

Logik – Eine Einführung



Edition
Harri 
Deutsch 

Logik – Eine Einführung

von

Raphael Bolinger

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 59062

Autor:

Raphael Bolinger, Jahrgang 1979, ist Lehrer für die Fächer Philosophie und Mathematik an der Anne-Frank-Gesamtschule Dortmund. Vor seinem Lehramtsreferendariat promovierte er an der TU Dortmund im Bereich theoretische Philosophie zur Möglichkeit der logischen Rekonstruktion physikalischer Theorien. Während dieser Zeit hielt er sowohl an der TU Dortmund als auch an der Universität Witten/Herdecke dutzende Lehrveranstaltungen u. a. zur formalen Logik. Raphael Bolinger ist verheiratet und hat drei Kinder.

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5906-2

ISBN 978-3-8085-5895-9 (E-Book)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2019 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten

<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Polen

Vorwort

Die Logik, aufgefasst als Theorie des vernünftigen Schlussfolgerns, ist essenziell zum Verständnis der Fundamente und Vorgehensweisen in anderen Wissenschaften.

Ganz in diesem Sinne versteht sich *Logik – Eine Einführung* als Propädeutik für ein wissenschaftliches Studium und wurde erfolgreich in Veranstaltungen für Studierende der Wirtschaftswissenschaften, der Physik und der Informatik sowie der Sprachwissenschaften eingesetzt.

Dabei zeichnet sich das vorliegende Werk auch durch die Behandlung der Grundlagen der Modallogik, der Logik des Möglichen und des Notwendigen, aus, die oft zu Gunsten von Aussagen- und Prädikatenlogik vernachlässigt wird.

Danksagungen

Besonderer Dank gebührt all den Personen, die mir auf dem Weg hin zur Veröffentlichung mit Ergänzungen, Anmerkungen und Kritik zur Seite gestanden haben. Allen voran ist dies M. A. Tobias Häusler, der mich vor vielen Jahren bei meiner ersten selbstständig gehaltenen Logik-Veranstaltung als Tutor unterstützt hat und ohne dessen ausführliche Kritik dieses Werk sicherlich nicht wie vorliegend entstanden wäre. Ferner danke ich PD Dr. Dr. Renate Huber, in deren Veranstaltung ich zu Beginn meines Studiums den ersten Kontakt mit der formalen Logik hatte und deren Geist sicherlich auch noch in der aktuellen Version zu finden ist. Dank gebührt ebenfalls Prof. Dr. Jens Harbecke, der mir im Rahmen meiner Arbeit an der Universität Witten/Herdecke noch einige »neue Tricks« beibrachte, die ebenfalls dieses Werk beeinflussten.

Dortmund, im Januar 2019

Raphael Bolinger

Inhaltsverzeichnis

1 Die Aussagenlogik	1
1.1 Grundgedanken der Aussagenlogik	1
1.1.1 Von Sprachen und Metasprachen	2
1.1.2 Von Sinn und Bedeutung zu wahren Aussagen	6
1.2 Bausteine der Aussagenlogik	10
1.2.1 Aussagenlogische Variable	11
1.2.2 Die Negation	13
1.2.3 Die Konjunktion	15
1.2.4 Die Disjunktion	17
1.2.5 Implikationen	19
1.2.6 Äquivalenzen	21
1.2.7 Weitere Junktoren	22
1.2.8 Klammern	23
1.2.9 Wohlgeformte aussagenlogische Formeln	24
1.3 Die Semantik der Aussagenlogik	29
1.3.1 Die Semiotik und ihre Teildisziplinen	29
1.3.2 Wahrheitswertbelegungen für Variable und Formeln	32
1.3.3 Aussagenlogische Modellierungen	36
1.3.4 Das Quadrat der Gegensätze	41
1.4 Aussagenlogische Tautologien	46
1.4.1 Grundlegendes zu Tautologien	46
1.4.2 Der Substitutions- und der Ersetzungssatz	51
1.4.3 Interdefinierbarkeit der Junktoren	56
1.5 Logische Schlüsse und Argumentationen	59
1.5.1 Deduktive Schlüsse und die Aussagenlogik	60
1.5.2 Ausgewählte Schlussfiguren	66
1.5.3 Weitere Schluss schemata und Anwendung	77
1.6 Beweisverfahren in der Aussagenlogik	81
1.6.1 Allgemeines zu syntaktischen Schlüssen	82

