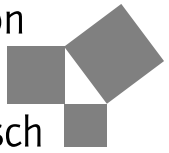




Edition

Harri

Deutsch



Vorkurs der Ingenieurmathematik

von

Jürgen Wendeler

5., erweiterte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 57327

Autor:

Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler war Professor an
der ehemaligen Fachhochschule der Telekom, Dieburg

5. Auflage 2022

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5944-4

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb
der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Alle Bilder wurden nach Vorlagen des Autors vom Verlag erstellt.

© 2022 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09212 Limbach-Oberfrohna
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagfoto: © Michael – stock.adobe.com
Druck: Plump Druck & Medien, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Dieses Buch dient der Vorbereitung auf ein Ingenieurstudium. Es entstand aus einer Reihe von Aufsätzen, die der Autor in den Unterrichtsblättern der Deutschen Telekom AG veröffentlicht hat und deren methodische Gestaltung Anerkennung fand. Bei der Zusammenfassung der Aufsätze zum vorliegenden Buch wurden dem gesteckten Ziel entsprechend wesentliche Ergänzungen und Erweiterungen vorgenommen.

Behandelt werden Rechenoperationen bis zum Logarithmieren, Funktionen einschließlich der trigonometrischen Funktionen und der algebraisch rationalen Funktionen, Gleichungen, Berechnungen am Dreieck, Vieleck und Kreis, Körperberechnungen und Grundlagen der Vektorrechnung.

Zwei ausführliche, für die fünfte Auflage um einen Abschnitt zur numerischen Lösung von Gleichungen erweiterte, Kapitel über die Grundlagen und einfachen Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung bereiten auf ein Hochschulstudium vor. Damit ist im wesentlichen das Gebiet der Elementarmathematik erfasst, und das Buch erhält für alle, die diesen Bereich der Mathematik wiederholen und festigen wollen, eine eigenständige Bedeutung.

Der Autor hat besonders auf Anschaulichkeit und Verständlichkeit des Lehrstoffs geachtet und am Anfang eine etwas breitere Darstellung gewählt, denn sichere Kenntnisse und Fertigkeiten in der Arithmetik sind eine unentbehrliche Grundlage für das weitere Studium.

Zahlreiche durchgerechnete Beispiele und Abbildungen unterstützen das methodische Anliegen des Buches. Die große Zahl von Aufgaben einschließlich Lösungen dient der Festigung des Lehrstoffs, seiner sicheren Anwendung sowie der notwendigen Selbstkontrolle für den Leser.

Das Buch ist zum Gebrauch neben Lehrveranstaltungen, aber auch in vollem Umfang zum Selbststudium geeignet. Der Autor dankt dem Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Dieburg, im Sommer 2022

J. Wendeler

Leserkontakt

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
www.europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen

1	Bestimmte und allgemeine Zahlen	14
1.1	Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme	14
1.1.1	Geschichtliches	14
1.1.2	Zahldarstellung	14
1.1.3	Zahlensysteme	15
1.2	Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen	16
1.2.1	Bestimmte Zahlen	16
1.2.2	Allgemeine Zahlen	17
1.3	Grundrechenarten für ganze Zahlen	18
1.3.1	Die Addition	18
1.3.2	Die Subtraktion	18
1.3.3	Die Multiplikation	19
1.3.4	Das Quadrat einer Zahl, der Potenzbegriff	19
1.3.5	Die Division	20
1.4	Brüche	21
1.4.1	Bruchrechnung	21
1.4.2	Dezimalbrüche	24
1.5	Proportionen	26
1.5.1	Definition und Eigenschaften	26
1.5.2	Direkte und indirekte Proportionalität	28
1.5.3	Prozentrechnung	30
1.6	Aufgaben	31
2	Klammern, Terme, Summen	34
2.1	Klammern	34
2.1.1	Einführung in die Klammerrechnung	34
2.1.2	Mehrere Klammern, Schachtelung	35
2.2	Terme, Summen	35
2.2.1	Definition des Begriffes Term	35
2.2.2	Erklärung der Summe, Summanden	36
2.2.3	Addition und Subtraktion zweier Summen	37
2.2.4	Multiplikation einer Summe mit einer Zahl, Ausklammern eines Faktors	38
2.2.5	Multiplikation zweier Summen	38
2.2.6	Binomische Formeln	39

