Höhere Mathematik
Aufgaben und Lösungen

Band 2

von

Karlheinz Spindler

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 59543

Autor:

Prof. Dr. Karlheinz Spindler studierte Mathematik, Mechanik und Geschichte an der Technischen Hochschule Darmstadt. Nach Ablegung seines Diploms und des Staatsexamens für das Lehramt an Gymnasien war er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TH Darmstadt tätig und wurde dort über ein Thema aus der Strukturtheorie Liescher Algebren promoviert. Anschließend arbeitete er zunächst zwei Jahre lang als Visiting Assistant Professor an der Louisiana State University in Baton Rouge (USA) und dann fünf Jahre lang bei einem Unternehmen der Raumfahrtindustrie am European Space Operations Centre (ESOC) in Darmstadt. Im Jahr 1997 wurde er zum Professor für Mathematik und Datenverarbeitung an die Fachhochschule Wiesbaden (seit dem 1. September 2009 Hochschule RheinMain) berufen, wo er im Studiengang „Angewandte Mathematik“ tätig ist. Er ist Begründer und Mitorganisator eines seit 2006 jährlich stattfindenden mathematischen Weiterbildungsseminars für Angehörige der hessischen Hochschulen für angewandte Wissenschaften.

1. Auflage 2021

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5954-3

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagmotiv: Vom Autor erstellte Illustration und bearbeitetes Foto
Druck: CPI books GmbH, 25917 Leck

Vorwort

Das vorliegende Aufgaben- und Lösungsbuch will einen Beitrag zur Förderung der Mathematikausbildung leisten, indem es zur Beschäftigung mit mathematischen Aufgabenstellungen und zur Einübung von Problemlösungsfertigkeiten einlädt. Es ist entstanden aus Aufgabenblättern und Übungsmaterialien, die ich über viele Jahre hinweg in einer ganzen Reihe verschiedenster mathematischer Lehrveranstaltungen an der Hochschule RheinMain verwendet habe.

Wichtig war mir – sowohl beim Stellen der Aufgaben als auch beim Schreiben des Buches – eine große Bandbreite der Aufgabenstellungen. Diese reichen von einfachen Fragen zur Gewöhnung an neue Begriffe und Routineaufgaben zum Einüben und Einschleifen von Rechentechniken über anspruchsvollere Aufgaben, in denen Beispiele und Gegenbeispiele gesucht, Feinheiten von Begriffsbildungen und Aussagen ausgelotet und weiterführende Aspekte erkundet werden, bis hin zu wirklichen Herausforderungen, denen sich zu stellen einige Ausdauer erfordert. Dabei habe ich bewußt hohe Ansprüche nicht vermieden, denn (wie schon der Prediger Salomo wußte) "wo viel Weisheit ist, da ist viel Grämen, und wer viel lernt, der muß viel leiden". Ich bin aber zuversichtlich, daß durch die Aufteilung komplexer Aufgabenstellungen auf mehrere Teilaufgaben und durch die gegebenen Hinweise allzu großen Frustrationen vorgebeugt wird.

Damit das Buch auch zum Selbststudium geeignet ist, habe ich zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen erstellt, deren Formulierung vielleicht auch ein Gefühl dafür vermittelt, wie man mathematische Sachverhalte ausdrückt und zu Papier bringt. Natürlich sollte man aber vor dem Blick in die Lösung immer versuchen, die jeweilige Aufgabe selbst zu bearbeiten: Mathematik ist kein Zuschauersport, sondern eher wie Klavierspielen; man erlernt sie nur durch eigene aktive Beschäftigung. Ich hoffe, daß bei aller Konzentration auf das Lösen von Aufgaben auch etwas von der Schönheit, Klarheit und Eleganz der Mathematik deutlich wird. Von den Inhalten und vom Kapitelaufbau her richtet sich das vorliegende Buch nach dem Lehrbuch

> Karlheinz Spindler: *Höhere Mathematik – Ein Begleiter durch das Studium*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main⋆ 2010.

Immer, wenn in den Lösungen auf "das Buch" verwiesen wird, ist dieses Lehrbuch gemeint. Die Verweise dienen in erster Linie der bequemen Referenzierung; die allermeisten Aufgaben können vollkommen unabhängig von der Verwendung eines bestimmten Lehrbuches oder Manuskriptes bearbeitet werden, und ich hoffe, daß sich geeignete Aufgaben für eine Vielzahl verschiedener Lehrveranstaltungen auswählen lassen. Da das Material des Buches in unterschiedlicher Intensität für unterschiedliche Lehrveranstaltungen entstand, war eine gewisse Unausgewogenheit zwischen den verschiedenen thematischen Bereichen (oder, positiver ausgedrückt, eine gewisse Schwerpunktsetzung) unausweichlich. Der zu erwartende eher geringe Zusatznutzen erschien es mir nicht wert, hier mit entsprechendem Zeitaufwand (und resultierenden Verzögerungen) die Unterschiede nachträglich noch auszugleichen. Um noch einmal den Prediger Salomo zu Wort kommen zu lassen: "Des vielen Büchermachens ist kein Ende, und viel Studieren macht den Leib müde".

Wie schon bei dem genannten Lehrbuch bin ich auch beim Schreiben dieses Aufgaben- und Lösungsbuchs Frau Dr. Renate Schappel zu kaum ermeßlichem Dank verpflichtet. Sie hat sich mit bewundernswerter Energie und Begeisterung, mit großer Akribie und Sorgfalt der Herkulesaufgabe angenommen, das vollständige Manuskript (teilweise in verschiedenen Versionen) kritisch zu lesen und zu kommentieren. Sie deckte eine Unzahl von Fehlern auf, und nichts war vor ihrem kritischen Blick sicher: einfache Tippfehler, Rechenfehler, falsche oder unvollständige Schlüsse, stilistisch verunglückte Formulierungen, falsche Verweise, unschöne Zeilen- oder Seitenumbrüche und vieles mehr. Ohne ihre Hilfe wäre das Erscheinen dieses Buches schlechterdings nicht denkbar. Mein Dank gilt ferner Herrn Klaus Horn vom Verlag Europa-Lehrmittel für die kompetente verlagsseitige Umsetzung des Werkes und die jederzeit angenehme Zusammenarbeit. Ihm danke ich nicht nur für die engagierte und sachkundige Unterstützung des Buchprojekts, sondern auch für den gutmütigen Humor, mit dem er meinen Sonderwünschen begegnete. Schließlich bin ich mehreren Generationen von Studenten zu Dank verpflichtet, mit denen ich über die Jahre hinweg zusammenarbeiten durfte und deren Fragen, Kommentare und Anregungen zu Verbesserungen bei zahlreichen Aufgaben und Lösungen führten.