1.6.2	Das Kalkül des natürlichen Schließens	86
1.6.3	Das Tableaux-Kalkül in der Aussagenlogik	99
2	Einblick in die aussagenlogische Modallogik	107
2.1	Die Syntax der Modallogik	108
2.2	Die Semantik der Modallogik	109
2.3	Das Tableaux-Kalkül in der Modallogik	116
2.4	Normale Systeme	119
3	Die Prädikatenlogik	123
3.1	Grundgedanken der Prädikatenlogik	123
3.1.1	Das logische Subjekt	125
3.1.2	Das logische Prädikat	128
3.1.3	Prädikatenlogische Quantoren	131
3.1.4	Wohlgeformte Prädikatenlogische Formeln	132
3.2	Semantik der Prädikatenlogik	137
3.2.1	Mehrfaches Quantifizieren	137
3.2.2	Interdefinierbarkeit von Quantoren	140
3.2.3	Beispiele zur Semantik der Prädikatenlogik	142
3.2.4	Formale Fixierung der Semantik	149
3.3	Argumentationen mit der Prädikatenlogik	152
3.3.1	Prädikatenlogische Folgerungen und Tautologien	153
3.3.2	Assoziierte \mathcal{AL} -Aussagen	155
3.3.3	Universelle Konditionalsätze und partikuläre Sätze	158
3.3.4	Venn-Diagramme	162
3.3.5	Das Tableaux-Kalkül in der Prädikatenlogik	170
3.4	Die Aristotelische Syllogistik	174
3.4.1	Grundlagen der Aristotelischen Syllogistik	175
3.4.2	Schlussfiguren	178
	Lösungen zu ausgewählten Aufgaben	185
	Literaturverzeichnis	201
	Index	205

1 Die Aussagenlogik

1.1 Grundgedanken der Aussagenlogik

In einer ersten Näherung ist die Aussagenlogik eine Sprache ähnlich der deutschen, Englisch oder Latein. Doch anders als diese ist sie eine *Kunstsprache*. Das heißt, sie hat sich nicht in einem langen, nahezu undurchschaubarem gesamt-gesellschaftlichen Prozess entwickelt, sondern wurde nach bewusst gesetzten Regeln gebildet. Gerade diese Regeln ermöglichen uns ein sehr hohes Maß an *Kontrolle*: Wissen wir um die Bedeutung aussagenlogischer Satz-Bestandteile, wissen wir auch um die Bedeutung des ganzen Satzes. Dieser Gedanke wird als »Extensionalitätsprinzip« bezeichnet.

Bei den von uns im Alltag gesprochenen Sprachen ist das anders. Metaphern, Ironie und Witz sorgen dafür, dass Sätze teils eine Bedeutung erhalten, die über das reine Wortverständnis hinaus geht. Sage ich einem Schüler, der gerade eine schwierige Aufgabe gelöst hat, »Das hast du toll gemacht«, will ich ihn loben. Sage ich dieselben Worte zu einem Schüler, der gerade mit einem Fußball eine Fensterscheibe zerschossen hat, ändert sich gleich der ganze Charakter der Aussage: Ich bin ironisch. In der Aussagenlogik gibt es solche Uneindeutigkeiten und Informationen *zwischen den Zeilen* nicht.

Bevor wir in Abschnitt 1.2 die Grundlagen der Aussagenlogik kennenlernen werden, werfen wir einen Blick auf Sprachen im Allgemeinen. Die folgenden Erläuterungen zur Unterscheidung von Objekt- und Metasprachen sowie der Verwendung und Erwähnung sprachlicher Ausdrücke und der damit zusammenhängenden Differenzierung von Typen und Instanzen (Unterabschnitt 1.1.1) werden ebenso wie Überlegungen zu Sinn und Bedeutung sprachlicher Ausdrücke und der daraus resultierenden Erläuterung des Bivalenzprinzips (Unterabschnitt 1.1.2) eine wichtige begriffliche Grundlage bilden.