2.2.7	Division einer Summe durch eine Zahl, Kürzen	45
2.2.8	Division einer Summe durch eine Summe, Bruchterme, Zerlegen in Faktoren	46
2.3	Aufgaben	50
3	Mengen	54
3.1	Definition	54
3.2	Relationen und Operationen mit Mengen	55
3.3	Aussagen und Aussageformen	58
3.4	Aufgaben	59
 II Funktionen und Gleichungen		
4	Lineare Gleichungen, Determinanten	62
4.1	Gleichungen	62
4.1.1	Definition	62
4.1.2	Bedeutung der Gleichung	62
4.1.3	Geschichtliches	63
4.1.4	Einteilung der Gleichungen	63
4.1.4.1	Identische Gleichungen	63
4.1.4.2	Funktionsgleichungen	64
4.1.4.3	Bestimmungsgleichungen	64
4.2	Das Lösen von Bestimmungsgleichungen	65
4.2.1	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten	66
4.2.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten	68
4.2.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten	70
4.2.4	n lineare Gleichungen mit n Unbekannten	72
4.3	Gleichungssysteme und Determinanten	73
4.3.1	Zweireihige Determinanten, Cramer-Regel	73
4.3.2	Dreireihige Determinanten, Regel von Sarrus	77
4.3.3	Determinantengesetze	79
4.3.4	n -reihige Determinanten	83
4.4	Ungleichungen	83
4.4.1	Definitionen	83
4.4.2	Rechengesetze für Ungleichungen	84
4.4.3	Intervalle	85
4.4.4	Lineare Ungleichungen	86
4.4.4.1	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	86
4.4.4.2	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	86
4.4.4.3	Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen	88
4.5	Aufgaben	89
5	Funktionen	94
5.1	Definition und Darstellung von Funktionen	94
5.1.1	Der Funktionsbegriff	94
5.1.2	Darstellung von Funktionen	95
5.1.2.1	Die Funktionstafel	95

5.1.2.2	Die Funktionsgleichung	97
5.1.2.3	Die Funktionskurve	100
5.2	Die lineare Funktion	102
5.2.1	Definition und grafische Darstellung	102
5.2.2	Grafische Lösung einer linearen Gleichung	109
5.2.3	Grafische Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten	111
5.2.4	Anwendungsbezogene Beispiele	114
5.3	Die Umkehrfunktion	119
5.4	Aufgaben	120
6	Potenzrechnung, die Potenzfunktion	122
6.1	Einführung	122
6.1.1	Begriff der Potenz, Definitionen	122
6.1.2	Geschichtliches	123
6.2	Potenzgesetze (Rechengesetze der Potenzen)	123
6.2.1	Addition/Subtraktion von Potenzen	123
6.2.2	Multiplikation von Potenzen	124
6.2.2.1	Potenzen mit gleichen Exponenten	124
6.2.2.2	Potenzen mit gleichen Basen	124
6.2.3	Division von Potenzen	124
6.2.3.1	Potenzen mit gleichen Exponenten	124
6.2.3.2	Potenzen mit gleichen Basen	124
6.2.4	Potenzieren einer Potenz	125
6.3	Anwendungen	126
6.4	Die Potenzfunktion	128
6.4.1	Definition	128
6.4.2	Graphen der Potenzfunktionen	129
6.4.2.1	Parabeln	129
6.4.2.2	Hyperbeln	137
6.4.3	Anwendungen	139
6.5	Aufgaben	141
7	Wurzelrechnung, Wurzelfunktionen	144
7.1	Einführung	144
7.1.1	Grundbegriffe und Definitionen	144
7.1.2	Quadratwurzel	146
7.1.3	Kubikwurzel	147
7.1.4	Rationale und irrationale Zahlen	148
7.1.5	Geschichtliches	149
7.2	Rechengesetze für Wurzeln	150
7.2.1	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten	150
7.2.2	Addition und Subtraktion von Wurzeln	151
7.2.3	Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	152
7.2.4	Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	153
7.2.5	Radizieren von Potenzen	154
7.2.6	Radizieren von Wurzeln	154
7.2.7	Wurzeln mit verschiedenen Exponenten	155

