



Edition
Harri 
Deutsch

Finanzmathematik

Das große Aufgabenbuch

von
Andreas Pfeifer

1. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 57846

Der Autor

Prof. Dr. Andreas Pfeifer ist Professor für Finanz- und Wirtschaftsmathematik an der Hochschule Darmstadt (University of Applied Sciences).

E-Mail: andreas.pfeifer@h-da.de

1. Auflage 2015

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5784-6

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autor und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Die dargestellten Informationen dienen nicht als Anlageberatung oder Empfehlung für irgendwelche finanziellen Geschäfte. Eingetragene Warenzeichen sind nicht besonders gekennzeichnet. Deshalb ist den Bezeichnungen nicht zu entnehmen, ob sie freie Warennamen sind bzw. ob Patente oder Gebrauchsmuster vorliegen.

Bei direkten oder indirekten Verweisen auf Internetseiten distanzieren sich der Verlag Europa-Lehrmittel und der Autor von den Inhalten dieser fremden Internetseiten. Verlag und Autor haften nicht für die Inhalte dieser Seiten.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG,
42781 Haan-Gruiten

<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Das Buch enthält **444 Aufgaben von einfachen Zinsberechnungen bis zu derivativen Finanzprodukten**. Zu allen Aufgaben gibt es **Lösungen mit ausführliche Herleitungen und vielen Erläuterungen**, so dass diese Aufgabensammlung nicht nur sehr gut als Ergänzung zu Vorlesungen, sondern auch zum eigenständigen Lernen und Üben geeignet ist.

Begonnen wird mit anwendungsbezogenen Aufgaben zu Folgen und Reihen, zur Prozent- und einfachen Zinsrechnung, die nicht nur in der Finanzmathematik-Vorlesungen, sondern auch in **Gymnasien und Berufsschulen** und in **Mathematik-Grundvorlesungen für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure** sinnvoll eingesetzt werden können.

Enthalten ist auch ein **Themenindex**. Bei diesem Index sind die Inhalte der Aufgaben nach Themen und Anwendungsgebieten wie beispielsweise Bewertungsgesetz, Verbraucherpreisindex, Erbschaftsteuer oder Einkommensteuer angegeben. Dieser Themenindex ist nützlich, um bei Vorbereitungen von Klausuren und Fachgesprächen Aufgaben zu speziellen – insbesondere anwendungsbezogenen – Fragestellungen schnell zu finden.

Die **Formelsammlung** mit einer kompakten Zusammenstellung der wichtigsten Formeln der Finanzmathematik ist nicht im Buch integriert, sondern befindet sich als Beileger am Ende des Buches. Sie kann dadurch bei Klausuren, bei denen nur eine Formelsammlung als Hilfsmittel erlaubt ist, benutzt werden.

Das Buch besteht aus vier Bereichen und einer Formelsammlung als Beileger.

Aufgaben:

Am Anfang (Kapitel 1 bis 6) stehen die Aufgaben aus dem Gebiet der klassischen Finanzmathematik, also zur Zins- und Zinseszinsrechnung, zum Äquivalenzprinzip, zur Renten- und Tilgungsrechnung und zur Abschreibung. Danach (Kapitel 7 bis 9) folgen Aufgaben zur Bewertung festverzinslicher Wertpapiere, zu Investmentfonds und zur Portfoliooptimierung. Den Abschluss (Kapitel 10 und 11) bilden Aufgaben zu Derivaten, das heißt unter anderem Aufgaben zu Optionen, Futures, Forwards, FRAs, Swaps, Caps und zum Value-at-Risk. Die Kapiteleinteilung folgt dem Lehrbuch „Praktische Finanzmathematik“ von Andreas Pfeifer, das im Verlag Harri Deutsch, jetzt Verlag Europa-Lehrmittel, erschienen ist (<http://www.europa-lehrmittel.de/56283.html>).

Tests:

Anhand von vier Tests können Sie Ihre Kenntnisse überprüfen. Jeder Test ist für eine Dauer von 90 Minuten vorgesehen.

Lösungen zu den Aufgaben und Tests:

Der umfangreichste Teil dieses Buches enthält die Lösungen zu allen Aufgaben und Tests mit ausführlichen Darstellungen der Lösungswege, wobei das Folgende zu beachten ist:

Mit Zwischenresultaten wird in der Regel ungerundet weitergerechnet, auch wenn die Zwischenresultate gerundet dargestellt werden. Endergebnisse bei Prozentsätzen werden in der Regel mit drei Nachkommastellen angegeben, auch wenn z. B. nach der Preisangabenverordnung nur zwei Stellen gefordert werden. Manchmal werden Endergebnisse in Euro statt mit zwei mit viel mehr Nachkommastellen angegeben. Dadurch ist leichter festzustellen, wenn Sie die Aufgaben selbst lösen, ob Ihr Ergebnis mit der Musterlösung exakt übereinstimmt.

Bei den Lösungen der Aufgaben wird in einigen Fällen auf Formeln verwiesen, die Sie in der Formelsammlung im Beileger zum Buch finden. **FS ist dabei die Abkürzung für Formelsammlung.** Die Angabe beispielsweise FS (4.10) bedeutet: Formel (4.10) in der Formelsammlung.

Themenindex:

In diesem Index sind die Inhalte der Aufgaben nach Themen und Anwendungsgebieten wie beispielsweise Bewertungsgesetz, Verbraucherpreisindex oder Einkommensteuer sortiert. Dieser Themenindex ist nützlich, um bei Vorbereitungen von Klausuren und Fachgesprächen Aufgaben zu speziellen – insbesondere anwendungsbezogenen – Fragestellungen schnell zu finden.

Formelsammlung im Beileger:

Dieser Teil enthält wichtige Formeln, die bei der Lösung der Aufgaben hilfreich sind. Das Stichwortverzeichnis der Formelsammlung ermöglicht den schnellen Zugriff auf die Sie interessierenden Themen der Formelsammlung.

