Gestaltung Anerkennung fand. Bei der Zusammenfassung der Aufsätze zum vorliegenden Buch wurden dem gesteckten Ziel entsprechend wesentliche Ergänzungen und Erweiterungen vorgenommen.

Behandelt werden Rechenoperationen bis zum Logarithmieren, Funktionen einschließlich der trigonometrischen Funktionen und der algebraisch rationalen Funktionen, Gleichungen, Berechnungen am Dreieck, Vieleck und Kreis, Körperberechnungen und Grundlagen der Vektorrechnung.

Zwei ausführliche, für die fünfte Auflage um einen Abschnitt zur numerischen Lösung von Gleichungen erweiterte, Kapitel über die Grundlagen und einfachen Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung bereiten auf ein Hochschulstudium vor. Damit ist im wesentlichen das Gebiet der Elementarmathematik erfasst, und das Buch erhält für alle, die diesen Bereich der Mathematik wiederholen und festigen wollen, eine eigenständige Bedeutung.

Der Autor hat besonders auf Anschaulichkeit und Verständlichkeit des Lehrstoffs geachtet und am Anfang eine etwas breitere Darstellung gewählt, denn sichere Kenntnisse und Fertigkeiten in der Arithmetik sind eine unentbehrliche Grundlage für das weitere Studium.

Zahlreiche durchgerechnete Beispiele und Abbildungen unterstützen das methodische Anliegen des Buches. Die große Zahl von Aufgaben einschließlich Lösungen dient der Festigung des Lehrstoffs, seiner sicheren Anwendung sowie der notwendigen Selbstkontrolle für den Leser.

Das Buch ist zum Gebrauch neben Lehrveranstaltungen, aber auch in vollem Umfang zum Selbststudium geeignet. Der Autor dankt dem Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Dieburg, im Sommer 2022 J. Wendeler

Leserkontakt

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
www.europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen

III Geometrie und Vektorrechnung

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Bestimmte und allgemeine Zahlen

1.1 Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme

1.1.1 Geschichtliches

Zu Beginn allen mathematischen Denkens stand das Zählen. Die dazu benötigten Zahlzeichen oder *Ziffern* stammen von den Indern und wurden von den *Arabern* auf ihren Kriegszügen nach Europa gebracht, wo sie die bis dahin allgemein üblichen römischen Zahlzeichen verdrängten.

Die Verbreitung der *arabischen Ziffern* in weiten Kreisen der deutschen Bevölkerung und das Rechnen mit ihnen gelang erst dem berühmten Rechenmeister ADAM RIESE (1492–1559) durch sein im Jahr 1525 herausgegebenes Rechenbuch.

1.1.2 Zahldarstellung

Die wohl einfachste Form der Zahldarstellung ist das *Strichsystem*, wie es bei den sog. Kerbhölzern zum Notieren von Schulden üblich war (daher auch die Redewendung: Er hat etwas auf dem Kerbholz). Für größere Zahlen ging bei diesem Verfahren der Überblick verloren. Deshalb fasste man eine bestimmte Anzahl von Strichen zu Gruppen zusammen (Fünfergruppe, Zehnergruppe, ...) und gab diesen Gruppen neue Zahlzeichen. Dieses Verfahren führte zum sog. *Additionssystem*, dessen bekanntestes Beispiel die römische Zahlenschreibweise ist:

Von den Grundzeichen (I = 1; X = 10; C = 100; M = 1000) werden je zehn zur nächsthöheren Gruppe zusammengefasst; dazu gibt es noch Hilfszeichen (V = 5; L = 50; D = 500). Durch Addieren (lateinisch *addere*, hinzufügen) der einzelnen Zeichen lassen sich größere Zahlen darstellen. Steht ein Zeichen (Ziffer) links neben einem höheren Zeichen, bedeutet das eine Subtraktion. Damit wird die viermalige Wiederholung eines Zeichens vermieden.

Beispiel 1.1

$$\begin{aligned} 1879 &= \text{MDCCCLXXIX} \\ &= 1000+500+100+100+100+50+10+10-1+10 \\ 1993 &= \text{MXMIII} \\ &= 1000-10+1000+1+1+1 \end{aligned}$$

(Häufig wird auch die Schreibweise MCMLXXXXIII oder MCMXCIII verwendet.)