7.3	Rationalmachen des Nenners	156
7.4	Wurzelfunktionen	158
7.5	Aufgaben	162
8	Quadratische und Wurzelgleichungen	164
8.1	Definitionen	164
8.2	Lösungsverfahren	165
8.2.1	Sonderfälle	165
8.2.1.1	Rein quadratische Gleichungen	165
8.2.1.2	Quadratische Gleichungen mit fehlendem Absolutglied	167
8.2.2	Gemischt-quadratische Gleichungen	168
8.2.2.1	Quadratische Ergänzung, die p - q -Formel	168
8.2.2.2	Lösung in allgemeiner Form	172
8.2.2.3	Grafische Lösungen	173
8.3	Geschichtliches	175
8.4	Anwendungsbeispiele	175
8.5	Wurzelgleichungen	178
8.6	Aufgaben	180
9	Exponential- und Logarithmusfunktion	182
9.1	Exponentialfunktion	182
9.1.1	Grundbegriffe und Definition	182
9.1.2	Grafische Darstellung	183
9.1.3	e-Funktion	185
9.2	Logarithmische Funktion, Logarithmenrechnung	189
9.2.1	Logarithmische Funktion	189
9.2.2	Rechnen mit Logarithmen	192
9.2.3	Geschichtliches	196
9.2.4	Exponentialgleichungen	198
9.2.5	Funktionspapiere mit logarithmischem Maßstab	202
9.2.5.1	Einfach-logarithmisches Papier	202
9.2.5.2	Doppelt-logarithmisches Papier	205
9.3	Aufgaben	207
10	Trigonometrische Funktionen	209
10.1	Winkel	209
10.1.1	Definition	209
10.1.2	Grad- und Bogenmaß	210
10.1.3	Winkel an Geraden und Parallelen	214
10.2	Winkelfunktionen	216
10.2.1	Definition der Winkelfunktionen	216
10.2.2	Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis	221
10.2.3	Graphen und Eigenschaften der Winkelfunktionen	224
10.2.3.1	Die Graphen der Winkelfunktionen	224
10.2.3.2	Periodizität	225
10.2.3.3	Definitions- und Wertebereich	225
10.2.3.4	Symmetrieeigenschaften	226
10.3	Additionstheoreme	226
10.3.1	Herleitung	227

10.3.2	Funktionen des doppelten Winkels	229
10.3.3	Summe und Differenz der sin- und cos-Werte zweier Winkel . .	230
10.3.4	Quadrantenrelationen	230
10.4	Arkusfunktionen	231
10.4.1	Definition	231
10.4.2	Grafische Darstellung der Arkusfunktionen	233
10.4.3	Darstellung am Einheitskreis	233
10.4.4	Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	234
10.4.5	Bestimmung von Winkeln mit den Arkusfunktionen	234
10.5	Goniometrische Gleichungen	235
10.6	Sinusfunktion, harmonische Schwingungen	239
10.7	Aufgaben	244
11	Algebraische rationale Funktionen	246
11.1	Einteilung der Funktionen	246
11.2	Algebraische ganzrationale Funktionen	246
11.2.1	Grundbegriffe	246
11.2.2	Horner-Schema	254
11.3	Algebraische gebrochene rationale Funktionen	257
11.3.1	Definitionen	257
11.3.2	Besondere Eigenschaften der gebrochenen rationalen Funktion .	258
11.3.2.1	Nullstellen	258
11.3.2.2	Polstellen	259
11.3.2.3	Lücken	263
11.3.2.4	Asymptoten	264
11.3.3	Partialbruchzerlegung	271
11.4	Aufgaben	275
12	Grundlagen der Differenzialrechnung	277
12.1	Einführung, Definitionen	277
12.1.1	Aufgabe der Differenzialrechnung	277
12.1.2	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten – der Differenzialquotient	279
12.1.3	Ableitung als Funktion	286
12.1.4	Höhere Ableitungen	287
12.1.5	Differenzial	288
12.2	Differenziationsregeln	290
12.2.1	Differenzieren einer konstanten Funktion	290
12.2.2	Faktorregel	290
12.2.3	Summenregel	291
12.2.4	Produktregel	291
12.2.5	Quotientenregel	293
12.2.6	Kettenregel	294
12.2.7	Differenzieren einer implizit gegebenen Funktion	297
12.2.8	Differenzieren mithilfe der Umkehrfunktion	300
12.2.9	Logarithmisches Differenzieren	301
12.3	Ableitungen einiger elementarer Funktionen	302