Alle noch verbliebenen Fehler und Unstimmigkeiten gehen natürlich einzig und allein zu meinen Lasten als Autor. Autor und Verlag sind für Hinweise auf Fehler und Ungenauigkeiten sowie für konstruktive Kritik jederzeit dankbar.

A. D. 2021 Karlheinz Spindler

⋆ Inzwischen Edition Harri Deutsch, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Inhaltsverzeichnis

Teil 1:
Aufgaben

A61: Tensorprodukte

Aufgabe (61.1) (a) In $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ gelte die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{N} v_1^{(k)} \otimes v_2^{(k)} \otimes \cdots \otimes v_n^{(k)} \;=\; 0,$$

wobei die Vektoren $v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(N)}$ in V_1 linear unabhängig seien. Zeige, daß es dann zu jedem Index $1 \leq k \leq N$ einen Index $2 \leq i \leq n$ gibt mit $v_i^{(k)} = 0$.

(b) Zeige, daß in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ genau dann die Gleichung $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = 0$ gilt, wenn $v_i = 0$ für mindestens einen Index $1 \leq i \leq n$ gilt. (Das Tensorprodukt von Null verschiedener Vektoren ist also selbst von Null verschieden.)

Aufgabe (61.2) Es seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume, und für jedes i seien von Null verschiedene Vektoren $v_i, w_i \in V_i$ gegeben. Zeige, daß in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ genau dann die Gleichung $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$ gilt, wenn es Elemente $\lambda_i \in K$ mit $\lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$ derart gibt, daß $w_i = \lambda_i v_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.

Aufgabe (61.3) Es seien V und W Vektorräume. Ferner sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Zeige, daß jedes Element ξ von $V \otimes W$ eine eindeutige Darstellung $\xi = \sum_{i \in I} e_i \otimes w_i$ besitzt, wobei nur endlich viele der Elemente $w_i \in W$ von Null verschieden sind.

Aufgabe (61.4) Es seien A und B Vektorräume. Eine **Standarddarstellung** eines Elements $\xi \neq 0$ von $A \otimes B$ ist eine Darstellung der Form $\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$, wobei die Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ linear unabhängig in A und die Vektoren $b_1, \ldots, b_m$ linear unabhängig in B sind. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Ist $\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$ eine Darstellung von $\xi \neq 0$ mit minimaler Summandenzahl m, so handelt es sich um eine Standarddarstellung.
(b) Sind $\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i' \otimes b_i'$ zwei verschiedene Standarddarstellungen von $\xi \neq 0$, so gilt $m = n$.

Zeige anhand eines konkreten Beispiels, daß es mehrere verschiedene Standarddarstellungen des gleichen Elements geben kann.

Aufgabe (61.5) Es seien $a, b \in V$ Elemente eines Vektorraums V. Zeige, daß genau dann $a \otimes b = b \otimes a$ in $V \otimes V$ gilt, wenn a und b linear abhängig sind.

Aufgabe (61.6) Zeige: Sind $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume und ist σ eine Permutation der Indices $1, \ldots, n$, so gilt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \cong V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}$.

Aufgabe (61.7) Zeige: Ist V ein beliebiger K-Vektorraum, so kann das Tensorprodukt $K^n \otimes V$ realisiert werden durch die Definition $x \otimes v := (x_1 v, \ldots, x_n v) \in V \oplus \cdots \oplus V$ (mit n Summanden).

Aufgabe (61.8) Wir betrachten Matrizen $A \in K^{p \times q}$, $X \in K^{q \times r}$, $B \in K^{r \times s}$ und $C \in K^{p \times s}$. Zeige: Schreiben wir die Komponenten von X und von C statt als Matrizen als Elemente von Spaltenvektoren

$$\begin{aligned} x &= (x_{11}, \ldots, x_{1r}, \ldots, x_{q1}, \ldots, x_{qr})^T \in K^{qr}, \\ c &= (c_{11}, \ldots, c_{1s}, \ldots, c_{p1}, \ldots, c_{ps})^T \in K^{ps}, \end{aligned}$$

so geht die Matrizengleichung $AXB = C$ über in das lineare Gleichungssystem $(A \otimes B^T)x = c$.

Bemerkung: Da die Abbildung $X \mapsto AXB$ linear ist, ist klar, daß es sich bei der Gleichung $AXB = C$ um ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_{ij} handelt. Die Aufgabe zeigt, daß die explizite Beschreibung dieses Gleichungssystems auf die Koeffizientenmatrix $A \otimes B^T$ und damit auf ein Tensorprodukt führt.

Aufgabe (61.9) Gegeben sei ein fester Körper K. Für jede Menge X sei $F(X)$ der Vektorraum aller Funktionen $f : X \to K$ (mit der argumentweise definierten Addition und Skalarmultiplikation). Zeige, daß sich das Tensorprodukt von $F(X_1), \ldots, F(X_n)$ als Untervektorraum von $F(X_1 \times \cdots \times X_n)$ realisieren läßt, indem wir

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x_1, \ldots, x_n) \;:=\; f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

für $f_i \in F(X_i)$ und $x_i \in X_i$ definieren.

Aufgabe (61.10) Für gegebene K-Vektorräume $V_1, \ldots V_n, W_1, \ldots, W_n$ wurde in Beispiel (61.9) des Buchs die Existenz einer Einbettungsabbildung

$$\Phi : \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}(V_i, W_i) \longhookrightarrow \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, \bigotimes_{i=1}^{n} W_i \right)$$

bewiesen. Zeige mit Hilfe eines Dimensionsarguments, daß diese Abbildung im endlichdimensionalen Fall nicht nur injektiv, sondern auch surjektiv und damit ein Isomorphismus ist. Zeige, daß dies im unendlichdimensionalen Fall nicht mehr zutrifft!

Aufgabe (61.11) Für $1 \leq i \leq n$ sei jeweils U_i ein Untervektorraum von V_i. Zeige: Ist ein Tensorprodukt $\otimes$ von $V_1, \ldots, V_n$ gegeben, so ist die Einschränkung von $\otimes$ auf $U_1 \times \cdots \times U_n$ ein Tensorprodukt von $U_1, \ldots, U_n$.