Auch dieses Verfahren erwies sich bei noch größeren Zahlen und vor allem beim Addieren als sehr umständlich.

1.1.3 Zahlensysteme

Deshalb traf es sich gut, dass die Araber mit den indischen Zahlenzeichen auch das von den Indern stammende Positionssystem[1)] nach Europa brachten, das erst die Darstellung von beliebig großen Zahlen in der heutigen einfachen Form mittels neun Ziffern und der Null als Zeichen für eine leere Stelle ermöglichte.

In diesem System werden je zehn Einheiten (Einer, E) zu einer neuen Gruppe, den Zehnern, Z, zusammengefasst; davon wieder zehn zu einem Hunderter, H, usw. Jedoch wird für diese übergeordneten Gruppen - und das macht dieses System jetzt so übersichtlich und einfach - kein neues Zeichen wie bei den Römern eingeführt, sondern sie werden *durch ihre Stellung* innerhalb des ganzen Zahlzeichens *kenntlich gemacht*. In dem römischen Zeichen III für drei hat jede der drei Ziffern den Zahlenwert 1, und da es sich um ein Additionssystem handelt, ergibt sich die ganze Zahl durch Addition der drei Einzelwerte. In dem Zahlzeichen 111 für einhundertelf haben ebenfalls alle drei Ziffern den Zahlenwert 1, jedoch stehen sie innerhalb des ganzen Zahlzeichens an verschiedenen Stellen. Sie haben also *verschiedene Stellenwerte*, und zwar steht der niedrigste Stellenwert – der Einer – am weitesten rechts.

Beispiel 1.2:

$$\begin{aligned} 1993 &= 1\text{T}+9\text{H}+9\text{Z}+3 \\ &= 1000+900+90+3 \\ &= 1\cdot 10^3+9\cdot 10^2+9\cdot 10^1+3\cdot 10^0 \end{aligned}$$

[Über die Schreibweise und Bedeutung von $10^3, \ldots, 10^0$ siehe Abschnitt 6.1]

Da jeweils zu Zehnergruppen zusammengefasst wird, spricht man von einem *dekadischen* (griechisch *deka,* zehn) Positionssystem oder von einem *Dezimalsystem* (lat. *decem,* zehn). Die Zahl zehn heißt auch *Basis* (Grundzahl) des Systems.

Andere Zahlensysteme wie das *Zwölfersystem* (sprachliche Überreste: Dutzend, Gros) oder das *Sechzigersystem* (Sexagesimalsystem) der Babylonier (Überreste: 1 Stunde = 60 Minuten = 60 · 60 Sekunden), haben sich nicht halten können. Dafür hat ein anderes Zahlensystem, das *Dualsystem* (lat. *duo,* zwei), auch *Zweiersystem* oder *Binärsystem* (lat. *bini*, je zwei) genannt, als Rechenbasis der Computer (elektronischen Rechenanlagen) eine

[1)] *Position* hier in der Bedeutung: Stelle Lage Standort.

überragende Bedeutung gewonnen. – Entsprechend dem Dezimalsystem, bei dem man höchstens zehn Zeichen benötigt (0, 1, 2, ..., 9), um eine Zahl anschreiben zu können, braucht man beim Dualsystem nur zwei Zeichen (0, 1 oder O, L). Damit wird die Darstellung einer Zahl sehr aufwendig, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3:

$$\begin{aligned} 1993_{10} &= \mathrm{LLLLLOOLOOL}_2 \\ &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 2^3 + 0 \cdot 2^2 \\ &\quad + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \\ &= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 8 + 1 \end{aligned}$$

[Die Indizes (lat. *Index,* Anzeiger) 10 und 2 in der ersten Zeile geben das Zahlensystem an; L ist das Besetztzeichen, O das Leerzeichen für eine Position in Dualsystem.]

Aber es ist technisch am einfachsten, im Computer elektrische und elektronische Bauelemente zu verwenden, die nur zwischen zwei verschiedenen Zuständen (entsprechend den zwei Zeichen des Dualsystems) unterscheiden müssen:

Durch einen Draht fließt entweder ein Strom oder nicht, ein Schalter ist entweder geschlossen oder offen, ein Magnetring ist entweder rechtsherum oder linksherum magnetisiert usw.