12.4	Einige Anwendungen der Differenzialrechnung	303
12.4.1	Kurvenuntersuchungen	303
12.4.1.1	Ganze Funktionen	303
12.4.1.2	Gebrochene rationale Funktionen	308
12.4.2	Optimierungsaufgaben	312
12.4.3	Näherungsweise Lösung von Bestimmungsgleichungen	317
12.5	Aufgaben	323
13	Grundlagen der Integralrechnung	324
13.1	Anwendung der Integralrechnung	324
13.2	Unbestimmte Integrale	324
13.2.1	Stammfunktionen und Umkehrung der Differenziation	324
13.2.2	Grundintegrale	326
13.2.3	Geometrische Deutung der Stammfunktionen	327
13.2.4	Ausblick: Differenzialgleichungen	329
13.2.5	Integrationsregeln	330
13.2.6	Lineare Substitution	330
13.3	Bestimmte Integrale	333
13.3.1	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe	333
13.3.2	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	335
13.3.3	Rechenregeln für bestimmte Integrale	336
13.3.3.1	Umkehrung des Integrationsweges	336
13.3.3.2	Zerlegung des Integrationsweges	336
13.3.3.3	Linearität	336
13.3.4	Lineare Substitution	337
13.3.5	Eine Anwendung aus der Mechanik	339
13.3.6	Geometrische Anwendungen	343
13.3.6.1	Flächenberechnung	343
13.3.6.2	Berechnung von Bogenlängen	349
13.3.6.3	Berechnung von Rauminhalten und Mantelflächen von rotationssymmetrischen Körpern	352
13.3.7	Arbeitsintegrale	355
13.3.7.1	Mechanische Arbeit	355
13.3.7.2	Elektrische Arbeit	360
13.3.8	Mittelwerte	362
13.4	Aufgaben	367

III Geometrie und Vektorrechnung

14	Das Dreieck	370
14.1	Allgemeines	370
14.2	Die Kongruenz von Dreiecken	373
14.3	Die Ähnlichkeit von Dreiecken	375
14.4	Höhen, Mittelsenkrechte und Seitenhalbierende	377
14.5	Flächeninhalt des Dreiecks	379
14.6	Das rechtwinklige Dreieck	380
14.7	Das gleichschenklige Dreieck	384
14.8	Das gleichseitige Dreieck	385

14.9	Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks	385
14.9.1	Allgemeines	385
14.9.2	Der Sinussatz	386
14.9.3	Der Cosinussatz	388
14.9.4	Die Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	391
14.10	Aufgaben	393
15	Das Viereck, Vielecke	396
15.1	Das allgemeine Viereck	396
15.2	Spezielle Vierecke	398
15.3	Das n -Eck	401
15.4	Aufgaben	404
16	Der Kreis	406
16.1	Definition, Umfang und Fläche	406
16.2	Geraden, Strecken und Winkel am Kreis	407
16.3	Kreissektor und Kreissegment	412
16.4	Ähnlichkeitssätze am Kreis	414
16.5	Zwei Kreise	415
16.6	Aufgaben	418
17	Körperberechnung	420
17.1	Allgemeines über Körper	420
17.2	Der Quader	421
17.3	Das Prisma	423
17.4	Die Pyramide	426
17.5	Der Zylinder	432
17.6	Der Kegel	434
17.7	Die Kugel	436
17.8	Aufgaben	440
18	Grundlagen der Vektorrechnung	443
18.1	Grundbegriffe, Definitionen	443
18.1.1	Vektor und Skalar	443
18.1.2	Definitionen	445
18.2	Rechengesetze	446
18.2.1	Addition	446
18.2.2	Subtraktion	447
18.2.3	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	448
18.3	Komponenten, Koordinaten, Richtungswinkel	449
18.4	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	453
18.5	Skalares Produkt zweier Vektoren	459
18.5.1	Definitionen	459
18.5.2	Eigenschaften des skalaren Produktes	459
18.5.3	Komponentendarstellung des Skalarproduktes	462
18.6	Vektorprodukt zweier Vektoren	464
18.6.1	Definition	464
18.6.2	Eigenschaften des Vektorproduktes	465
18.6.3	Komponentendarstellung des Vektorproduktes	466

18.7	Spatprodukt	470
18.7.1	Definition	470
18.7.2	Geometrische Deutung des Spatproduktes	471
18.7.3	Rechengesetze	472
18.8	Aufgaben	472
Lösungen	474
Sachwortverzeichnis	497

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Bestimmte und allgemeine Zahlen

1.1 Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme

1.1.1 Geschichtliches

Zu Beginn allen mathematischen Denkens stand das Zählen. Die dazu benötigten Zahlzeichen oder *Ziffern* stammen von den Indern und wurden von den *Arabern* auf ihren Kriegszügen nach Europa gebracht, wo sie die bis dahin allgemein üblichen römischen Zahlzeichen verdrängten.

Die Verbreitung der *arabischen Ziffern* in weiten Kreisen der deutschen Bevölkerung und das Rechnen mit ihnen gelang erst dem berühmten Rechenmeister ADAM RIESE (1492–1559) durch sein im Jahr 1525 herausgegebenes Rechenbuch.