1.1.1 Von Sprachen und Metasprachen

Die Aussagenlogik ist also eine Sprache. Aber was ist das, eine Sprache? Einen ersten Erklärungsansatz finden wir bei Carnap, der schreibt:

Unter einer Sprache ist hier allgemein irgend ein Kalkül verstanden, also ein System von Formbestimmungen und Umformungsbestimmungen über die sogenannten *Ausdrücke*, d. h. endlich geordnete Reihen irgendwelcher Elemente, der sogenannten *Zeichen*. (Carnap, 1934, S. 120)

Diese Definition ist die eine Seite der Medaille, denn natürlich besitzt jede Sprache gewisse formale Regeln, die uns sagen, wie wir Worte und Sätze bilden dürfen. In der Logik bezeichnen wir die Lehre von diesen Regeln auch als »Syntaktik«. Zu sagen, der Ausdruck

Ich bin der König von Frankreich.

sei in deutscher Sprache verfasst, bedeutet, dass (i) seine Bestandteile (d. h. die Wörter) aus den Buchstaben des lateinischen Alphabets gemäß der deutschen Rechtschreibung zusammengesetzt sind und (ii) die Anordnung dieser Wörter untereinander den Regeln der deutschen Grammatik entspricht. Beides sind Sachverhalte, die von Sätzen wie

Ich König von bin Frankreich der (1.1)

oder

Ichbin der önkig von nereifchran

nicht erfüllt werden. Die andere Seite der Medaille ist die *Semantik*. Sie liefert den Welt-Bezug, oder allgemeiner und streng genommen auch richtig, sie weist den syntaktisch korrekt gebildeten Satzbestandteilen eine außer-sprachliche Bedeutung zu. Für die deutsche Sprache ist beispielsweise der Satz

Ich bin der Frankreich vom König.

syntaktisch korrekt geformt. Offen bleibt die Frage, ob er eine Bedeutung hat und wenn ja, welche dies ist. Da es sich bei der logischen Sprache um eine Kunstsprache handelt, haben Fragen bezüglich der Semantik eine andere Qualität als bei gesprochenen Sprachen. Mit Problemen der Bedeutungszuweisung der deutschen Sprache werden wir uns folgend nicht befassen und setzen ihre Kenntnis weitestgehend

voraus. So können wir sie zur Grundlage nehmen, über die vorgestellten Logik-Systeme zu sprechen. Wir können das mit der Herstellung von primitiven Werkzeugen vergleichen: Die deutsche Sprache entspricht einem sehr grobschlächtigen Keil, der zur Herstellung eines anderen, viel feineren Keils verwendet wird. Um diese Hierarchie von Sprachen nicht nur metaphorisch, sondern möglichst präzise festzuhalten, treffen wir folgende

Definition 1.1.1. *Eine Meta- oder Syntaxsprache ist eine Sprache, in der wir über eine andere Sprache sprechen. Letztere bezeichnen wir auch als Objektsprache.*

Versuchen wir zum Beispiel, die englische Sprache mit Hilfe eines in Deutsch geschriebenen Buchs zur englischen Grammatik zu lernen, ist Deutsch unsere Metasprache, in der wir über das Englische als Objektsprache reden. Schreiten wir in unserem Studium fort, könnten wir aber auch damit beginnen, ein in Englisch verfasstes Werk zur Grammatik zu konsultieren. Dann wären Objekt- und Metasprache identisch.¹⁾

Ob das Vorkommen eines Begriffs meta- oder objektsprachlich ist, hängt damit zusammen, ob er *verwendet* oder *erwähnt* wird. Wir benutzen Anführungsstriche, um die beiden möglichen Arten des Vorkommens voneinander zu unterscheiden. So ist

Reliefpfeiler können ein Gebäude stützen. (1.2)

ein Beispiel für die *Verwendung* des Begriffs »Reliefpfeiler«, der in

»Reliefpfeiler« ist ein Palindrom. (1.3)

erwähnt wird. Angelehnt am Vorangegangenen können wir das auch so formulieren: Im Fall der Verwendung in (1.2) kommt »Reliefpfeiler« als objektsprachlicher Ausdruck in einem objektsprachlichen Satz vor. Bei der Erwähnung hingegen wird in dem insgesamt metasprachlichen Ausdruck (1.3) über den durch Anführungszeichen als solchen markierten objektsprachlichen Ausdruck gesprochen. Ein weiteres Beispiel ist

»Douglas Adams« ist der Name von Douglas Adams. (1.4)

¹⁾ Zur Differenzierung in Objekt- und Metasprache siehe auch Carnap (1934, S.4), Quine (1969), Mates (1978, S. 60) sowie Kutschera und Breitkopf (2000).