↗ Lösungen zu »Tensorprodukte«

Aufgabe (61.12) Es sei $V \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum mit dem Dualraum $V^\star$.

(a) Zeige, daß sich das Tensorprodukt $V \otimes V^\star$ als Untervektorraum von $\mathrm{Hom}(V,V)$ realisieren läßt, indem wir
$$(v \otimes f)(x) \;:=\; f(x)\,v \qquad (x \in V)$$
für $v \in V$ und $f \in V^\star$ definieren. Zeige ferner, daß dieser Unterraum genau der Raum $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eR}}(V,V)$ derjenigen Endomorphismen von V ist, die endlichen Rang haben.

(b) Wie sieht die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen $v_1 \otimes f_1$ und $v_2 \otimes f_2$ aus?

(c) Wie sieht die duale Abbildung einer Abbildung $v \otimes f$ aus?

(d) Zeige, daß es genau eine lineare Abbildung $\theta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{eR}}(V,V) \to K$ gibt mit $\theta(v \otimes f) = f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $f \in V^\star$. Zeige ferner, daß θ nichts anderes ist als die Spurbildung.

(e) Zeige: Ist V endlichdimensional, ist $(v_1,\ldots,v_n)$ eine Basis von V und ist $(f_1,\ldots,f_n)$ die zugehörige Dualbasis von $V^\star$, so gilt
$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes f_i \;=\; \mathbf{1} \;=\; \mathrm{id}_V\,.$$

(f) Wenden wir die obige Konstruktion mit $V^\star$ statt mit V an, so ergibt sich eine Identifizierung von $V^\star \otimes V^{\star\star}$ mit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eR}}(V^\star,V^\star)$. Andererseits ist eine Einbettung $I : V^\star \otimes V^{\star\star} \to (V \otimes V^\star)^\star$ gegeben durch
$$\big(I(g \otimes \Phi)\big)(v \otimes f) \;=\; \Phi(f) \cdot g(v).$$
Wie sieht die zugehörige Einbettungsabbildung $J : \mathrm{Hom}_{\mathrm{eR}}(V^\star,V^\star) \to \mathrm{Hom}(V,V)^\star$ aus?

Aufgabe (61.13) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen des Unterraums V. Zeige, daß dann die folgende Gleichheit gilt:
$$\bigcap_{i\in I}(U_i \otimes W) \;=\; \Big(\bigcap_{i\in I} U_i\Big) \otimes W.$$

Aufgabe (61.14) Gegeben seien K-Vektorräume $V^{(1)}, \ldots, V^{(n)}$, von denen jeder in eine direkte Summe $V^{(k)} = \bigoplus_{i\in I_k} V_i^{(k)}$ von Unterräumen zerfalle. Für jede Wahl von $i := (i_1,\ldots,i_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n =: I$ sei ein Tensorprodukt $T_i := V_{i_1}^{(1)} \otimes_i \cdots \otimes_i V_{i_n}^{(n)}$ von $V_{i_1}^{(1)},\ldots,V_{i_n}^{(n)}$ zwischen solchen Unterräumen gegeben. Wir bilden die (äußere) direkte Summe $T := \bigoplus_{i\in I} T_i$ aller dieser einzelnen Tensorprodukte und definieren $\otimes : V^{(1)} \times \cdots \times V^{(n)} \to T$ durch
$$\Big(\sum_{i_1\in I_1} v_{i_1}^{(1)}\Big) \otimes \cdots \otimes \Big(\sum_{i_n\in I_n} v_{i_n}^{(n)}\Big) \;:=\; \sum_{i=(i_1,\ldots,i_n)\in I_1\times\cdots\times I_n} \big(v_{i_1}^{(1)} \otimes_i \cdots \otimes_i v_{i_n}^{(n)}\big),$$
wobei die auftretenden Summen allesamt direkt sind. Dann ist $(T,\otimes)$ ein Tensorprodukt von $V^{(1)},\ldots,V^{(n)}$.

Bemerkung: Die Aussage dieser Aufgaben ist, salopp gesprochen, daß das Tensorprodukt von direkten Summen gegeben ist durch die direkte Summe der Tensorprodukte der einzelnen Summanden, daß also die Bildung direkter Summen mit der Bildung von Tensorprodukten vertauschbar ist. Die exakte Formulierung und das Nachprüfen dieser Aussage machen leider die Verwendung von Indices unvermeidlich, wodurch die Aussage komplizierter aussieht, als sie in Wahrheit ist.

Aufgabe (61.15) Benutze die vorherige Aufgabe, um eine neue Herleitung der in Satz (61.2) des Buchs bewiesenen folgenden Aussage zu geben! Gegeben seien K-Vektorräume $V_1,\ldots,V_n$ und für $1 \le i \le n$ jeweils eine Basis B_i von V_i. Dann ist $\{b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \mid b_i \in B_i\}$ eine Basis des Tensorprodukts $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Insbesondere gilt also
$$\dim\Big(\bigotimes_{i=1}^n V_i\Big) \;=\; \prod_{i=1}^n \dim(V_i)\,.$$

Aufgabe (61.16) Es seien $V_1,\ldots,V_n$ Vektorräume, und für $1 \le k \le n$ sei jeweils $(U_i^{(k)})_{i\in I_k}$ eine Familie von Unterräumen von V_k. Beweise die Gleichheit
$$\bigcap_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\\ \in I_1\times\cdots\times I_n}} U_{i_1}^{(1)} \otimes\cdots\otimes U_{i_n}^{(n)} = \Big[\bigcap_{i_1\in I_1} U_{i_1}^{(1)}\Big] \otimes\cdots\otimes \Big[\bigcap_{i_n\in I_n} U_{i_n}^{(n)}\Big].$$

Aufgabe (61.17) Es sei $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ ein Tensorprodukt der Vektorräume $V_1,\ldots,V_n$, und für $1 \le i \le n$ sei ein Untervektorraum U_i von V_i gegeben. Wir definieren $\widehat{V}_i \;:=\; V_1 \otimes\cdots\otimes V_{i-1} \otimes U_i \otimes V_{i+1} \otimes\cdots\otimes V_n$ für $1 \le i \le n$.

(a) Zeige, daß $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n = \bigcap_{i=1}^n \widehat{V}_i$ gilt.