Des Weiteren gibt es eine **Webseite zum Buch:**

Im Internet unter <http://www.europa-lehrmittel.de/57846.html> finden Sie

- Aktualisierungen und – sofern nötig – Verbesserungen zu diesem Buch
- Die vier Tests aus dem Buch als druckbare PDF-Dateien, die in Lehrveranstaltungen als Kursunterlagen verteilt werden dürfen.

Wenn Sie mir Hinweise auf Fehler oder Ungenauigkeiten geben, bin ich dankbar und werde um eine schnelle Antwort bestrebt sein.

Andreas Pfeifer

Hinweis:

FS (x.y) bedeutet: Formel (x.y) in der Formelsammlung.

Inhaltsverzeichnis

Aufgaben.....	1
1 Grundlagen.....	1
1.1 Rechnen mit reellen Zahlen und Lösen von Gleichungen.....	1
1.2 Folgen und Summen.....	2
1.3 Anlagemöglichkeiten.....	4
2 Zinsrechnung.....	5
2.1 Prozentrechnung.....	5
2.2 Einfache Zinsen.....	13
2.3 Zinseszinsen, vorschüssige, unterjährige und stetige Verzinsung.....	19
2.4 Gemischte Verzinsung.....	25
3 Äquivalenz und Verzinsung.....	27
3.1 Äquivalenz, Effektivverzinsung, Kapitalwert.....	27
3.2 Laufzeitabhängige Zinssätze, Diskontierungsfaktoren.....	33
3.3 Investitionsrechnung.....	36
4 Rentenrechnung.....	38
4.1 Konstante Rentenhöhe (Zins- gleich Rentenperiode).....	38
4.2 Konstante Rentenhöhe (Zins- ungleich Rentenperiode).....	44
4.3 Veränderliche Rentenhöhe.....	48
5 Abschreibung.....	50
6 Tilgungsrechnung.....	54
6.1 Darlehen/Kredit (ohne Effektivzinsfragen).....	54
6.2 Darlehen/Kredit (mit Effektivzinsfragen).....	59
6.3 Verzinsliche Wertpapiere (Kuponanleihen).....	63
7 Bewertung festverzinslicher Wertpapiere.....	66
7.1 Barwert, Rendite, Arbitrage.....	66
7.2 Berechnung von Spot-Rates.....	70
7.3 Duration, Konvexität und andere Kennzahlen.....	70
8 Investmentfonds.....	74
9 Grundlagen der Portfoliotheorie.....	77
9.1 Rendite, Risiko, Volatilität.....	77
9.2 Portfoliooptimierung.....	81
10 Derivative Finanzprodukte.....	85
10.1 Finanzmärkte.....	85
10.2 Variabel verzinsliche Anleihen.....	86
10.3 Futures / Forwards.....	88

10.4 Optionen.....	92
Allgemeine Aufgaben.....	92
Binomialmodell.....	97
Black-Scholes-Merton-Modell.....	99
10.5 Forward-Rate-Agreements.....	103
10.6 Caps, Floors und Collars.....	106
10.7 Swaps.....	108
10.8 Weitere Finanzprodukte und Kombinationen von Standard- Finanzprodukten.....	111
11 Value-at-Risk.....	115
11.1 Value-at-Risk-Grundlagen.....	115
11.2 Cashflow-Mapping.....	122
12 Verteilungen.....	123
Tests.....	125
Test 1 (zu den Kapiteln 1 bis 6).....	125
Test 2 (zu den Kapiteln 1 bis 6).....	128
Test 3 (zu den Kapiteln 7 bis 9).....	132
Test 4 (zu den Kapiteln 10 bis 11).....	135
Lösungen.....	137
Lösungen zu den Aufgaben.....	137
Lösungen zum Test 1.....	432
Lösungen zum Test 2.....	436
Lösungen zum Test 3.....	439
Lösungen zum Test 4.....	443
Themenverzeichnis.....	447

Formelsammlung als Beileger

Aufgaben

1 Grundlagen

1.1 Rechnen mit reellen Zahlen und Lösen von Gleichungen

Aufgabe 1.1.1:

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\frac{3-41}{5-\frac{1}{4}}$

b) $2^{12} \cdot 2^{-14}$

c) $2^{-4} \cdot 2^6 \cdot 4^{-1}$

d) $\frac{2^{11} \cdot 3^8 \cdot 4^{-1}}{3^7 \cdot 4^5 \cdot 2^{-1}}$

e) $\frac{(1+0,04)^{\frac{5}{2}}}{(1+0,04)^{\frac{5}{2}-1}} - 1$

f) $\sqrt{16} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$

g) $\log_{10}(1)$

h) $\log_{10}(1.000)$

i) $\log_5(125)$

j) $\ln(e^3 \cdot e^2)$

k) $\ln(e^4 \cdot e^6) - \ln(e^5)$

l) $\log_{10}(20) - \log_{10}(2)$.

Aufgabe 1.1.2:

Berechnen Sie x:

a) $\sqrt[2]{(1+0,1) \cdot (1+x)} - 1 = 0,09$

b) $x \cdot (1+0,04)^{12} = 342,14 \text{ €} \cdot (1+0,04)^4$

c) $1.000 \text{ €} (1+x)^4 = 2.000 \text{ €}$

d) $x - 3^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{3}}$

e) $120 \text{ €} (1+0,1)^x = 240 \text{ €}$

f) $10 = \frac{1-(1+0,05)^{-x}}{0,05}$

Bestimmen Sie alle positiven reellen Lösungen:

g) $2x^2 - 14x + 24 = 0$

h) $200 = \frac{103}{(1+x)^{\frac{4}{12}}} + \frac{103}{(1+x)^{\frac{8}{12}}}$.

Aufgabe 1.1.3:

Vermieter Pedro Pan vermietet zwei Wohnungen in seinem Haus. Familie A zahlt 500 Euro Miete mehr als Familie B. Beide Familien zahlen insgesamt 1.700 Euro monatlich Miete. Wie hoch ist die monatliche Miete der Familie B?