Bei der Bedienung eines Rechners werden die Zahlen als Dezimalzahlen eingegeben; der Rechner übersetzt sie dann ins Dualsystem, ehe er mit ihnen weiterrechnet.

1.2 Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen

1.2.1 Bestimmte Zahlen

Ursprünglich kannte man nur die *natürlichen Zahlen* 1, 2, 3, ..., die man als Folge des Zählens erhält. Die Folge der natürlichen Zahlen ist unbegrenzt.

Grafisch (griechisch *graphein,* zeichnen) lässt sich die Folge durch den *Zahlenstrahl* darstellen. Man trägt auf einem waagerechten Strahl (Bild 1.1) vom Anfangspunkt 0 (lat. *origo,* Anfang) aus eine beliebige Einheit, z. B. 1 cm, wiederholt nach rechts ab.

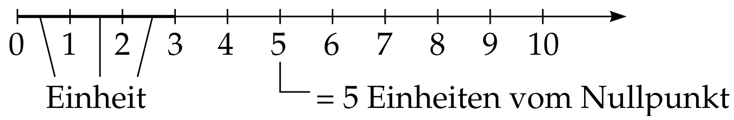


Bild 1.1

Auf diese Weise erhält man Bildpunkte, die man durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... kennzeichnet. Der Ausgangspunkt 0 heißt *Nullpunkt* der Zählung. Die Zahlen geben den Abstand in Einheiten vom Nullpunkt an. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit N bezeichnet.

Bald schon genügten die natürlichen Zahlen nicht mehr den Ansprüchen des täglichen Lebens. So sind zwar 50 € dem *Betrag* nach immer gleich; es ist aber ein Unterschied, ob man sie zu bekommen hat oder jemandem zahlen muss. Diesen Unterschied kennzeichnet man durch das *Vorzeichen*, mit dem der Betrag von 50 € versehen wird. Im ersten Fall hat man 50 € gut (Guthaben: $+50$ €). Beträge mit einem *Pluszeichen* („und“-Zeichen, +) oder *ohne* Vorzeichen nennt man *positive Zahlen*. Als ganze Zahlen entsprechen sie den bereits bekannten natürlichen Zahlen. Beträge mit einem *Minuszeichen* („weniger“-Zeichen, $-$) nennt man *negative Zahlen*. Beide zusammen bilden die Menge Z der *ganzen Zahlen*.

Man bezeichnet den Schritt von den natürlichen zu den ganzen Zahlen als *erste Erweiterung des Zahlenbereiches*.

Die negativen Zahlen stellt man grafisch ebenfalls mittels eines Zahlenstrahles dar, der diesmal jedoch nach links orientiert ist (Bild 1.2).

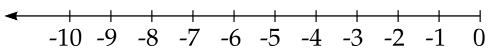


Bild 1.2

Fasst man beide Strahlen zusammen, so erhält man die *Zahlengerade* – sie besitzt keinen Anfang und kein Ende – und ist damit eine grafische Darstellung der ganzen Zahlen (Bild 1.3). Die Orientierung geschieht von links nach rechts in Richtung immer größerer Zahlen. Jede Zahl hat einen kleineren Vorgänger (z. B. $3 < 4$, „drei ist kleiner als vier“, oder $-5 < -4$, „minus fünf ist kleiner als minus vier“) und einen größeren Nachfolger (z. B. $5 > 4$, „fünf ist größer als vier“, oder $-6 > -7$, „minus sechs ist größer als minus sieben“).

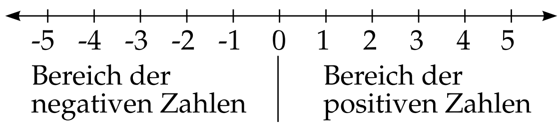


Bild 1.3

Zahlen, die vom Nullpunkt aus den gleichen Abstand haben, besitzen den gleichen *absoluten Betrag*. Man kennzeichnet den Betrag einer Größe, indem man sie in zwei senkrechte Striche, die Betragsstriche, einschließt, z. B. $|-3| = |+3| = 3$ (der Betrag von -3 ist gleich dem Betrag von +3, nämlich 3).