1.1.2 Zahldarstellung

Die wohl einfachste Form der Zahldarstellung ist das *Strichsystem*, wie es bei den sog. Kerbhölzern zum Notieren von Schulden üblich war (daher auch die Redewendung: Er hat etwas auf dem Kerbholz). Für größere Zahlen ging bei diesem Verfahren der Überblick verloren. Deshalb fasste man eine bestimmte Anzahl von Strichen zu Gruppen zusammen (Fünfergruppe, Zehnergruppe, ...) und gab diesen Gruppen neue Zahlzeichen. Dieses Verfahren führte zum sog. *Additionssystem*, dessen bekanntestes Beispiel die römische Zahlenschreibweise ist:

Von den Grundzeichen ($I = 1$; $X = 10$; $C = 100$; $M = 1000$) werden je zehn zur nächsthöheren Gruppe zusammengefasst; dazu gibt es noch Hilfszeichen ($V = 5$; $L = 50$; $D = 500$). Durch Addieren (lateinisch *addere*, hinzufügen) der einzelnen Zeichen lassen sich größere Zahlen darstellen. Steht ein Zeichen (*Ziffer*) links neben einem höheren Zeichen, bedeutet das eine Subtraktion. Damit wird die viermalige Wiederholung eines Zeichens vermieden.

Beispiel 1.1

$$\begin{aligned}
 1879 &= \text{MDCCCLXXIX} \\
 &= 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 - 1 + 10 \\
 1993 &= \text{MXMIII} \\
 &= 1000 - 10 + 1000 + 1 + 1 + 1
 \end{aligned}$$

(Häufig wird auch die Schreibweise MCMLXXXIII oder MCMXCIII verwendet.)

Auch dieses Verfahren erwies sich bei noch größeren Zahlen und vor allem beim Addieren als sehr umständlich.

1.1.3 Zahlensysteme

Deshalb traf es sich gut, dass die Araber mit den indischen Zahlenzeichen auch das von den Indern stammende Positionssystem¹⁾ nach Europa brachten, das erst die Darstellung von beliebig großen Zahlen in der heutigen einfachen Form mittels neun Ziffern und der Null als Zeichen für eine leere Stelle ermöglichte.

In diesem System werden je zehn Einheiten (Einer, E) zu einer neuen Gruppe, den Zehnern, Z, zusammengefasst; davon wieder zehn zu einem Hunderter, H, usw. Jedoch wird für diese übergeordneten Gruppen - und das macht dieses System jetzt so übersichtlich und einfach - kein neues Zeichen wie bei den Römern eingeführt, sondern sie werden *durch ihre Stellung* innerhalb des ganzen Zahlzeichens *kenntlich gemacht*. In dem römischen Zeichen III für drei hat jede der drei Ziffern den Zahlenwert 1, und da es sich um ein Additionssystem handelt, ergibt sich die ganze Zahl durch Addition der drei Einzelwerte. In dem Zahlzeichen 111 für einhundertelf haben ebenfalls alle drei Ziffern den Zahlenwert 1, jedoch stehen sie innerhalb des ganzen Zahlzeichens an verschiedenen Stellen. Sie haben also *verschiedene Stellenwerte*, und zwar steht der niedrigste Stellenwert – der Einer – am weitesten rechts.

Beispiel 1.2:

$$\begin{aligned}
 1993 &= 1\text{T} + 9\text{H} + 9\text{Z} + 3 \\
 &= 1000 + 900 + 90 + 3 \\
 &= 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0
 \end{aligned}$$

[Über die Schreibweise und Bedeutung von $10^3, \dots, 10^0$ siehe Abschnitt 6.1]

Da jeweils zu Zehnergruppen zusammengefasst wird, spricht man von einem *dekadischen* (griechisch *deka*, zehn) Positionssystem oder von einem *Dezimalsystem* (lat. *decem*, zehn). Die Zahl zehn heißt auch *Basis* (Grundzahl) des Systems.

Andere Zahlensysteme wie das *Zwölfersystem* (sprachliche Überreste: Dutzend, Gros) oder das *Sechzigersystem* (Sexagesimalsystem) der Babylonier (Überreste: 1 Stunde = 60 Minuten = $60 \cdot 60$ Sekunden), haben sich nicht halten können. Dafür hat ein anderes Zahlensystem, das *Dualsystem* (lat. *duo*, zwei), auch *Zweiersystem* oder *Binärsystem* (lat. *bini*, je zwei) genannt, als Rechenbasis der Computer (elektronischen Rechenanlagen) eine

¹⁾ *Position* hier in der Bedeutung: Stelle Lage Standort.