Aufgabe 1.1.4:

Der Tank des Autos von Herrn Müller fasst laut Hersteller maximal 55 Liter. Die Tankanzeige am Armaturenbrett zeigt an, dass der Tank nur noch zu einem Achtel gefüllt ist. Das Auto hat einen durchschnittlichen Benzinverbrauch von 7,5 Litern pro 100 Kilometer. Erreicht Herr Müller noch die nächste Tankstelle, die 60 Kilometer entfernt ist?¹

¹ Quelle: Beispielaufgabe für die 9. Jahrgangsstufe aus dem IQB-Schulleistungsvergleich 2012 der deutschen Bundesländer (www.iqb.hu-berlin.de).

1.2 Folgen und Summen

Aufgabe 1.2.1:

- Was ist eine geometrische Folge?
- Warum spielen in der Finanzmathematik geometrische Folgen eine große Rolle?
- Worin besteht der Unterschied zwischen einer geometrischen und einer arithmetischen Zahlenfolge?
- Stellen Sie formelmäßig jeweils ein allgemeines Bildungsgesetz für eine geometrische und eine arithmetische Folge auf.
- Welche Beziehung besteht zwischen Zahlenfolgen und Funktionen?
- Was ist der Unterschied zwischen Folgen und Reihen?

Aufgabe 1.2.2:

Frau Maier spart jeden Tag einen bestimmten Geldbetrag. Sie beginnt am 1. Januar mit 4 € und erhöht den Betrag täglich um einen Euro.

- Wie viel Euro spart Frau Meier am letzten Tag des Monats Januar?
- Wie viel Euro hat Frau Meier am Jahresende insgesamt gespart? (Berechnung: ohne Zinsen, Jahr mit 365 Tagen)

Aufgabe 1.2.3:

Der Student Peter Spar spart jeden Tag einen bestimmten Geldbetrag.

Er beginnt am 1. Januar mit 5 € und erhöht den Betrag jeden Tag um 3 Euro.

- Welchen Betrag spart er am 15. Februar?
- Wie viel Euro hat er bis einschließlich 15. Februar gespart?
- Wie viel Euro hat er am Jahresende gespart?
(Berechnung ohne Zinsen, Jahr mit 365 Tagen)

Aufgabe 1.2.4:

Gegeben ist die Folge: 4, 12, 36, 108, 324,

- Ist diese Folge eine arithmetische oder eine geometrische Folge?
- Erstellen Sie eine Formel für die Folgenglieder a_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, d.h., wenn Sie in dieser Formel für k die Zahl 4 einsetzen, müssen Sie 108 erhalten.
- Berechnen Sie die Summe der ersten 30 Folgenglieder.

Aufgabe 1.2.5:

Gegeben sei die Folge 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$...

- Stellen Sie eine Formel für die Folgenglieder auf.
- Ab welchem Folgenglied sind die Glieder der Folge kleiner als 0,001?
- Wie viele Folgenglieder müssen mindestens addiert werden, damit die Summe größer als 31,5 ist?

Aufgabe 1.2.6:

Herr Groß spart jeden Monat einen bestimmten Geldbetrag. Im ersten Monat spart er drei Euro. Jeden Monat erhöht er den Geldbetrag, den er spart, auf das Doppelte.

- Wie viel Euro spart er im vierten Monat?
- Nach wie vielen Monaten hat er insgesamt eine Million Euro gespart? Berechnung ohne Zinsen.

Aufgabe 1.2.7:

Dozent Süß möchte eine Tafel Schokolade unter seinen Kursteilnehmern aufteilen. Da er von gleichen Anteilen nichts hält, gibt er dem ersten Teilnehmer die Hälfte der Tafel. Dem zweiten gibt er ein Viertel der Tafel, dem dritten ein Achtel, dem vierten ein Sechzehntel, dem fünften Teilnehmer ein Zweiunddreißigstel usw.

- Für wie viele Teilnehmer reicht die Tafel Schokolade?
- Dozent Süß hat 24 Teilnehmer in seinem Kurs. Er verteilt die Schokolade nach obiger Regel. Wie groß ist der Anteil an der Tafel Schokolade, der für den Dozenten Süß nach der Aufteilung übrig bleibt?

Aufgabe 1.2.8:

Frau Weniger zahlt seit 2015 zu Beginn jedes Jahres einen Geldbetrag auf ihr Konto ein. Sie reduziert allerdings den Geldbetrag jedes Mal auf ein Drittel des Vorjahreswertes.

Wie viel Euro muss sie zu Beginn des Jahres 2015 mindestens eingezahlt haben, damit die Summe aller Einzahlungen bis zum Ende des Jahres 2024 mindestens 10.000 Euro beträgt?

Aufgabe 1.2.9:

Seerosen haben die Fläche eines kleinen Teiches zu $\frac{3}{4}$ zugewuchert. Sie wachsen so weiter, dass pro Monat ein Drittel der (verbliebenen) freien Fläche zuwächst.

- Wie viel Prozent der Seefläche ist nach drei Monaten nicht mit Seerosen zugewachsen?
- Wie viel Prozent der Fläche bleibt frei, wenn angenommen wird, dass die Seerosen unendlich lange Zeit wachsen können?

Aufgabe 1.2.10:

Familie Mayer zahlt monatlich 600 Euro Miete für ihre Wohnung. Alle zwei Jahre wird die Miete um 50 Euro erhöht. Wie viel Euro Miete hat Familie Mayer in 30 Jahren insgesamt zu zahlen?

Geben Sie zunächst die Miete in Abhängigkeit des Jahres an!

Aufgabe 1.2.11:

Berechnen Sie – falls existent – die (unendliche) Summe:

- $2 - \frac{4}{3} + \frac{8}{9} - \frac{16}{27} + \frac{32}{81} - \dots$
- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$
- $2 + \frac{5}{2} + 3 + \frac{7}{2} + 4 + \frac{9}{2} + \dots$

Berechnen Sie auch die Summe der ersten fünf Summanden der jeweiligen Reihe.

1.3 Anlagemöglichkeiten

Aufgabe 1.3.1:

Nennen Sie Kriterien, die bei einer Geldanlage wichtig sind! Welches Kriterium ist für Sie am wichtigsten?