(b) Es sei $U := \sum_{i=1}^n \widehat{V}_i$. Zeige, daß dann
$$V/U \;\cong\; (V_1/U_1) \otimes \cdots \otimes (V_n/U_n)$$
gilt und daß die Tensorproduktbildung auf $(V_1/U_1) \times \cdots \times (V_n/U_n)$ realisiert werden kann durch
$$[v_1]_{U_1} \otimes \cdots \otimes [v_n]_{U_n} \;=\; [v_1 \otimes \cdots \otimes v_n]_U\,,$$
wobei wir $[v_i]_{U_i} := v_i + U_i$ in V_i/U_i und $[v_1 \otimes\cdots\otimes v_n]_U := v_1 \otimes\cdots\otimes v_n + U$ in V/U setzen. (Es ist nachzuweisen, daß diese Tensorproduktabbildung wohldefiniert ist!)

Aufgabe (61.18) Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und es sei $V^{(k)} := V \otimes\cdots\otimes V$ mit k Faktoren, wobei $k \le n$ gelte. Für einen Endomorphismus $A : V \to V$ sei $\widehat{A} : V^{(k)} \to V^{(k)}$ die eindeutige lineare Abbildung mit
$$\widehat{A}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \;=\; (Av_1) \otimes \cdots \otimes (Av_k)$$
für alle Vektoren $v_1,\ldots,v_k \in V$. Zeige: Hat V die Eigenwerte $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, so ist jedes Produkt $\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}$ ein Eigenwert von $\widehat{A}$.

↗ Lösungen zu »Tensorprodukte«

Aufgabe (61.19) Ein Tensor vom **Typ** (r,s) über einem K-Vektorraum V mit dem Dualraum $V^\star$ ist ein Element des Tensorproduktes

$$T^r_s(V) \;:=\; \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{ Faktoren}}\otimes\underbrace{V^\star\otimes\cdots\otimes V^\star}_{s\text{ Faktoren}}.$$

Die Zahl $r+s$ nennt man auch die **Stufe** des Tensors. (Vor allem in der Physikliteratur findet sich auch die Sprechweise, ein Tensor vom Typ (r,s) sei r-fach **kovariant** und s-fach **kontravariant**.)

(a) Nach Wahl einer Basis $B=(e_1,\ldots,e_n)$ von V und der zugehörigen Dualbasis $F=(f^1,\ldots,f^n)$ von $V^\star$ läßt sich jedes Element Θ von $T^r_s(V)$ in eindeutiger Weise in der Form

$$\Theta \;=\; \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r,\\ j_1,\ldots,j_s}} \Theta^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_s}$$

darstellen, wobei über alle Indices $1\le i_k,j_\ell\le n$ summiert wird. Die auftretenden Koeffizienten $\Theta^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}\in K$ heißen die **Komponenten** des Tensors Θ bezüglich der gewählten Basis B. Wie ändern sich diese Komponenten unter einem Wechsel der Basis B?

(b) Es seien Indices $1\le k\le r$ und $\le \ell\le s$ gegeben. Zeige, daß es genau eine lineare Abbildung $C^k_\ell: T^r_s(V)\to T^{r-1}_{s-1}(V)$ gibt mit

$$\begin{aligned} &C^k_\ell(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_s)\\ &=\;\varphi_\ell(v_k)\cdot\underbrace{v_1\otimes\cdots\otimes v_r}_{\text{ohne } v_k}\otimes\underbrace{\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_s}_{\text{ohne } \varphi_\ell}\end{aligned}$$

für alle Vektoren $v_i\in V$ und alle Linearformen $\varphi_j\in V^\star$. Diese Abbildung heißt die **Tensorverjüngung** oder **Tensorkontraktion** bezüglich der Indices (k,ℓ). Wie hängen für einen gegebenen Tensor $\Theta\in T^r_s(V)$ die Komponenten von $C^k_\ell(\Theta)$ mit denen von Θ zusammen?

(c) Das **Levi-Civita-Symbol**, benannt nach dem italienischen Mathematiker Tullio Levi-Civita (1873-1941), in Dimension n ist definiert durch

$$\varepsilon^{i_1,\ldots,i_n} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } (i_1,\ldots,i_n) \text{ eine gerade Permutation von } (1,\ldots,n) \text{ ist},\\ -1, & \text{falls } (i_1,\ldots,i_n) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,\ldots,n) \text{ ist},\\ 0, & \text{falls die Indices } i_1,\ldots,i_n \text{ nicht paarweise verschieden sind.}\end{cases}$$

Gibt es einen Tensor ε in $T^n_0(V)$, dessen Komponenten bezüglich einer beliebigen Basis von V durch $\varepsilon^{i_1,\ldots,i_n}$ gegeben sind?

(d) Wir bezeichnen mit ε^{ijk} das Levi-Civita-Symbol in Dimension 3. Berechne die Ausdrücke

$$\delta_{ij}\varepsilon^{ijk},\quad \sum_{i,j,k}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijk},\quad \sum_{i,j}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ij\ell},\quad \sum_k \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{rsk}$$

und zeige, daß in $\mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt zweier Vektoren $a=\sum_{i=1}^3 a_ie_i$ und $b=\sum_{i=1}^3 b_ie_i$ gegeben ist durch $a\times b=\sum_i(\sum_{j,k}\varepsilon^{ijk}a_jb_k)e_i$, wenn (e_1,e_2,e_3) ein kartesisches Koordinatensystem ist, also ein Rechtssystem aus paarweise orthogonalen Vektoren der Länge 1.

Aufgabe (61.20) (a) Wir betrachten ein Polyeder P im dreidimensionalen Raum. Jeder Kante k von P ordnen wir zwei geometrische Größen zu: ihre Länge $\ell(k)$ und ihren Diederwinkel $\varphi(k)$, also den Winkel zwischen den zwei Seitenflächen des Polyeders, die in k zusammenstoßen. Dabei fassen wir $\ell(k)$ als reelle Zahl auf, dagegen $\varphi(k)$ als reelle Zahl modulo π (weil ja nur Diederwinkel kleiner als π auftreten können). Nach dem deutschen Mathematiker Max Wilhelm Dehn (1878-1952) definiert man dann als **Dehn-Invariante** $D(P)$ von P den Ausdruck

$$D(P) \;=\; \sum_k \ell(k)\otimes\varphi(k),$$

wobei über alle Kanten k von P summiert wird und wobei $D(P)$ als Element des Tensorprodukts $\mathbb{R}\otimes(\mathbb{R}/\mathbb{Q}\pi)$ über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ interpretiert wird. (Wir fassen also $V:=\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auf, betrachten dann den Unterraum $U:=\mathbb{Q}\pi=\{r\pi\mid r\in\mathbb{Q}\}$ sowie den Quotientenraum V/U und bilden das Tensorprodukt $V\otimes(V/U)$ über $\mathbb{Q}$.)