überragende Bedeutung gewonnen. – Entsprechend dem Dezimalsystem, bei dem man höchstens zehn Zeichen benötigt (0, 1, 2, ..., 9), um eine Zahl anschreiben zu können, braucht man beim Dualsystem nur zwei Zeichen (0, 1 oder O, L). Damit wird die Darstellung einer Zahl sehr aufwendig, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3:

$$\begin{aligned} 1993_{10} &= \text{LLLLLOOLOOL}_2 \\ &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 2^3 + 0 \cdot 2^2 \\ &\quad + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \\ &= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 8 + 1 \end{aligned}$$

[Die Indizes (lat. *Index*, Anzeiger) 10 und 2 in der ersten Zeile geben das Zahlensystem an; L ist das Besetztzeichen, O das Leerzeichen für eine Position in Dualsystem.]

Aber es ist technisch am einfachsten, im Computer elektrische und elektronische Bauelemente zu verwenden, die nur zwischen zwei verschiedenen Zuständen (entsprechend den zwei Zeichen des Dualsystems) unterscheiden müssen:

Durch einen Draht fließt entweder ein Strom oder nicht, ein Schalter ist entweder geschlossen oder offen, ein Magnetring ist entweder rechtsherum oder linksherum magnetisiert usw.

Bei der Bedienung eines Rechners werden die Zahlen als Dezimalzahlen eingegeben; der Rechner übersetzt sie dann ins Dualsystem, ehe er mit ihnen weiterrechnet.

1.2 Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen

1.2.1 Bestimmte Zahlen

Ursprünglich kannte man nur die *natürlichen Zahlen* 1, 2, 3, ..., die man als Folge des Zählens erhält. Die Folge der natürlichen Zahlen ist unbegrenzt.

Grafisch (griechisch *graphein*, zeichnen) lässt sich die Folge durch den *Zahlenstrahl* darstellen. Man trägt auf einem waagerechten Strahl (Bild 1.1) vom Anfangspunkt 0 (lat. *origo*, Anfang) aus eine beliebige Einheit, z. B. 1 cm, wiederholt nach rechts ab.

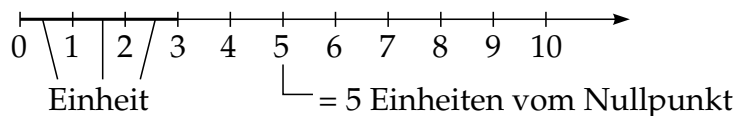


Bild 1.1

Auf diese Weise erhält man Bildpunkte, die man durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... kennzeichnet. Der Ausgangspunkt 0 heißt *Nullpunkt* der Zählung. Die Zahlen geben den Abstand in Einheiten vom Nullpunkt an. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit N bezeichnet.

Bald schon genügten die natürlichen Zahlen nicht mehr den Ansprüchen des täglichen Lebens. So sind zwar 50 € dem *Betrag* nach immer gleich; es ist aber ein Unterschied, ob

man sie zu bekommen hat oder jemandem zahlen muss. Diesen Unterschied kennzeichnet man durch das *Vorzeichen*, mit dem der Betrag von 50 € versehen wird. Im ersten Fall hat man 50 € gut (Guthaben: +50 €). Beträge mit einem *Pluszeichen* („und“-Zeichen, +) oder *ohne Vorzeichen* nennt man *positive Zahlen*. Als ganze Zahlen entsprechen sie den bereits bekannten natürlichen Zahlen. Beträge mit einem *Minuszeichen* („weniger“-Zeichen, –) nennt man *negative Zahlen*. Beide zusammen bilden die Menge Z der *ganzen Zahlen*.

Man bezeichnet den Schritt von den natürlichen zu den ganzen Zahlen als *erste Erweiterung des Zahlenbereiches*.

Die negativen Zahlen stellt man grafisch ebenfalls mittels eines Zahlenstrahles dar, der diesmal jedoch nach links orientiert ist (Bild 1.2).