Hierbei wird der Name des Autors sowohl als Kennzeichnung verwendet, um in der Metasprache über die Person zu sprechen, die das Buch *Per Anhalter durch die Galaxis* geschrieben hat, sowie als Ausdruck in der Objektsprache, um den Namen der Person zu erwähnen. Die richtige Verwendung der Anführungszeichen macht dabei den Unterschied zwischen einer sinnvollen und einer sinnlosen Aussage. Vertauscht man in (1.4) objektsprachliches und metasprachliches Vorkommen, erhält man eine sinnlose Formulierung, nach der eine Person der Name eines Begriffs ist:

Douglas Adams ist der Name von »Douglas Adams«. (1.5)

Bei den bisherigen Beispielen ist ein Problem noch nicht aufgetaucht: Die deutsche Sprache dient uns folgend als Metasprache. Dabei setzen wir voraus, dass die verwendeten Formulierungen eindeutig sind. Das ist aber nicht immer der Fall. Aus dem Kindergarten oder der Grundschule kennt der eine oder die andere vielleicht noch das *Teekesselchen-Spiel*: Zwei Personen beschreiben synonyme Begriffe, d. h. Begriffe, denen bei gleicher Syntax eine unterschiedliche Bedeutung zukommt. Diese müssen dann von einem Auditorium erraten werden. Sagt beispielsweise Person A: »Mein Teekesselchen ist groß und aus Stein.« und Person B: »Mein Teekesselchen schützt vor Diebstahl.«, kann eine weitere Person C aufspringen und voller Begeisterung rufen: »Ihr meint beide 'Schloss'«. Solche Spiele sorgen vielleicht in der Schule für Kurzweil, können aber im alltäglichen und wissenschaftlichen Sprachgebrauch zu Problemen führen.

Übungsaufgabe 1.

→ Lösung auf S. 185

Setzen sie in den folgenden Ausdrücken die Anführungsstriche nach unserer Konvention so, dass sinnvolle Aussagen entstehen. Ist dies jeweils eindeutig?

1. *Dortmund ist der Name von Dortmund.*
2. *Sokrates war der Lehrer des berühmten Philosophen, der den Namen Platon hatte. Platon war der Lehrer des Philosophen Aristoteles.*
3. *Bochum ist links von Dortmund.*
4. *Dieser Satz besteht aus zwei Worten.*
5. *Eisen ist ein Teil von einer Eisenbahn.*

Als Folge müssen wir uns Gedanken darüber machen, was wir beim Setzen von Anführungszeichen aus der Objektsprache *mitnehmen* wollen, denn würden wir mit ihnen nur auf die rein syntaktische Reihenfolge von Zeichen verweisen, könnten wir noch keine *Teekesselchen* voneinander unterscheiden. Wir müssen unseren Blickwinkel erweitern und den Kontext beachten, in den ein Element aus der Objektsprache eingebettet ist.

Den Kontext beziehen wir ein, indem wir zwischen Typen von Ausdrücken und deren Instanzen (oder auch Vorkommnissen; engl.: »token«) unterscheiden. »Instanz« bezeichnet das konkrete Vorkommen eines Ausdrucks hinsichtlich der Syntax, wohingegen *Typen* noch hinsichtlich der Bedeutung unterschieden sind. Am Beispiel:

Das große Tor des *Schlusses* besaß ein massives *Schloss*. Dieses verriegelte Frau Rumprecht, damit niemand in das *Schloss* einbrechen konnte. (1.6)

Die Hintereinanderreihung der sieben Buchstaben von »Schloss« kommt bezüglich einer Typisierung hinsichtlich der Verwendungsweise in drei Instanzen aber nur zwei Typen vor. Der Typ, der ein Schloss im Sinne eines großen Gebäudes bezeichnet, kommt in zwei Instanzen vor. Ein zweiter Typ, der auf einen verschließbaren Bestandteil einer Tür verweist, lediglich in einer Instanz.

Das Kriterium, nach dem wir Typen klassifizieren, ist unserem Gutdünken überlassen. Im obigen Beispiel (1.6) könnten wir als Typ auch eine syntaktisch gleiche Hintereinanderreihung von Buchstaben festlegen, auch wenn hierdurch einiges an Informationsgehalt verloren geht. Zusammenfassend heißt dies: Der durch die Verwendung von Anführungszeichen hervorgehobene Ausdruck verweist auf einen bestimmten Ausdruckstyp in einer bestimmten Verwendung in einem bestimmten Kontext, von dem der Ausdruck eine Instanz ist.