(a) Zeige: Wird das Polyeder P in Teilpolyeder zerlegt und ist $\mathfrak{Z}$ die Menge der bei dieser Zerlegung auftretenden Teilpolyeder Q, so gilt

$$D(P) \;=\; \sum_{Q\in\mathfrak{Z}} D(Q).$$

(b) Zwei Polyeder P_1 und P_2 heißen **zerlegungsgleich**, wenn sich P_1 so in Teilpolyeder zerlegen läßt, daß sich diese Teilpolyeder zusammensetzen lassen, um P_2 zu bilden. Zeige, daß zerlegungsgleiche Polyeder die gleiche Dehn-Invariante besitzen. (Dies erklärt die Bezeichnung "Dehn-Invariante": Der Ausdruck $D(P_1)$ ändert sich nicht (bleibt invariant), wenn wir P_1 durch ein zerlegungsgleiches Polyeder P_2 ersetzen.)

(c) Es sei W ein Würfel mit der Kantenlänge ℓ. Berechne die Dehn-Invariante von W!

(d) Es sei T ein gleichseitiges Tetraeder T mit der Kantenlänge a. Berechne die Dehn-Invariante von T!

(e) Folgere aus (c) und (d), daß es volumengleiche Polyeder gibt, die nicht zerlegungsgleich sind.

(f) Betrachte das Tetraeder T_0 mit den Ecken $P_0=(0,0,0)$, $P_1=(1,0,0)$, $P_2=(0,1,0)$ und $P_3=(0,0,1)$. Bestimme die Dehn-Invariante $D(T_0)$! Ist T_0 zerlegungsgleich zu einem Würfel gleichen Volumens? Ist T_0 zerlegungsgleich zu einem gleichseitigen Tetraeder gleichen Volumens?

Bemerkung 1: Die Frage, ob zwei volumengleiche Polyeder zwangsläufig zerlegungsgleich sind, war das dritte der Probleme, die der Mathematiker David Hilbert

↗ Lösungen zu »Tensorprodukte«

(1862-1943) in einem berühmten Vortrag präsentierte, den er auf dem Zweiten Internationalen Weltkongreß der Mathematiker im Jahr 1900 in Paris hielt. Wie diese Aufgabe zeigt, ist die Antwort auf Hilberts Frage negativ (wie Hilberts Schüler Max Dehn schon weniger als ein Jahr nach dem Kongreß herausfand): Es gibt Polyeder mit gleichem Rauminhalt, die nicht zerlegungsgleich sind. †

Die Situation ist daher anders als im zweidimensionalen Fall, wo die Antwort bejahend ist: Zwei Polygone sind genau dann flächengleich, wenn sie zerlegungsgleich sind. Dies erlaubt eine elementargeometrische Definition des Begriffs des Flächeninhalts (als einer Äquivalenzklasse von Polygonen unter der Äquivalenzrelation der Zerlegungsgleichheit). Der Begriff des Rauminhalts läßt sich also nicht in dieser elementaren Weise einführen, sondern erfordert weiterführende Methoden (Analysis, Maßtheorie); dreidimensionale Geometrie ist intrinsisch schwieriger als zweidimensionale Geometrie.

Bemerkung 2: Die Lösung des dritten Hilbertschen Problems gelang durch Ausnutzung einer algebraischen Struktur (Tensorprodukt), die in der ursprünglichen rein geometrischen Aufgabenstellung gar nicht explizit auftritt. (Versuche aber zu erläutern, warum der abstrakte Begriff des Tensorprodukts sich in natürlicher Weise in die Aufgabenstellung einfügt!) Dies spiegelt die Tatsache wider, daß die Behandlung vieler mathematischer Probleme erleichtert (oder überhaupt erst ermöglicht) wird, indem man Strukturen heranzieht, die in der eigentlichen Formulierung des Problems gar nicht auftreten (zumindest nicht explizit), deren Heranziehung aber auf die Lösung führt. Anders ausgedrückt: Eine implizit vorhandene verborgene Struktur muß erst herausgearbeitet werden, um das Problem zu lösen. Es zeigt sich auch, wie ein abstrakter Begriff wie der des Tensorprodukts hilfreich sein kann, eine ganz konkrete Frage zu beantworten.

† In der folgenden Arbeit wurde bewiesen, daß zwei Polyeder genau dann zerlegungsgleich sind, wenn sie das gleiche Volumen und die gleiche Dehn-Invariante haben: Jean-Pierre Sydler, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Commentarii Mathematici Helvetici **40**, 1965, S. 43-80.

↗ Lösungen zu »Tensorprodukte«

A62: Grundkörpererweiterungen

Aufgabe (62.1) Es sei V ein reeller Vektorraum. Verifiziere, daß $V_{\mathbb{C}} = V + iV$ ein komplexer Vektorraum ist.

Aufgabe (62.2) Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen. Verifiziere, daß die Abbildung $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ komplex-linear ist.

Aufgabe (62.3) (a) Zeige: Sind $A, B : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen reellen Vektorräumen und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gelten die Gleichungen $(A + B)_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}} + B_{\mathbb{C}}$ und $(\lambda A)_{\mathbb{C}} = \lambda \cdot A_{\mathbb{C}}$; die Komplexifizierungsabbildung $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ ist also reell-linear.

(b) Zeige: Sind $S : X \to Y$ und $T : Y \to Z$ lineare Abbildungen zwischen reellen Vektorräumen, so gilt $(T \circ S)_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} \circ S_{\mathbb{C}}$; Komplexifizierung und Verkettung sind also miteinander kompatibel.

(c) Zeige: Ist $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines reellen Vektorraums V und ist $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so gilt $p(A)_{\mathbb{C}} = p(A_{\mathbb{C}})$.

Aufgabe (62.4) Es seien K ein V-Vektorraum und $\overline{K} \supseteq K$ ein Erweiterungskörper von K.

(a) Zeige, daß es eine Basis B von $\overline{K}$ als Vektorraum über K gibt, die das Einselement $1 \in K$ enthält, und daß es in einer solchen Basis keine anderen Elemente aus K gibt.