Aufgabe 1.3.2:

- a) Was ist unter Bonität zu verstehen? b) Was ist unter Liquidität zu verstehen?

Aufgabe 1.3.3:

- a) Was ist eine Festgeldanlage?
b) Was ist ein Tagesgeldkonto?
c) Was sind Wandelanleihen?
d) Was ist ein Investmentfonds?
e) Was sind derivative Finanzprodukte, kurz Derivate?
f) Worin besteht der Hauptunterschied zwischen einer Aktie und einer Anleihe?
g) Warum werden festverzinsliche Wertpapiere auch Rentenpapiere oder kurz Renten genannt?

Aufgabe 1.3.4:

Welche Arten von Gewinnen bzw. Erträgen gibt es bei Geldanlagen?

Aufgabe 1.3.5:

Bei einem Wertpapier wird unterschieden zwischen einem Geld- und einem Briefkurs.

- a) Sie beabsichtigen, das Wertpapier zu kaufen. Zu welchem der beiden Kurse können Sie das Wertpapier kaufen?
b) Wie wird die Differenz zwischen Geld- und Briefkurs genannt?
c) Wie heißen die englischen Bezeichnungen für den Geld- und den Briefkurs?
d) Was bedeutet eine niedrige Geld-Brief-Spanne?

Aufgabe 1.3.6:

Frau Fest legt einen Betrag von 12.000 Euro als 3-monatiges Festgeld zu einem Zinssatz von 2% p.a. bei der B-Bank an. Nach Ablauf von zwei Monaten werden die Zinssätze der B-Bank für Festgelder auf 1% p.a. gesenkt. Welche Auswirkung hat diese Zinssenkung auf die Festgeldanlage von Frau Fest?

- Die Zinsen sinken deshalb um 12 Euro.
 Die Zinsen sinken deshalb um 100 Euro.
 Die Zinsen sinken deshalb um 200 Euro.
 Die Zinsen sinken deshalb nicht.

Aufgabe 1.3.7:

Welche der folgenden Anlagen weist die geringste Liquidität auf?

- Üblicher Sparbrief über 4% p.a. mit einer Restlaufzeit von 2 Jahren
 Bundesanleihe mit einer Restlaufzeit von 4 Jahren
 Tagesgeld
 Festgeld mit einer Restlaufzeit von einem Monat.

2 Zinsrechnung

2.1 Prozentrechnung

Aufgabe 2.1.1:

- Was ist der Unterschied zwischen den folgenden zwei Aussagen?
„Der Anteil hat sich um 10 Prozent erhöht.“ und
„Der Anteil hat sich um 10 Prozentpunkte erhöht.“
- Wie viel Prozent sind 8 Basispunkte?
- Eine Geldanlage wird mit 3% plus 200 Basispunkte verzinst. Wie hoch ist die Verzinsung in Prozent?

Aufgabe 2.1.2:

- Der Verkaufspreis für einen Schreibtisch wurde um 10% gesenkt. Der Schreibtisch kostet jetzt 270 €. Wie viel Euro hat der Schreibtisch vor der Preissenkung gekostet?
- Studentin Fina hat im vorigen Jahr 5% ihres Einkommens gespart. Dieses Jahr sinkt ihr Einkommen um 10%. Sie will trotzdem weiterhin 5% ihres Einkommens sparen. Voriges Jahr hat sie 500 € gespart. Wie viel Euro spart sie in diesem Jahr?
- Die Darbau AG hat einen Auslandsumsatz von 25% am Gesamtumsatz (Inlandsumsatz + Auslandsumsatz). Der Vorstand prognostiziert: Der Gesamtumsatz steigt im nächsten Jahr um 10%. Der Auslandsumsatzanteil erhöht sich im nächsten Jahr sogar auf 40% des Gesamtumsatzes. Um wie viel Prozent steigt nach der Prognose des Vorstandes der Auslandsumsatz im nächsten Jahr?

Aufgabe 2.1.3:

Die Mehrwertsteuer in Deutschland betrug 2006 16% und wurde 2007 auf 19% angehoben.¹

- Um wie viel Prozent hat sich die Mehrwertsteuer erhöht?
- Ein Unternehmen, das von 2006 auf 2007 die Nettopreise nicht erhöht hat, aber die Mehrwertsteuererhöhung an die Kunden weitergab, musste die (Brutto-)Preise erhöhen. Wie viel kostete bei diesem Unternehmen 2007 ein Artikel, der 2006 50 € (einschließlich Mehrwertsteuer) kostete?

In der Schweiz wurde 2011 der Mehrwertsteuersatz von 6,5% auf 10% zur Zusatzfinanzierung der Invalidenversicherung erhöht. Die Erhöhung ist befristet bis zum Jahr 2017.

- Um wie viel Prozent hat sich die Mehrwertsteuer erhöht?
- Ein Unternehmen, das von 2010 auf 2011 die Nettopreise nicht erhöht hat, aber die Mehrwertsteuererhöhung an die Kunden weitergab, musste die (Brutto-)Preise erhöhen. Wie viel kostete bei diesem Unternehmen 2011 ein Artikel, der 2010 50 Schweizer Franken (einschließlich Mehrwertsteuer) kostete?

¹ Dies ist der reguläre Satz in Deutschland. Für bestimmte Güter und Dienstleistungen gilt ein reduzierter Mehrwertsteuersatz von 7%.

Aufgabe 2.1.4:

Händler Frisch hatte 10 Tonnen frisch geerntete Wassermelonen gekauft. Der Wasseranteil (Flüssigkeitsanteil) dieser Melonen betrug 96%. Da Händler Frisch die Ware in der Sonne lagerte, verdunstete ein Teil der Flüssigkeit, sodass zwei Tage nach dem Kauf der Flüssigkeitsanteil noch 90% betrug.

Wie schwer waren die Melonen jetzt? Schätzen Sie zunächst das Gewicht der Melonen und berechnen Sie es anschließend!