Übungsaufgabe 2.

→ Lösung auf S. 185

1. Wie viele Typen hinsichtlich der Typisierung der Buchstaben des Alphabets und wie viele Vorkommnisse des Buchstabens »E« enthält »aaAbbCCcdDeEeEEff«

2. *Wie viele Instanzen von Buchstaben enthält »AAAAaAAAA«? Geben sie eine Typisierung an, nach der im obigen Ausdruck 2, 4 und 10 Typen vorkommen.*

Die Unterscheidung der Verwendung und Erwähnung von Begriffen und Aussagen sowie die Unterscheidung der beiden Fälle mit Hilfe von Anführungszeichen ist folgend wichtig, um möglichst eindeutig über die logische Sprache reden zu können. Wir setzen als Konvention, dass im Rahmen dieses Werks – wie auch bisher geschehen – bei zentrierten Aussagen wie (1.2) oder (1.5) die Anführungszeichen weggelassen werden dürfen, obwohl diese streng genommen objektsprachliche Ausdrücke sind, die wir in der Metasprache erwähnen. Dies geschieht einzig aus Gründen der Übersichtlichkeit.

1.1.2 Von Sinn und Bedeutung zu wahren Aussagen

Neben der im vorangegangenen Abschnitt getroffenen Unterscheidung von Objekt- und Metasprachen differenzieren wir noch zwischen dem Sinn und der Bedeutung von Ausdrücken. Im Grunde habe ich diese Unterscheidung bereits im vorangegangenen Abschnitt verwendet. Jetzt werden wir sie aber noch einmal explizit machen.

Frege (1892) hat als erster auf die Wichtigkeit des Unterschieds zwischen dem Sinn und der Bedeutung von Begriffen aufmerksam gemacht. Der Sinn eines Ausdrucks ist danach die Art seines Gegebenseins. Beispielsweise entspricht der Sinn von »Morgenstern« demjenigen von »Der letzte Himmelskörper, der am Morgen zu sehen ist.« Der Sinn von »Abendstern« ist »Der erste Himmelskörper, der abends zu sehen ist«.

Die Bedeutung ist nach Frege das konkret bezeichnete Objekt. Der wissenschaftlich gebildete weiß beispielsweise, dass der Planet Venus der in beiden Fällen beschriebene Himmelskörper ist. »Abendstern« und »Morgenstern« haben damit, obwohl sie einen unterschiedlichen Sinn haben, dieselbe Bedeutung. Anders beim Teekesselchen-Spiel zuvor (vgl. S. 5), in dem »Schloss« mit unterschiedlichem Sinn bei unterschiedlicher Bedeutung vorkam.

Die bisher dargestellten Überlegungen Freges haben sich nur auf Ausdrücke beschränkt, die einzelne Dinge bezeichnen. Wie sieht es aber bei ganzen Sätzen aus? In der Umgangssprache reden wir oft davon,

dass ein Satz einen gewissen Sinn hat und auch von seiner Bedeutung. Was aber soll das heißen? In Bezug auf den Sinn stellt Frege (1892) zunächst fest, dass jeder Satz einen Gedanken ausdrückt. Der Satz

Der Morgenstern ist der letzte Himmelskörper, der
am Nachthimmel zu sehen ist. (1.7)

beispielsweise beschreibt den Umstand, dass es ein Objekt gibt, das neben der Sonne morgens als einziges zu sehen ist. Was aber ist die Bedeutung dieses Satzes? Frege (1892, S. 30) selbst formuliert sein Kriterium wie folgt:

So werden wir dahin gedrängt, den Wahrheitswert eines Satzes als seine Bedeutung anzuerkennen. Ich verstehe unter dem Wahrheitswerte eines Satzes den Umstand, dass er wahr oder dass er falsch ist. Weitere Wahrheitswerte gibt es nicht.