(b) Zeige, daß man sich die Erweiterung $\overline{V} = \overline{K} \otimes_K V$ vorstellen darf als Menge aller rein formal gebildeten Summen $\sum_{i \in I} \kappa_i v_i$ mit Vektoren $v_i \in V$, von denen nur endlich viele von Null verschieden sind, wenn $B = (\kappa_i)_{i \in I}$ eine Basis wie in (a) ist.

(c) Zeige: Ist $T : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen, so ist die $\overline{K}$-lineare Fortsetzung $\overline{T} : \overline{V} \to \overline{W}$ gegeben durch

$$\overline{T}\Big(\sum_{i \in I} \kappa_i v_i\Big) \;=\; \sum_{i \in I} \kappa_i (T v_i).$$

Bemerkung: Man kann es also bei der Grundkörpererweiterung von Vektorräumen und linearen Abbildungen vermeiden, den Begriff des Tensorprodukts explizit einzuführen (wobei dieser Begriff allerdings implizit dennoch auftritt).

Aufgabe (62.5) Die Aussagen dieser Aufgabe wurden schon in Satz (62.9) des Buches bewiesen; sie sollen hier unter Benutzung der vorhergehenden Aufgabe noch einmal in etwas anderer Weise hergeleitet werden. Es sei jeweils $\overline{K}$ eine Erweiterung des Körpers K. (Siehe auch Aufgabe (62.3) für den speziellen Fall $K = \mathbb{R}$ und $\overline{K} = \mathbb{C}$.)

(a) Zeige: Sind $A, B : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen und ist $\lambda \in K$, so gelten die Gleichungen $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$ und $\overline{\lambda \cdot A} = \lambda \cdot \overline{A}$.

(b) Zeige: Für lineare Abbildungen $S : X \to Y$ und $T : Y \to Z$ zwischen K-Vektorräumen gilt $\overline{T \circ S} = \overline{T} \circ \overline{S}$.

(c) Zeige: Ist $A : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V und ist $p \in K[X]$ ein Polynom mit Koeffizienten in K, so gilt $\overline{p(A)} = p(\overline{A})$.

Aufgabe (62.6) Wir betrachten einen K-Vektorraum V, eine Körpererweiterung $\overline{K} \supseteq K$ sowie den resultierenden $\overline{K}$-Vektorraum $\overline{V} = \overline{K} \otimes_K V$. Es sei eine Menge $M \subseteq V$ von Vektoren gegeben, die wir dann natürlich auch als Teilmenge von $\overline{V}$ auffassen können. Zeige, daß die Menge M genau dann linear unabhängig in V ist, wenn sie linear unabhängig in $\overline{V}$ ist.

Aufgabe (62.7) Wir betrachten einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V, eine K-lineare Abbildung $A : V \to V$, eine Körpererweiterung $\overline{K} \supseteq K$ sowie die resultierende $\overline{K}$-lineare Abbildung $\overline{A} : \overline{V} \to \overline{V}$. Zeige, daß die Minimalpolynome von A und $\overline{A}$ übereinstimmen!

Vorbemerkung: Zur Motivation der nachfolgenden Aufgaben wollen wir uns überlegen, warum wir eigentlich an der Frage von Grundkörpererweiterungen interessiert sind. Wenn wir etwa einen Endomorphismus $A : V \to V$ eines K-Vektorraums V untersuchen und für diesen beispielsweise eine möglichst einfache Matrixdarstellung suchen, so stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach den Eigenwerten und Eigenvektoren von A. Es kann nun passieren, daß für das charakteristische Polynom $p \in K[X]$ von A die Zahl der Nullstellen von p kleiner ist als der Grad von p. In diesem Fall finden wir in K nicht genügend Eigenwerte, um etwa A durch eine obere Dreiecksmatrix zu realisieren. Es kann aber sein, daß es einen Erweiterungskörper $\overline{K}$ von K gibt, über dem A vollständig in Linearfaktoren zerfällt und über dem A (bzw. $\overline{A}$) dann triagonalisierbar oder sogar diagonalisierbar ist. Beispielsweise hat die Matrix

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

keine reellen Eigenwerte, wohl aber die komplexen Eigenwerte $\pm i$, und es gilt

$$T^{-1} A T \;=\; \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{mit } T \;:=\; \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Der Übergang vom Grundkörper $\mathbb{R}$ zum Grundkörper $\mathbb{C}$ kann also die Untersuchung eines Endomorphismus vereinfachen. Es stellt sich daher die Frage, ob es für einen K-Endomorphismus $A : V \to V$ *immer* einen Erweiterungskörper gibt, über dem das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren zerfällt. Das ist tatsächlich der Fall, und ein solcher Erweiterungskörper ist, wenn er so klein wie möglich gewählt wird, sogar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Dieser Fragestellung soll in den folgenden Aufgaben nachgegangen werden.

↗ Lösungen zu »Grundkörpererweiterungen«

Aufgabe (62.8) Gegeben seien ein beliebiger Körper K und ein irreduzibles Polynom $f \in K[X]$. Wir bezeichnen mit $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle := \{pf \mid p \in K[X]\}$ das von f erzeugte Ideal in dem Polynomring $K[X]$. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Der Quotientenring $\overline{K} := K[X]/\langle\!\langle f \rangle\!\rangle$ ist ein Körper.
(b) Die Abbildung $i : K \to \overline{K}$, die jedem Element $k \in K$ die Äquivalenzklasse des konstanten Polynoms zuordnet, ist eine Einbettungsabbildung. Wir können also K als Teilkörper von $\overline{K}$ auffassen.
(c) Das Element $\xi := [X]$ in $\overline{K}$ ist eine Nullstelle von f.
(d) Ist $L \supseteq K$ irgendein Erweiterungskörper von K, in dem f eine Nullstelle α besitzt, so ist $K(\alpha) := \{p(\alpha) \mid p \in K[X]\}$ der kleinste Teilkörper von L, der α enthält, und es gilt $K(\alpha) \cong \overline{K}$. (Man nennt $K(\alpha)$ den Teilkörper von L, der aus K durch Adjungieren von α besteht.)
(e) Besitzt f eine Nullstelle α_1 in einem Erweiterungskörper $L_1 \supseteq K$ und eine Nullstelle α_2 in einem Erweiterungsköper $L_2 \supseteq K$, so gibt es einen Körperisomorphismus $\sigma : K(\alpha_1) \to K(\alpha_2)$ mit $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$ und $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$.