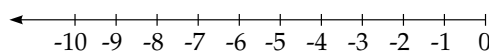


Bild 1.2

Fasst man beide Strahlen zusammen, so erhält man die *Zahlengerade* – sie besitzt keinen Anfang und kein Ende – und ist damit eine grafische Darstellung der ganzen Zahlen (Bild 1.3). Die Orientierung geschieht von links nach rechts in Richtung immer größerer Zahlen. Jede Zahl hat einen kleineren Vorgänger (z. B. $3 < 4$, „drei ist kleiner als vier“, oder $-5 < -4$, „minus fünf ist kleiner als minus vier“) und einen größeren Nachfolger (z. B. $5 > 4$, „fünf ist größer als vier“, oder $-6 > -7$, „minus sechs ist größer als minus sieben“).

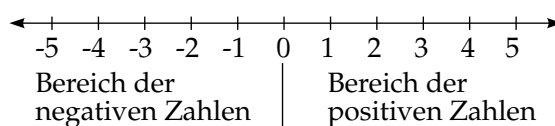


Bild 1.3

Zahlen, die vom Nullpunkt aus den gleichen Abstand haben, besitzen den gleichen *absoluten Betrag*. Man kennzeichnet den Betrag einer Größe, indem man sie in zwei senkrechte Striche, die Betragsstriche, einschließt, z. B. $|-3| = |+3| = 3$ (der Betrag von -3 ist gleich dem Betrag von $+3$, nämlich 3).

1.2.2 Allgemeine Zahlen

Alle hier bisher betrachteten Zahlen sind *bestimmte Zahlen*, weil sie eine genau bestimmte Anzahl von Einheiten angeben. Sie werden *mit Ziffern geschrieben* und spielen eine wichtige Rolle im täglichen Leben.

In der Mathematik jedoch, wo es darauf ankommt, allgemein gültige Formeln und Gesetzmäßigkeiten anzugeben und allgemeine Beweise zu führen, reichen bestimmte Zahlen allein nicht mehr aus. Das Einführen von Buchstaben zur Bezeichnung *allgemeiner Zahlen* durch den französischen Mathematiker FRANCOIS VIÉTA (1540–1603) förderte deshalb den Ausbau der Mathematik, insbesondere der Arithmetik (griechisch *arithmos*, Zahl) ganz erheblich. – Schon ein Jahrhundert vor Viéta benutzte der deutsche JOHANNES MÜLLER

(aus Königsberg in Franken) die Buchstaben zur Bezeichnung allgemeiner Zahlen. Sein frühzeitiger Tod verhinderte indes eine Ausbreitung dieser mathematischen Zeichensprache.

Bei der „Buchstabenrechnung“ verwendet man gewöhnlich die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets: a, b, c, \dots (Ausnahme: Winkel werden mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet). Sie stellen Zahlen dar, die keine bestimmte Einheit haben. Ihnen wird von Fall zu Fall nicht nur ein bestimmter Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Einheit zugeordnet. Dabei ist zu beachten, dass *ein und derselbe Buchstabe in einer Aufgabe stets ein und denselben Zahlenwert bedeutet*.

1.3 Grundrechenarten für ganze Zahlen

Ganze und allgemeine Zahlen lassen sich durch Rechenoperationen (Rechenarten) miteinander verknüpfen. Die vier bekanntesten, die sog. Grundrechenarten, sollen hier kurz wiederholt werden.

1.3.1 Die Addition

(lat. *addere*, hinzufügen)

Summand	plus	Summand	gleich	Summe
3	+	4	=	7
-3	+	4	=	$4 - 3 = 1$
-3	+	(-4)	=	$-3 - 4 = -7$
3	+	(-4)	=	$3 - 4 = -1$
allgemein:				
a	+	b	=	$a + b$

Dabei gilt das *kommutative Gesetz* (lat. *commutare*, vertauschen):

$$a + b = b + a$$

(1.1)

► Bei der Addition ist die Reihenfolge der Summanden beliebig.

1.3.2 Die Subtraktion

(lat. *subtrahere*, abziehen)

Minuend	minus	Subtrahend	gleich	Differenz
7	-	3	=	4
7	-	8	=	-1
7	-	(-3)	=	$7 + 3 = 10$
-7	-	3	=	-10
-7	-	(-3)	=	$-7 + 3 = -4$
allgemein:				
a	-	b	=	$a - b$

Für *beide* Rechenoperationen gilt:

► Gleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Addition; ungleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Subtraktion.

Addition und Subtraktion werden auch als Rechenoperationen erster Stufe bezeichnet. Rechenoperationen *zweiter Stufe* sind die Multiplikation (Abschnitt 1.3.3) und die Division (Abschnitt 1.3.5). Das Potenzieren (s. Abschnitt 1.3.4) gehört zur Rechenart dritter Stufe.