Die Bedeutung von (1.7) ist damit die Wahrheit der Aussage. Beachte, dass in der Umgangs- bzw. der Metasprache durchaus nach Frege bedeutungslose Sätze vorkommen können. Die Frage, ob ein Befehl wie

Schreib' das Buch mit dem Titel »Per Anhalter durch
die Galaxis«! (1.8)

wahr oder falsch ist, kann nicht beantwortet werden. In der (von uns behandelten) logischen Sprache müssen wir den Übersetzungs-Versuch solcher Sätze vermeiden. Das dahinterstehende Prinzip wird als »Bivalenzprinzip« bezeichnet.²⁾ Da wir in der Aussagenlogik nur bivalente Ausdrücke behandeln können, treffen wir die folgende

Definition 1.1.2. *Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, dem ein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden kann.*

Diese Definition können wir intuitiv nachvollziehen und es ist nicht schwer, erläuternde Beispiele zu finden.³⁾ Demnach ist der Ausdruck

²⁾ Im letzten Kapitel werden noch einige Logische Systeme angesprochen, auf die das Bivalenzprinzip nicht zutrifft; diese Systeme müssen uns aber vorerst nicht interessieren.

³⁾ Streng genommen müssten wir noch klären, was unter »Wahrheit« bzw. »Falschheit« von Ausdrücken zu verstehen ist. Mit den uns bisher zur Verfügung stehenden Mitteln ist eine ausdifferenzierte Erläuterung allerdings noch sehr aufwendig. Wir werden in Abschnitt 1.3 hierauf zurück kommen.

Julius Caesar eroberte Gallien. (1.9)

eine Aussage, welcher der Wahrheitswert wahr zukommt oder – wie wir es umgangssprachlich sagen – eine Aussage, die wahr *ist*. Ob ein Ausdruck faktisch wahr oder falsch ist, ist unabhängig von der Frage, ob es sich wirklich um eine Aussage handelt. So ist

Immanuel Kant eroberte Gallien.

ebenso eine Aussage wie Aussage (1.9) mit dem Unterschied, dass ihr der Wahrheitswert falsch zukommt – zumindest soweit ich informiert bin. Ausdrücke wie

Der große Philosoph Immanuel Kant.

oder

Sagen sie mir doch bitte, ob es morgen regnen wird.

sind ebenso wie Fragen keine Aussagen.⁴⁾ Beachte, dass es nicht notwendig ist, faktisch entscheiden zu können, welcher Wahrheitswert einer Aussage zukommt. Relevant ist nur eine *prinzipielle* Entscheidungsmöglichkeit. So ist

Immanuel Kant trank am 26ten September 1799 eine Tasse Tee.

eine Aussage, auch wenn es den Historikern wahrscheinlich nie möglich sein wird, ihre Wahrheit oder Falschheit zu beweisen. Etwas Analoges gilt auch für die Goldbachsche Vermutung. In der Mathematik besagt sie, dass sich jede gerade Zahl größer als zwei als die Summe zweier Primzahlen darstellen lässt. Obwohl sie recht harmlos wirkt, konnte sie bisher nicht bewiesen werden. Dennoch ist sie eine Aussage.⁵⁾

Bei einigen Ausdrücken ist es kontextabhängig, ob sie Aussagen sind (vgl. Zoglauer, 2002, S. 21 ff). Dies gilt beispielsweise für einige normative Sätze. Der Normsatz

Es ist notwendig, im Straßenverkehr rechts zu fahren. (1.10)

⁴⁾ Frege selbst hatte Fragen noch als Grundaussagen zugelassen, wenn man sie mit »ja« oder »nein« beantworten kann (vgl. Frege, 1892, S. 33). Wir weichen an dieser Stelle ausdrücklich davon ab.

⁵⁾ Innerhalb der Mathematik gibt es auch Sätze, die nachweislich syntaktisch weder als wahr oder falsch bewiesen werden können. Sollte sich herausstellen, dass die Goldbachsche Vermutung ebenfalls zu dieser Satzmenge gehört, würde diese nicht mehr zu der Menge der Behauptungssätze zählen.

kann auf zwei unterschiedliche Weisen verstanden werden. Die erste gibt eine Interpretation im Kontext eines bestehenden Rechtssystems. Damit entspricht der Ausdruck sinngemäß:

Nach der Straßenverkehrsordnung gilt das Rechtsfahrgebot.

Der Ausdruck (1.10) stellt in dieser Auslegung weniger eine Norm dar, als dass er eine solche beschreibt. Damit kann ihm auch ein Wahrheitswert zukommen. Er ist also so aufgefasst eine Aussage. Bei dieser Auslegung spricht man auch von der *deskriptiven* Komponente eines Normsatzes. Ihr gegenüber steht die *präskriptive Komponente*. Bei Beispiel (1.10) entspricht diese sinngemäß

Es ist die Pflicht aller Verkehrsteilnehmer, auf der rechten Seite zu fahren.

oder

Man *soll* im Straßenverkehr auf der rechten Seite fahren.