Aufgabe (62.9) Es sei $\sigma : K_1 \to K_2$ ein Körperhomomorphismus. Jedem Polynom $p \in K_1[X]$ ordnen wir ein Polynom $\sigma \star p \in K_2[X]$ wie folgt zu: Ist $p(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, so ist $(\sigma \star p)(X) = \sum_{k=0}^n \sigma(a_k) X^k$. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Die Abbildung $K_1[X] \to K_2[X]$ mit $p \mapsto \sigma \star p$ ist ein Ringhomomorphismus.
(b) Sind $\sigma_1 : K_1 \to K_2$ und $\sigma_2 : K_2 \to K_3$ Körperhomomorphismen, so gilt $\sigma_2 \star (\sigma_1 \star p) = (\sigma_2 \circ \sigma_1) \star p$.
(c) Es sei $\sigma \neq 0$. Besitzt p eine Nullstelle α_1 in einer Erweiterung $L_1 \supseteq K_1$ und besitzt $\sigma \star p$ eine Nullstelle α_2 in einer Erweiterung $L_2 \supseteq K_2$, so gibt es einen Homomorphismus $\Sigma : K_1(\alpha_1) \to K_2(\alpha_2)$ mit $\Sigma|_{K_1} = \sigma$ und $\Sigma(\alpha_1) = \alpha_2$.

Aufgabe (62.10) Ein **Zerfällungskörper** eines Polynoms $f \in K[X]$ ist ein bezüglich mengentheoretischer Inklusion minimaler Erweiterungskörper $Z \supseteq K$, über dem f vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 besitzt einen Zerfällungskörper.
(b) Es sei $\sigma : K_1 \to K_2$ ein Körperisomorphismus. Ist Z_1 ein Zerfällungskörper von $f \in K_1[X]$ und ist Z_2 ein Zerfällungskörper von $\sigma \star f \in K_2[X]$, so gibt es einen Körperisomorphismus $\Sigma : Z_1 \to Z_2$ mit $\Sigma|_{K_1} = \sigma$.
(c) Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerfällungskörper von $f \in K[X]$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma : Z_1 \to Z_2$ mit $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$.

Hinweis: Verwende für (a) und (b) jeweils Induktion über den Grad von f.

Aufgabe (62.11) Ein **Zerfällungskörper** einer Familie $\mathfrak{F} \subseteq K[X]$ von Polynomen ist ein bezüglich mengentheoretischer Inklusion minimaler Erweiterungskörper $Z \supseteq K$, über dem alle $f \in \mathfrak{F}$ vollständig in Linearfaktoren zerfallen. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Jede Polynomfamilie $f \in K[X]$ mit Polynomen vom Grad ≥ 1 besitzt einen Zerfällungskörper.
(b) Es sei $\sigma : K_1 \to K_2$ ein Körperisomorphismus. Ist Z_1 ein Zerfällungskörper von $\mathfrak{F} \subseteq K_1[X]$ und ist Z_2 ein Zerfällungskörper von $\sigma \star \mathfrak{F} := \{\sigma \star f \mid f \in \mathfrak{F}\} \subseteq K_2[X]$, so gibt es einen Körperisomorphismus $\Sigma : Z_1 \to Z_2$ mit $\Sigma|_{K_1} = \sigma$.
(c) Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerfällungskörper von $\mathfrak{F} \subseteq K[X]$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma : Z_1 \to Z_2$ mit $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$.

Aufgabe (62.12) Wir betrachten eine Körpererweiterung $(L : K)$. Ein Element $\xi \in L$ heißt **algebraisch** über K, wenn es ein Polynom $p \neq 0$ in $K[X]$ gibt mit $p(\xi) = 0$, wenn also ξ eine nichttriviale algebraische Gleichung über K erfüllt. Eine Körpererweiterung $(L : K)$ heißt algebraisch, wenn jedes Element von L algebraisch über K ist. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Jedes Element von K ist algebraisch über K.
(b) Ist $\xi \neq 0$ algebraisch über K, so sind auch $-\xi$ und $1/\xi$ algebraisch über K.
(c) Sind α und β algebraisch über K, dann auch $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$.
(d) Die Menge aller Elemente von L, die algebraisch über K sind, bildet einen Teilkörper von L.
(e) Für Körper $K \subseteq Z \subseteq L$ ist $(L : K)$ genau dann algebraisch, wenn $(L : Z)$ und $(Z : K)$ algebraisch sind.

Hinweis: Zeige in Teil (c) folgendes: Erfüllt α eine Gleichung vom Grad m und β eine Gleichung vom Grad n über K, so hat der von allen Potenzen $\alpha^r \beta^s$ mit $r, s \in \mathbb{N}_0$ aufgespannte K-Unterraum von L höchstens die Dimension mn. Nutze in (e) aus, daß ein Element $\alpha \in L$ genau dann algebraisch über K ist, wenn $K(\alpha)$ als K-Vektorraum endlichdimensional ist.

Aufgabe (62.13) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ (als Nullstelle von $X^2 - 2$), ebenso die Zahl $\sqrt[3]{3}$ (als Nullstelle von $X^3 - 3$); nach der vorigen Aufgabe sind also auch $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ und $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Gib für jede dieser beiden Zahlen explizit ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ an, als dessen Nullstelle diese Zahl auftritt!

Aufgabe (62.14) Zeige, daß für einen Körper K die folgenden Eigenschaften äquivalent sind!

(1) Jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 zerfällt in $K[X]$ in Linearfaktoren.
(2) Jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 hat eine Nullstelle in K.
(3) Ist $(L : K)$ eine algebraische Körperweiterung, so gilt $L = K$.

Ein Körper mit diesen Eigenschaften heißt **algebraisch abgeschlossen**.

↗ Lösungen zu »Grundkörpererweiterungen«

Aufgabe (62.15) Ein **algebraischer Abschluß** eines Körpers K ist ein bezüglich mengentheoretischer Inklusion minimaler Erweiterungskörper von K, der algebraisch abgeschlossen ist. Zeige, daß für eine Körpererweiterung $(\overline{K} : K)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind!