1.2.2 Allgemeine Zahlen

Alle hier bisher betrachteten Zahlen sind *bestimmte Zahlen*, weil sie eine genau bestimmte Anzahl von Einheiten angeben. Sie werden *mit Ziffern geschrieben* und spielen eine wichtige Rolle im täglichen Leben.

In der Mathematik jedoch, wo es darauf ankommt, allgemein gültige Formeln und Gesetzmäßigkeiten anzugeben und allgemeine Beweise zu führen, reichen bestimmte Zahlen allein nicht mehr aus. Das Einführen von Buchstaben zur Bezeichnung *allgemeiner Zahlen* durch den französischen Mathematiker FRANCOIS VIÉTA (1540–1603) förderte deshalb den Ausbau der Mathematik, insbesondere der Arithmetik (griechisch *arithmos,* Zahl) ganz erheblich. – Schon ein Jahrhundert vor Viéta benutzte der deutsche JOHANNES MÜLLER (aus Königsberg in Franken) die Buchstaben zur Bezeichnung allgemeiner Zahlen. Sein frühzeitiger Tod verhinderte indes eine Ausbreitung dieser mathematischen Zeichensprache.

Bei der „Buchstabenrechnung" verwendet man gewöhnlich die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets: $a, b, c, \dots$ (Ausnahme: Winkel werden mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet). Sie stellen Zahlen dar, die keine bestimmte Einheit haben. Ihnen wird von Fall zu Fall nicht nur ein bestimmter Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Einheit zugeordnet. Dabei ist zu beachten, dass *ein und derselbe Buchstabe in einer Aufgabe stets ein und denselben Zahlenwert bedeutet.*

1.3 Grundrechenarten für ganze Zahlen

Ganze und allgemeine Zahlen lassen sich durch Rechenoperationen (Rechenarten) miteinander verknüpfen. Die vier bekanntesten, die sog. Grundrechenarten, sollen hier kurz wiederholt werden.

1.3.1 Die Addition

(lat. *addere,* hinzufügen)

Summand	plus	Summand	gleich	Summe		
3	$+$	4	$=$	7		
-3	$+$	4	$=$	$4-3$	$=$	1
-3	$+$	(-4)	$=$	$-3-4$	$=$	-7
3	$+$	(-4)	$=$	$3-4$	$=$	-1
allgemein:						
a	$+$	b	$=$	$a+b$		

Dabei gilt das *kommutative Gesetz* (lat. *commutare,* vertauschen):

$$\boxed{a+b=b+a} \tag{1.1}$$

► Bei der Addition ist die Reihenfolge der Summanden beliebig.

1.3.2 Die Subtraktion

(lat. *subtrahere,* abziehen)

Minuend	minus	Subtrahend	gleich	Differenz		
7	$-$	3	$=$	4		
7	$-$	8	$=$	-1		
7	$-$	(-3)	$=$	$7+3$	$=$	10
-7	$-$	3	$=$	-10		
-7	$-$	(-3)	$=$	$-7+3$	$=$	-4
allgemein:						
a	$-$	b	$=$	$a-b$		

Für *beide* Rechenoperationen gilt:

► Gleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Addition; ungleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Subtraktion.

Addition und Subtraktion werden auch als Rechenoperationen erster Stufe bezeichnet. Rechenoperationen *zweiter Stufe* sind die Multiplikation (Abschnitt 1.3.3) und die Division (Abschnitt 1.3.5). Das Potenzieren (s. Abschnitt 1.3.4) gehört zur Rechenart dritter Stufe.

1.3.3 Die Multiplikation

(lat. *multiplicare,* vervielfältigen)

Multiplikator	mal	Multiplikand	gleich	Produkt
3	$\cdot$	4	=	12
3	$\cdot$	(-4)	=	-12
-3	$\cdot$	(-4)	=	12
-3	$\cdot$	4	=	-12
allgemein:				
a	$\cdot$	b	=	ab

Auch hierbei gilt das kommutative Gesetz:

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a} \tag{1.2}$$

► Bei der Multiplikation ist die *Reihenfolge der Faktoren* beliebig (Multiplikator und Multiplikand werden normalerweise als Faktoren bezeichnet).