Aufgabe 2.1.5:

Die Firma Darbau steigerte den Umsatz des Jahres 2005 in den folgenden 5 Jahren um jeweils 8% (gegenüber dem jeweiligen Vorjahr). Danach gab es zwei Jahre lang keine Steigerung mehr. Der Umsatz im Jahr 2005 betrug 20 Millionen Euro.

- Wie hoch war der Umsatz im Jahr 2012?
- Um wie viel Prozent war der Umsatz von 2005 bis 2012 (insgesamt) gestiegen?
- Um wie viel Prozent war der Umsatz von 2005 bis 2012 durchschnittlich pro Jahr gestiegen?
- Die Gesamtsteigerung des Umsatzes in von 2005 bis einschließlich 2013 war 50%. Welche Umsatzsteigerung hatte die Firma im Jahr 2013?

Aufgabe 2.1.6:

Bei der Bürgermeisterwahl in Kleindorf gab es drei Kandidaten bei 300 Wahlberechtigten. Kandidat A erhielt 65 Stimmen, Kandidat B 55 Stimmen und Kandidat C 31 Stimmen. 9 Wähler hatten ungültig gewählt, und 140 Personen sind nicht zur Wahl gegangen. Ungültige Stimmen und Nichtwähler gehen bei der Berechnung der Prozentanteile für die einzelnen Kandidaten nicht ein.

- Wie viel „Prozent“ haben die drei Kandidaten erzielt?
- Wenn von den 140 Nichtwählern 14 Personen zur Wahl gegangen wären und den Kandidaten B gewählt hätten, wie sähe dann die prozentuale Aufteilung aus?
- Hätten neben den 140 Nichtwählern noch weitere 66 Personen, jeweils 22 Wähler jedes Kandidaten, nicht gewählt, wie wäre dann die prozentuale Aufteilung gewesen?

Aufgabe 2.1.7:

Sven Süß isst gerne gut Schokolade. Er vernaschte letztes Jahr 96 Tafeln, also im Schnitt acht pro Monat. Die Schokolade kauft er immer frisch ein. Zu Beginn dieses Jahres gab es eine Preiserhöhung dieser Schokolade um 14,286%.

- Um wie viel Prozent muss Sven Süß seinen Schokoladenverbrauch reduzieren, um dieses Jahr für die Schokolade genauso viel auszugeben wie im letzten Jahr? Wie viele Schokoladen kann er sich dann im Durchschnitt pro Monat in diesem Jahr leisten?
- Geben Sie eine Formel an, die in Abhängigkeit der Preissteigerung (i_{teuer}) die Reduktion des Verbrauchs angibt.

Aufgabe 2.1.8:

Anleger können Aktien direkt kaufen. Sie können aber auch Investmentfonds kaufen, die selbst in Aktien anlegen. Die folgende Tabelle gibt die Zahl der Aktionäre und Aktienfondsbesitzer in Deutschland an.

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
nur Aktien	3,3	3,6	3,5	3,5	3,1	2,9	3,0	2,7	2,7
Aktien und Fonds	0,6	0,9	1,5	2,7	2,6	2,1	2,1	1,9	2,0
nur Fonds	1,7	2,3	3,2	5,6	7,2	6,5	6,1	5,9	6,1
Gesamtzahl	5,6	6,8	8,2	11,8	12,9	11,5	11,1	10,5	10,8

	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
nur Aktien	2,4	2,2	2,2	2,2	2,4	2,4	2,9	2,8	2,5
Aktien und Fonds	1,9	1,6	1,4	1,4	1,3	1,5	1,7	1,7	1,7
nur Fonds	6,1	6,3	5,8	5,2	4,7	4,6	5,0	4,3	4,3
Gesamtzahl	10,3	10,3	9,3	8,8	8,4	8,5	9,5	8,9	8,4

Zahl der Aktionäre über 14 Jahre (Anzahl in Millionen, Jahresdurchschnitt);

Quelle: Infratest-Umfrage im Auftrag des Deutschen Aktieninstituts (www.dai.de)

- Die Gesamtzahl ergibt sich aus der Addition der drei einzelnen Angaben. Im Jahr 2012 ergibt aber $2,9 + 1,7 + 5,0$ nicht 9,5. Woran könnte dies liegen?
- Um wie viel Prozent ist die Gesamtzahl der Aktien- und Fondsbesitzer pro Jahr (bezogen auf das Vorjahr) jeweils gestiegen?
- Um wie viel Prozent ist die Gesamtzahl der Aktien- und Fondsbesitzer in den Jahren 1997 bis 2005 gestiegen?
- Um wie viel Prozent pro Jahr ist die Gesamtzahl der Aktien- und Fondsbesitzer durchschnittlich in den Jahren 1997 bis 2005 gestiegen?

Aufgabe 2.1.9:

Bei einer Klausur in Finanzmathematik gab es bei 30 Teilnehmern (davon 24 Frauen und 6 Männer) folgendes Ergebnis:

Zwei Frauen haben die Klausur nicht bestanden; alle anderen Teilnehmer bestanden die Klausur.

- Zeigen Sie: Der Anteil der „Nichtbestandenen“ (Durchfallquote) ist bei den Frauen höher als bei den Männern.
- Bei der nächsten Finanzmathematik-Klausur haben wieder 30 Teilnehmer mitgeschrieben, davon 6 Frauen und 24 Männer. Bei den Frauen sind 2 durchgefallen, bei den Männern 7. Zeigen Sie: Der Anteil der „Nichtbestandenen“ ist bei den Frauen höher.
- Widerlegen Sie jetzt mit Prozentangaben die Aussage: „Frauen fallen eher durch die Finanzmathematik-Klausur als Männer.“
Hinweis: Dies ist trotz der Aussagen in den Aufgabenteilen a und b möglich.

Aufgabe 2.1.10:

Das Wareneingangskonto einer Firma hatte einen Jahresanfangsbestand von 10.000 €. Die Wareneingänge im Laufe des Jahres betragen insgesamt 90.000 €. Der Warenendbestand am Jahresende war 7.000 €. Der Umsatz aus Warenverkäufen belief sich in dem Jahr auf 144.000 €.

Wie hoch war die Handelsspanne?