Das kann beispielsweise als eine moralische Pflicht verstanden werden. Hält man sich – Straßenverkehrsordnung hin oder her – nicht an das Rechtsfahrgebot, setzt man andere Menschen einer Gefahr aus und tötet sie unter Umständen. Dennoch ist in einer solchen Interpretation die eindeutige Zuordnung eines Wahrheitswerts nicht möglich. Wir werden in Kapitel 2 sehen, dass uns die Modallogik die Möglichkeit gibt, die präskriptive Komponente zu behandeln.⁶⁾ In der Aussagenlogik interessiert uns allerdings einzig die deskriptive Komponente.

Ein Übergang von deskriptiven Sätzen zu präskriptiven Sätzen ist nicht erlaubt. Anders ausgedrückt: Wir dürfen nicht *vom Sein aufs Sollen* schließen. Tun wir dies doch, begehen wir einen sogenannten *naturalistischen Fehlschluss*. Ein Beispiel für einen solchen Schluss ist:

Ich habe hart dafür gearbeitet. Deshalb darf ich mir in meiner Freizeit auch mal etwas gönnen.

Auch wenn sie sich auf den ersten Blick recht vernünftig anhören, sind solche Schlüsse nicht unmittelbar gerechtfertigt.

⁶⁾ Vgl. hier das letzte Kapitel.

Übungsaufgabe 3.

→ Lösung auf S. 185

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen?

1. *Wer ist Douglas Adams?*
2. *Heinz und Otto räumen den Keller auf.*
3. *Es ist notwendig, diese Zeilen zu lesen.*
4. *Der zweite Satz in dieser Aufgabe ist falsch.*
5. *Dieser Satz ist falsch.*
6. *Du sollst nicht töten.*
7. *Ich denke, dass ich nicht töten soll.*

Am Ende dieses Abschnitts sollten sie wissen ...

1. ... was das Extensionalitätsprinzip ist.
2. ... was der Unterschied zwischen einer Objekt- und einer Metasprache ist und wie dieser Unterschied mit dem Setzen von Anführungszeichen zusammenhängt.
3. ... dass es einen Unterschied zwischen dem Sinn und der Bedeutung von Begriffen bzw. ganzen Sätzen gibt und was dieser Unterschied ist.
4. ... was das Bivalenzprinzip besagt und damit zusammenhängend, wie dieses für die Differenzierung von Aussagen und nicht-Aussagen zusammenhängt.
5. ... was der Unterschied zwischen Typen und Instanzen ist.
6. ... wo der Unterschied zwischen »präskriptiv« und »deskriptiv« liegt.

1.2 Bausteine der Aussagenlogik

In Abschnitt 1.1 haben wir allgemein zwischen Objekt- und Metasprachen differenziert. Jetzt machen wir mit der Unterscheidung Ernst und beginnen, die Aussagenlogik als Objektsprache explizit zu erläutern. In den Unterabschnitten 1.2.1 bis 1.2.8 führen wir das hierfür notwendige Grundvokabular ein. In Unterabschnitt 1.2.9 folgen Bemerkungen zur Grammatik, also den Regeln, nach denen aussagenlogische Sätze aufgebaut werden dürfen bzw. müssen.

In einem anderen Bild gesprochen werfen wir im vorliegendem Abschnitt einen Blick in einen Kasten mit Bauklötzen und beginnen, die Formen der einzelnen in ihm enthaltenen Steine zu beschreiben, um dann in einem zweitem Schritt allgemein zu sagen, wie wir aus ihnen möglichst hohe Türme bauen können, ohne dass diese einstürzen. Die hier bereits in Ansätzen angesprochene Semantik – die Lehre von der Bedeutung (vgl. Abschnitt 1) – entspricht in diesem Bild etwa den Farben der einzelnen Klötze.

Es ist durchaus möglich, die Syntax unabhängig von der Semantik – also im Bauklötz-Bild, die Überlegungen zur bloßen Form der erhaltenen Türme unabhängig von den Gedanken über die Farbe – zu behandeln. Aus didaktischen Gründen habe ich mich allerdings dagegen entschieden und werde bereits hier teilweise auf semantische Aspekte in Bezug auf die Grundelemente eingehen – wenn vorerst auch nur auf sehr basaler Ebene. Ausführliche Überlegungen folgen in den Abschnitten 1.3 und 1.4.