1.3.4 Das Quadrat einer Zahl, der Potenzbegriff

Multipliziert man eine Zahl mit sich selbst, so erhält man das *Quadrat der Zahl.*

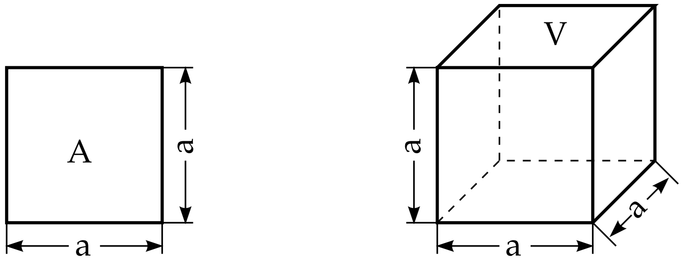
Beispiel 1.4:

$a \cdot a = a^2$

in Worten: „a mal a gleich a-Quadrat“
oder „a mal a gleich a hoch 2“.

Die Zahl auf der rechten Seite heißt *Quadratzahl.* Quadratzahlen sind: 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; ... Das Wort „Quadrat“ stammt aus der Geometrie (urspr. Landvermessung: Teil der Mathematik, die sich mit räumlichen Figuren und deren Darstellung befasst) und kennzeichnet dort ein Rechteck gleicher Seitenlänge (Bild 1.4). Seinen Flächeninhalt A erhält man durch Multiplikation der Längen zweier aufeinander senkrecht stehender Seiten:

$A = a \cdot a = a^2$



Bilder 1.4 und 1.5

Man sagt auch:
► Die Fläche eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz (a^2) seiner Seitenlänge (a).

Der neue Ausdruck „Quadrat“ gehört wie auch die als Hochzahl geschriebene 2 zur *Potenzrechnung* (lat. *potentia,* Macht). a heißt *Basis* oder *Grundzahl*, die Hochzahl wird *Exponent* genannt (lat. *exponere*, herausstellen).

Bildet man das Produkt aus dreimal der gleichen Zahl als Faktor, erhält man eine *Kubikzahl* (lat. *cubus*, Würfel).

Beispiel 1.5:

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

in Worten: „a mal a mal a gleich a hoch drei“.

Geometrisch lässt sich eine Kubikzahl deuten als das Volumen V (der Rauminhalt) eines Würfels (eines Quaders mit gleichen Kantenlängen):

$$V = a \cdot a \cdot a \cdot = a^3 \quad \text{(Bild 1.5)}$$

Man sagt:
► Das Volumen eines Würfels ist gleich der dritten Potenz (a^3) seiner Seitenlänge (a).

Kubikzahlen sind: 1; 8; 27; 64; 125; ...
Tritt allgemein eine Zahl a n-mal als Faktor in einem Produkt auf, also

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a = a^n,$$

spricht man von der n-ten Potenz von a (gesprochen: „von der n-ten Potenz ...“). Für sie ist eine geometrische Deutung im 3-dimensionalen Raum nicht mehr möglich.

Abschließend lässt sich folgendes sagen:
► Ebenso wie man zur Vereinfachung des Addierens gleicher Summanden eine Rechenart zweiter Stufe, nämlich das Multiplizieren, eingeführt hat ($a + a + a + a = 4a$), hat man zur Vereinfachung der Multiplikation gleicher Faktoren eine Rechenart *dritter* Stufe, das Potenzieren (z. B. $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$), eingeführt.

1.3.5 Die Division

(lat. *dividere,* teilen)

Dividend	durch	Divisor	gleich	Quotient
12	:	3	=	4
12	:	(−3)	=	−4
−12	:	(−3)	=	4
−12	:	3	=	−4
allgemein:				
a	:	b	=	$a : b$

Für die Rechenoperationen Multiplikation und Division gilt gleichermaßen:
► Gleiches Vorzeichen von Multiplikand und Multiplikator oder von Dividend und Divisor ergeben eine positive Zahl, ungleiche Vorzeichen ergeben eine negative Zahl.