Hinweis: Die Handelsspanne (auch Marge genannt) ist definiert als Differenz zwischen dem (Netto-)Verkaufspreis und dem Einstandspreis der Ware, berechnet in Prozent des Verkaufspreises.

Aufgabe 2.1.11:

Berechnen Sie die jährlich fällige Grundsteuer¹ für einen Grundbesitz mit einem Einheitswert von 40.000 €, wenn es sich bei dem Grundbesitz

- a) um einen landwirtschaftlichen Betrieb,
- b) um ein Einfamilienhaus,
- c) um eine Eigentumswohnung

handelt.

Die Gemeinde, in dem der Grundbesitz liegt, hat einen Hebesatz bei der Grundsteuer A von 250% und bei der Grundsteuer B von 340% festgelegt.

Hinweise:

Die Grundsteuer wird in Deutschland aus dem Einheitswert berechnet. Dazu wird der Einheitswert mit der betreffenden Steuermesszahl multipliziert. Dies ergibt den sogenannten Grundsteuerermessbetrag. Der Grundsteuerermessbetrag wird anschließend mit dem Hebesatz multipliziert, um die Steuerschuld, also die Grundsteuer, zu ermitteln. Diese Steuerschuld ist pro Kalenderjahr zu bezahlen.

Für die Steuermesszahl gilt nach § 14 und § 15 Grundsteuergesetz (GrStG):

6,0 vom Tausend	für Betriebe der Land- und Forstwirtschaft,
2,6 vom Tausend	für Einfamilienhäuser für die ersten 38.346,89 € Einheitswert,
3,5 vom Tausend	für Einfamilienhäuser für den 38.346,89 € übersteigenden Rest des Einheitswerts,
3,1 vom Tausend	für Zweifamilienhäuser,
3,5 vom Tausend	für restliche Grundstücke.

Der Hebesatz wird von der Gemeinde festgelegt, in der sich der Grundbesitz befindet. Dabei wird grundsätzlich unterschieden zwischen Grundsteuer A (für land- und forstwirtschaftlichen Grundbesitz) und Grundsteuer B (für gewerbliche Grundstücke und Wohnungsgrundstücke).

¹ Die Grundsteuer ist eine Steuer auf den Grundbesitz. Die Grundsteuer ist vom Eigentümer zu bezahlen. Diese Steuer wird in Deutschland anhand des Einheitswerts ermittelt. Der Einheitswert ist der Wert eines Grundstückes einschließlich eventuell vorhandener Gebäude. Er basiert nach dem im Bewertungsgesetz (BewG) festgelegten Regeln auf dem Stichtag 1.1.1964 bzw. 1.1.1935 (in den neuen Bundesländern). Der Einheitswert liegt in der Regel deutlich unter dem Marktwert.

Aufgabe 2.1.12:

- a) Berechnen Sie mithilfe der unten angegebenen Gesetzestexte des Erbschaftsteuer- und Schenkungsteuergesetzes (ErbStG) die Erbschaftsteuer¹ in Euro für ein Kind eines Erblassers bei einem Erbe von 300.000 €.
- b) Bei diesem Aufgabenteil wird vom zu versteuernden Betrag des Erbes ausgegangen. Freibeträge aus § 16 des ErbStG wurden schon abgezogen. Berechnen Sie die fällige Erbschaftsteuer in der Steuerklasse I bei einem Wert des steuerpflichtigen Erwerbs (= zu versteuernder Betrag des Erbes) von
- i) 70.000 €, ii) 75.000 €, iii) 76.000 €, iv) 78.000 €, v) 250.000 €.

Erstellen Sie anschließend eine allgemeine Formel zur Berechnung der Erbschaftsteuer unter Verwendung von § 15 und § 19 ErbStG.

- c) Herr Mayer erbt von seinem Freund 6.040.000 €. Wie hoch ist seine Erbschaftsteuer?

**Auszüge aus dem Erbschaftsteuer- und Schenkungsteuergesetz (ErbStG)
(§ 15, § 16, § 19)****§15 Steuerklassen**

(1) Nach dem persönlichen Verhältnis des Erwerbers zum Erblasser oder Schenker werden die folgenden drei Steuerklassen unterschieden:

Steuerklasse I:

1. der Ehegatte und der Lebenspartner,
2. die Kinder und Stiefkinder,
3. die Abkömmlinge der in Nummer 2 genannten Kinder und Stiefkinder,
4. die Eltern und Voreltern bei Erwerben von Todes wegen;

Steuerklasse II:

1. die Eltern und Voreltern, soweit sie nicht zur Steuerklasse I gehören,
2. die Geschwister,
3. die Abkömmlinge ersten Grades von Geschwistern,
4. die Stiefeltern,
5. die Schwiegerkinder,
6. die Schwiegereltern,
7. der geschiedene Ehegatte und der Lebenspartner einer aufgehobenen Lebenspartnerschaft;

Steuerklasse III:

alle übrigen Erwerber und die Zweckzuwendungen.

§ 16 Freibeträge

(1) Steuerfrei bleibt [...] der Erwerb

1. des Ehegatten und des Lebenspartners in Höhe von 500 000 Euro;
2. der Kinder im Sinne der Steuerklasse I Nr. 2 und der Kinder verstorbener Kinder im Sinne der Steuerklasse I Nr. 2 in Höhe von 400 000 Euro;

¹ Die Erbschaftsteuer ist eine Steuer, die bei Erbschaften vom Erben zu bezahlen ist. Von den geerbten Vermögenswerten werden bestimmte Freibeträge abgezogen. Für den sich ergebenden Betrag ist dann Erbschaftsteuer zu zahlen.

3. der Kinder der Kinder im Sinne der Steuerklasse I Nr. 2 in Höhe von 200 000 Euro;
4. der übrigen Personen der Steuerklasse I in Höhe von 100 000 Euro;
5. der Personen der Steuerklasse II in Höhe von 20 000 Euro;
6. (weggefallen)
7. der übrigen Personen der Steuerklasse III in Höhe von 20 000 Euro.