1.2.1 Aussagenlogische Variable

Die Aussagenlogik behandelt – wie der Name schon sagt – die Beziehungen und Ergebnisse der Verknüpfungen von Aussagen. In Definition 1.1.2 haben wir diese bereits als Wahrheitsfunktionale Ausdrücke kennen gelernt, d. h. als sprachliche Gebilde, die dem Bivalenzprinzip entsprechend entweder wahr oder falsch sind. Beispiel für eine Aussage ist etwa:

Ein Pinguin ist ein Vogel. (1.11)

Solche elementaren Ausdrücke werden in der Aussagenlogik abgekürzt durch einzelne Großbuchstaben des lateinischen Alphabets.⁷⁾ Die Zuordnung eines Buchstabens zu einer Aussage kann durchaus mit einem Vermerk im Fließtext gemacht werden, etwa dass der Buchstabe »A« in einem gewissem Kontext für die Aussage (1.11) stehen solle. Der

⁷⁾ Dies ist eine *mögliche* Festlegung, die ähnlich z. B. von Bohse und Rosenkranz (2006) verwendet wird. Andere Autoren wie etwa Beckermann (2014) sehen stattdessen lateinische Kleinbuchstaben vor. Auch die anderen noch einzuführenden Zeichen der Aussagen- und Prädikatenlogik variieren von Autor zu Autor. Die dahinter stehenden Logik-Systeme bleiben von der konkreten Wahl jedoch unberührt.

Einfachheit halber legen wir hier aber als Konvention fest, stattdessen

$A :=$ Ein Pinguin ist ein Vogel

schreiben zu dürfen mit dem metasprachlichen Zeichen $\rangle := \langle$. Da $\rangle A \langle$ einer Aussage entspricht, können wir $\rangle A \langle$ ebenfalls einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen. Formal halten wir diese Gedanken fest in der folgenden

Definition 1.2.1. Die Symbole A, B, C, \dots bzw. A_1, A_2, A_3, \dots sowie \top und \perp heißen aussagenlogische Variablen. Für ihre Zusammenfassung schreiben wir $\rangle AV \langle$ und bezeichnen diese als die \rangle Menge der aussagenlogischen Variablen \langle .

Weiter verstehen wir unter einer (Wahrheits-)Belegung der Grundvariable eine Funktion $\phi : AV \rightarrow \{f, w\}$. Wir schreiben $\rangle [A]_\phi = f \langle$ und sagen $\rangle A$ ist falsch \langle bzw. $\rangle A$ ist nicht gültig \langle . Genau so sagen wir $\rangle A$ ist wahr \langle bzw. $\rangle A$ ist gültig \langle genau dann, wenn $[A]_\phi = w$ gilt.

Zudem setzen wir $\rangle [\top]_\phi = w \langle$ und $\rangle [\perp]_\phi = f \langle$. $\rangle \top \langle$ wird als \rangle Verum \langle und $\rangle \perp \langle$ als \rangle Falsum \langle bezeichnet.

Wir sprechen folgend allgemein von \rangle Wahrheitswertbelegung \langle anstelle von \rangle Wahrheitswertbelegung der Grundvariablen \langle . Verum und Falsum dienen uns gewissermaßen als buchhalterische Symbole. Wir werden später sehen, dass es manchmal hilfreich ist, diese Platzhalter für immer wahre bzw. immer falsche Aussagen zur Hand zu haben, zunächst aber nicht weiter auf sie eingehen. Ich habe sie in obige Definition nur der Vollständigkeit halber aufgenommen.

Mit dieser Formalisierung von grundlegenden Aussagen gehen wir jetzt einen Schritt weiter. In der Umgangssprache kommen nicht nur einfache Aussagen, sondern auch durch beispielsweise \rangle und \langle oder \rangle oder \langle miteinander verbundene vor. Das Ergebnis hier ist jeweils wiederum eine Aussage; und zwar eine, deren Wahrheit oder Falschheit von der Wahrheit oder Falschheit der einzelnen Teilaussagen abhängt. Setzen wir

$B :=$ Ein Pinguin ist ein Gemüse

(1.12)