1.3.3 Die Multiplikation

(lat. *multiplicare*, vervielfältigen)

Multiplikator	mal	Multiplikand	gleich	Produkt
3	·	4	=	12
3	·	(-4)	=	-12
-3	·	(-4)	=	12
-3	·	4	=	-12
allgemein:				
a	·	b	=	ab

Auch hierbei gilt das kommutative Gesetz:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (1.2)$$

- Bei der Multiplikation ist die *Reihenfolge der Faktoren* beliebig (Multiplikator und Multiplikand werden normalerweise als Faktoren bezeichnet).

1.3.4 Das Quadrat einer Zahl, der Potenzbegriff

Multipliziert man eine Zahl mit sich selbst, so erhält man das *Quadrat der Zahl*.

Beispiel 1.4:

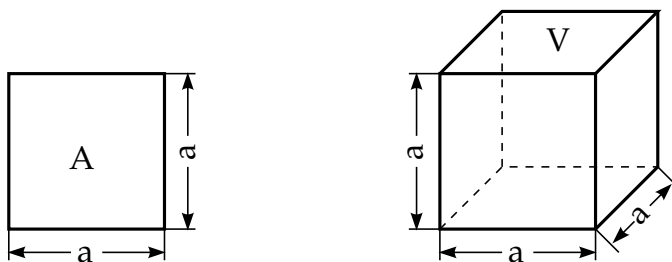
$$a \cdot a = a^2$$

in Worten: „a mal a gleich a-Quadrat“

oder „a mal a gleich a hoch 2“.

Die Zahl auf der rechten Seite heißt *Quadratzahl*. Quadratzahlen sind: 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; ... Das Wort „Quadrat“ stammt aus der Geometrie (urspr. Landvermessung: Teil der Mathematik, die sich mit räumlichen Figuren und deren Darstellung befasst) und kennzeichnet dort ein Rechteck gleicher Seitenlänge (Bild 1.4). Seinen Flächeninhalt A erhält man durch Multiplikation der Längen zweier aufeinander senkrecht stehender Seiten:

$$A = a \cdot a = a^2$$



Bilder 1.4 und 1.5

Man sagt auch:

► Die Fläche eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz (a^2) seiner Seitenlänge (a).

Der neue Ausdruck „Quadrat“ gehört wie auch die als Hochzahl geschriebene 2 zur *Potenzrechnung* (lat. *potentia*, Macht). a heißt *Basis* oder *Grundzahl*, die Hochzahl wird *Exponent* genannt (lat. *exponere*, herausstellen).

Bildet man das Produkt aus dreimal der gleichen Zahl als Faktor, erhält man eine *Kubikzahl* (lat. *cubus*, Würfel).

Beispiel 1.5:

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

in Worten: „a mal a mal a gleich a hoch drei“.

Geometrisch lässt sich eine Kubikzahl deuten als das Volumen V (der Rauminhalt) eines Würfels (eines Quaders mit gleichen Kantenlängen):

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3 \quad (\text{Bild 1.5})$$

Man sagt:

► Das Volumen eines Würfels ist gleich der dritten Potenz (a^3) seiner Seitenlänge (a).

Kubikzahlen sind: 1; 8; 27; 64; 125; ...

Tritt allgemein eine Zahl a n -mal als Faktor in einem Produkt auf, also

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a = a^n,$$

spricht man von der n -ten Potenz von a (gesprochen: „von der n -ten Potenz ...“). Für sie ist eine geometrische Deutung im 3-dimensionalen Raum nicht mehr möglich.

Abschließend lässt sich folgendes sagen:

► Ebenso wie man zur Vereinfachung des Addierens gleicher Summanden eine Rechenart zweiter Stufe, nämlich das Multiplizieren, eingeführt hat ($a + a + a + a = 4a$), hat man zur Vereinfachung der Multiplikation gleicher Faktoren eine Rechenart *dritter* Stufe, das Potenzieren (z. B. $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$), eingeführt.

1.3.5 Die Division

(lat. *dividere*, teilen)

Dividend	durch	Divisor	gleich	Quotient
12	:	3	=	4
12	:	(-3)	=	-4
-12	:	(-3)	=	4
-12	:	3	=	-4
allgemein:				
a	:	b	=	$a : b$

Für die Rechenoperationen Multiplikation und Division gilt gleichermaßen:

► Gleiches Vorzeichen von Multiplikand und Multiplikator oder von Dividend und Divisor ergeben eine positive Zahl, ungleiche Vorzeichen ergeben eine negative Zahl.