Hinweis: Daneben können auch noch Versorgungsfreibeträge berücksichtigt werden, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

§ 19 Steuersätze

(1) Die Erbschaftsteuer wird nach folgenden Prozentsätzen erhoben:

Wert des steuerpflichtigen Erwerbs (§ 10) bis einschließlich ... Euro	Prozentsatz in der Steuerklasse		
	I	II	III
75 000	7	15	30
300 000	11	20	30
600 000	15	25	30
6 000 000	19	30	30
13 000 000	23	35	50
26 000 000	27	40	50
über 26 000 000	30	43	50

(2) ...

(3) Der Unterschied zwischen der Steuer, die sich bei Anwendung des Absatzes 1 ergibt, und der Steuer, die sich berechnen würde, wenn der Erwerb die letztvorhergehende Wertgrenze nicht überstiegen hätte, wird nur insoweit erhoben, als er

- a) bei einem Steuersatz bis zu 30 Prozent aus der Hälfte,
 - b) bei einem Steuersatz über 30 Prozent aus drei Vierteln,
- des die Wertgrenze übersteigenden Betrags gedeckt werden kann.

Aufgabe 2.1.13:

In Deutschland wurde 2007 der Freibetrag bei Kapitalerträgen gekürzt. Der in den Freistellungsaufträgen für 2006 von den Sparern angegebene Betrag, der von der Zinsabschlagsteuer befreit werden soll, wurde von den Banken 2007 automatisch gekürzt, sofern der Anleger keinen neuen Freistellungsauftrag für seine Konten erteilt hat.

Wurden die Anleger nicht selbst aktiv, reduzierten die Kreditinstitute alle vor Jahresbeginn 2007 erteilten Freistellungsaufträge automatisch um 56,37% des freigestellten Betrages. Weshalb 56,37%? Erklären Sie das Zustandekommen dieser Zahl.

Jahr	2006	2007	2008	ab 2009
Freibetrag	1.370 €	750 €	750 €	801 €
Werbungskostenpauschbetrag	51 €	51 €	51 €	keine Werbungskosten absetzbar

Aufgabe 2.1.14:

Der Gewinn aus dem Verkauf eines Unternehmens (gewerblicher Veräußerungsgewinn) gehört nach dem deutschen Einkommensteuergesetz zu den „Einkünften aus Gewerbebetrieb“. In Paragraf 16, Absatz 4 des Einkommensteuergesetzes (EStG) heißt es:

„Hat der Steuerpflichtige das 55. Lebensjahr vollendet oder ist er im sozialversicherungsrechtlichen Sinne dauernd berufsunfähig, so wird der Veräußerungsgewinn auf Antrag zur Einkommensteuer nur herangezogen, soweit er 45.000 Euro übersteigt. Der Freibetrag ist dem Steuerpflichtigen nur einmal zu gewähren. Er ermäßigt sich um den Betrag, um den der Veräußerungsgewinn 136.000 Euro übersteigt.“

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgabenteile für einen Steuerpflichtigen, der die Voraussetzungen von § 16, Absatz 4 EStG erfüllt.

- Berechnen Sie den zu versteuernden Gewinn, bei einem Veräußerungsgewinn von (i) 40.000 Euro (ii) 80.000 Euro (iii) 160.000 Euro.
- Geben Sie eine Funktionsvorschrift für den zu versteuernden Gewinn zvG in Abhängigkeit des Veräußerungsgewinns x an.
Ermitteln Sie anschließend, falls existent, die Ableitung $zvG'(x)$.
- Wie viel Prozent des Veräußerungsgewinns ist zu versteuern? Geben Sie eine Funktion in Abhängigkeit des Veräußerungsgewinns x an.

Aufgabe 2.1.15:

- Beweisen Sie, dass bei positiven Einzelwerten der folgende Zusammenhang zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittelwert besteht:

$$\bar{x} \geq \bar{x}_g \geq \bar{x}_h.$$

Hinweise:

Beweisen Sie die Aussage zunächst für die Mittelwerte aus zwei Einzelwerten..

Der Beweis der Aussage $\bar{x} \geq \bar{x}_g$ ist bei mehr als zwei x -Werten sehr aufwendig!

Eine Beweismöglichkeit besteht darin, zunächst mit vollständiger Induktion zu zeigen, dass die Behauptung für $n = 2m$ gilt.

- Die jährlichen Renditen einer Geldanlage über n Jahre sind r_1, r_2, \dots, r_n . Alle Renditen sollen größer als -1 sein.
Zeigen Sie, dass die Rendite über den Gesamtzeitraum immer kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittelwert der Einzelrenditen ist!

Nicht alles, was zählt, kann gezählt werden,
und nicht alles, was gezählt werden kann, zählt.

Albert Einstein, 1879 – 1955,
dt. Physiker und Nobelpreisträger

Aufgabe 2.1.16:

Die folgende Tabelle gibt den Verbraucherpreisindex und dessen jährliche Änderung von 1991 bis 2014 an:

Jahr	Verbraucherpreisindex ¹ VPI	Änderung zu Vorjahr in %
2014	106,6	0,9%
2013	105,7	1,5%
2012	104,1	2,0%
2011	102,1	2,1%
2010	100,0	1,1%
2009	98,9	0,3%
2008	98,6	2,6%
2007	96,1	2,3%
2006	93,9	1,5%
2005	92,5	1,6%
2004	91,0	1,6%
2003	89,6	1,1%
2002	88,6	1,4%
2001	87,4	2,0%
2000	85,7	1,4%
1999	84,5	0,6%
1998	84,0	1,0%
1997	83,2	2,0%
1996	81,6	1,4%
1995	80,5	1,8%
1994	79,1	2,6%
1993	77,1	4,5%
1992	73,8	5,1%
1991	70,2	

Quelle: Statistisches Bundesamt (www.destatis.de)

- Um wie viel Prozent sind die Preise von 2003 bis 2013 gestiegen?
- Wie hoch war die Preissteigerung von 1991 bis 2013 insgesamt und durchschnittlich pro Jahr?
- Ein Händler verkauft eine Ware im Jahr 2000 für 120 Euro. Für wie viel Euro müsste er ein andere Ware 2013 verkaufen, um den gleichen Preis inflationsbereinigt zu erzielen?
- In der obigen Tabelle wurde der Verbraucherpreisindex 2010 mit genau 100 festgelegt. Der Index 2013 ist dann 105,7. Wie hoch wäre der Verbraucherpreisindex 2013, wenn der Index im Jahr 2003 auf 100 gesetzt gewesen wäre?

¹ Der Verbraucherpreisindex (VPI) für Deutschland misst die durchschnittliche Preisentwicklung aller Waren und Dienstleistungen, die von privaten Haushalten für Konsumzwecke gekauft werden. Aufgabe 4.1.14 behandelt auch den VPI.

2.2 Einfache Zinsen

Aufgabe 2.2.1:

- a) Warum werden einfache Zinsen auch lineare Zinsen genannt?
- b) Nennen Sie drei bekannte Zinstage-Methoden.
Was ist bei der Berechnung der Zinstage zu beachten?
- c) Kommt es bei taggenauer Berechnung der Zinstage darauf an, ob der Einzahlungstag (und nicht der Auszahlungstag) oder ob der Auszahlungstag (und nicht der Einzahlungstag) mitverzinst wird?
Wenn nein, geben Sie ein Beispiel an.
- d) Kann an der Formel für die Zinstage-Methode actual/actual (kalenderjährlich) erkannt werden, ob der Einzahlungstag oder der Auszahlungstag bei dieser Methode mitgezählt wird?

Aufgabe 2.2.2:

- a) Frau Andres legt 400 € für 5 Monate an. Der Zinssatz beträgt 3%. Wie hoch ist das Endkapital bei einfachen Zinsen?
- b) Frau Braun legt 400 € an. Sie erhält nach neun Monaten bei einfachen Zinsen 412 € ausbezahlt. Wie hoch ist der gezahlte Zinssatz?
- c) Frau Chirac zahlte auf ein Sparkonto 300 € ein, das mit 2% (linear) verzinst wurde. Sie erhielt ein Endkapital einschließlich Zinsen von 305,50 € zurück. Wie lange hatte sie ihr Kapital angelegt?

Aufgabe 2.2.3:

- a) Frau Spar legte 400 € vom 10.03.2015 bis 15.06.2015 bei 3% (einfachen) Zinsen an. Berechnen Sie den Zinsbetrag bei der Zinstage-Methode
 - i) actual/actual kalenderjährlich
 - ii) 30E/360
 - iii) 30/360
 - iv) actual/360
 - v) actual/365.
- b) Herr Groß legte 400 € vom 10.04.2014 bis 31.10.2014 bei 3% (einfachen) Zinsen an. Berechnen Sie den Zinsbetrag bei der Zinstage-Methode
 - i) actual/actual kalenderjährlich
 - ii) 30E/360
 - iii) 30/360
 - iv) actual/360
 - v) actual/365.

Aufgabe 2.2.4:

Herr Sparnix leiht sich am 23.08. einen Geldbetrag von 4.000 Euro und muss am 28.12. 4.050 Euro zurückzahlen.
Welcher Zinssatz liegt bei einfachen Zinsen und der Zinstage-Methode 30E/360 vor?

Aufgabe 2.2.5:

Eine ausländische Bank bietet 3,6% Zinsen. Berechnen Sie den Zinsbetrag bei einer Geldanlage von 2.000 € für den Anlagezeitraum vom 16.1.2015 (Einzahlung) bis zum 16.3.2015 (Auszahlung) nach den Zinstage-Methoden actual/360, 30/360, 30E/360 und actual/actual kalenderjährlich.

Aufgabe 2.2.6:

Gegeben ist die folgende Anleihe der Schlapp AG mit variabler Verzinsung (Floating-Rate-Note) nach actual/360. Berechnen Sie die Zinstage und den genauen Zinsbetrag.

Schlapp AG	
EUR 5.000.000,00 Hypothekendarlehen mit variablem Zinssatz von 2015/2025, R. 568 ISIN DE0008150816	
Gemäß §3 der Anleihebedingungen wurde der Zinssatz wie folgt festgesetzt:	
Zinsperiode:	12.1.2016 bis 12.7.2016 (exkl.) (= xxx Tage)
Zinssatz:	2,160 %
Zinsbetrag:	EUR x,xxxx je nominal EUR 1,00
Zinstermin:	12.7.2016
Darmstadt	GROSS-Bank AG, Darmstadt

Aufgabe 2.2.7:

- a) Nach welcher Zinstage-Methode werden variabel verzinsliche Anleihen (Floating-Rate-Notes) standardmäßig meist verzinst?
- b) Gegeben ist folgende Zinssatzbekanntmachung für eine Anleihe der Darbau AG mit variabler Verzinsung (Floating-Rate-Note), bei der alle drei Monate – am 11.3., 11.6., 11.9 und 11.12. eines jeden Jahres – die Zinsen nach einem Referenzzinssatz gezahlt werden:

Darbau AG	
Zinssatzbekanntmachung	
€ 10.000.000,00	
Anleihe mit variablem Zins	
Der Zinssatz wurde gemäß Anleihebedingungen für die nächste Periode festgelegt und beträgt 2,9% p.a. für die Zeit vom 11.3.2014 bis zum 10.6.2014 einschließlich (■■ Zinstage). Zahlbar am 11.6.2014.	
Pro Nennwert von 10.000 € wird ein Zinsbetrag in Höhe von ■■,■■ € fällig.	
Im März 2014	Der Vorstand der Darbau-Bank

Berechnen Sie die Zahlen (Zinstage und Zinsbetrag) an den beiden schwarz markierten Stellen.

- c) Alternativ hätten Sie am 11.3.2014 für 10.000 € bei der Darbau-Bank eine Festgeldanlage (Zinstage-Methode 30E/360) mit dem höheren Zinssatz von 2,95% abschließen können. Wie hoch wäre bei dieser Alternative der Zinsbetrag am 11.6.2014?