(1) $\overline{K}$ ist ein algebraischer Abschluß von K;
(2) $(\overline{K} : K)$ ist eine algebraische Körpererweiterung, und $\overline{K}$ ist algebraisch abgeschlossen;
(3) $(\overline{K} : K)$ ist eine algebraische Körpererweiterung, und jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 zerfällt über $\overline{K}$ in Linearfaktoren;
(4) $\overline{K}$ ist ein Zerfällungskörper der Familie $\mathfrak{F} := K[X]$;
(5) $(\overline{K} : K)$ ist eine algebraische Körpererweiterung, und für jede Kette $K \subseteq Z_0 \subseteq L_0$ algebraischer Erweiterungen und jeden Homomorphismus $\varphi_0 : Z_0 \to \overline{K}$ gibt es eine Fortsetzung $\Phi_0 : L_0 \to \overline{K}$;
(6) $(\overline{K} : K)$ ist eine algebraische Körpererweiterung, und für jede algebraische Erweiterung $(L : K)$ gibt es einen injektiven Homomorphismus $\sigma : L \to \overline{K}$ mit $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$.

Bemerkung: Charakterisierung (6) besagt, daß sich jede beliebige algebraische Erweiterung von K in $\overline{K}$ einbetten läßt, daß also $\overline{K}$ eine maximal möglich algebraische Erweiterung von K ist. Charakterisierung (4) ist in zweierlei Hinsicht interessant. Zum einen garantiert sie, daß jeder Körper einen algebraischen Abschluß besitzt und daß dieser bis auf Isomorphie auch eindeutig bestimmt ist; dies folgt aus Aufgabe (62.11). Zum andern zeigt diese Charakterisierung folgendes: Ist $\overline{K}$ minimal mit der Eigenschaft gewählt, daß alle Polynome $f \in K[X]$ über $\overline{K}$ in Linearfaktoren zerfallen, dann zerfallen sogar schon alle Polynome $f \in \overline{K}$ über $\overline{K}$ in Linearfaktoren. (Die Möglichkeit, aufgrund der Erweiterung von K zu $\overline{K}$ auch neue Polynome bilden zu können, führt nicht dazu, daß diese neuen Polynome auch neue Nullstellen haben, die wir zusätzlich zu $\overline{K}$ adjungieren müßten, damit auch diese neu hinzugekommenen Polynome in Linearfaktoren zerfallen.)

Aufgabe (62.16) Zeige, daß über dem zweielementigen Körper $K := \mathbb{Z}_2$ die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$$

keine Eigenwerte besitzt. Gib einen Erweiterungskörper $\overline{K}$ an, in dem A Eigenwerte besitzt, und finde eine Transformationsmatrix $T \in \overline{K}^{2\times 2}$ derart, daß $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. (Über $\overline{K}$ ist A also diagonalisierbar.)

Aufgabe (62.17) Es seien V ein K-Vektorraum, $A : V \to V$ ein Endomorphismus, $\overline{K}$ ein Erweiterungskörper, $\overline{V} = \overline{K} \otimes_K V$ der zugehörige $\overline{K}$-Vektorraum und $\overline{A} : \overline{V} \to \overline{A}$ die zugehörige Erweiterung von A. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Ist A nilpotent, dann auch $\overline{A}$. (Die Eigenschaft der Nilpotenz bleibt also unter Grundkörpererweiterungen erhalten.)
(b) Es kann sein, daß A halbeinfach ist, $\overline{A}$ aber nicht. (Die Eigenschaft der Halbeinfachheit bleibt also unter Grundkörpererweiterungen nicht zwangsläufig erhalten.)

Bemerkung und Hinweis: Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ heißt **halbeinfach**, wenn jeder A-invariante Unterraum von V ein A-invariantes Komplement besitzt. (Ist der Grundkörper algebraisch abgeschlossen, so ist Halbeinfachheit identisch mit Diagonalisierbarkeit.) Um für Teil (b) ein Beispiel zu finden, betrachte den Körper $K := \mathbb{Z}_2(X)$ aller rationalen Ausdrücke über $\mathbb{Z}_2$, eine Körpererweiterung $\overline{K} = K(\xi)$ mit $\xi^2 = X$ sowie die Abbildung $A : K^2 \to K^2$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

↗ Lösungen zu »Grundkörpererweiterungen«

A63: Symmetrien multilinearer Abbildungen

Aufgabe (63.1) Für je zwei K-Vektorräume X und Y bezeichnen wir mit $L^k(X,Y)$ den K-Vektorraum aller k-linearen Abbildungen $X^k \to Y$, wobei wir X^k für das kartesische Produkt $X \times \cdots \times X$ mit k Faktoren schreiben. Ist $f : U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen $\big($also ein Element von $L^1(U,V)\big)$ und ist $T \in L^k(V,Y)$, so definieren wir $f^\star T \in L^k(U,Y)$ durch

$$(f^\star T)(u_1,\ldots,u_k) \;:=\; T\big(f(u_1),\ldots,f(u_k)\big).$$

Man nennt $f^\star T$ den **Rücktransport** (englisch "pull-back") von T unter f. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Ist T symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch bzw. alternierend, dann auch $f^\star T$.
(b) Für $f \in L^1(U,V)$, $S,T \in L^k(V,Y)$ und $\alpha,\beta \in K$ gilt $f^\star(\alpha S + \beta T) = \alpha(f^\star S) + \beta(f^\star T)$.
(c) Für $f,g \in L^1(U,V)$, $T \in L^k(V,Y)$ und $\alpha,\beta \in K$ gilt $(\alpha f + \beta g)^\star T = \alpha(f^\star T) + \beta(g^\star T)$.
(d) Für $f \in L^1(U,V)$, $g \in L^1(V,W)$ und $T \in L^k(W,Y)$ gilt $f^\star(g^\star T) = (g\circ f)^\star T$.

Aufgabe (63.2) Es sei $R := K[X_1,\ldots,X_n]$ der Ring aller Polynome in n Variablen über dem Körper K. Die **partielle Ableitung** $\partial_i f \in R$ eines Polynoms $f \in R$ nach der i-ten Variablen X_i ist definiert als die gewöhnliche (formale) Ableitung gemäß Definition (25.10) im Buch, wenn wir f als Polynom in der einen Variablen X_i über dem Ring $K[X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots X_n]$ auffassen. Mit $\xi := (X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots X_n)$ gilt also

$$\partial_i \left(\sum_{k=0}^n a_k(\xi) X_i^k\right) \;=\; \sum_{k=1}^n k\cdot a_k(\xi) X_i^{k-1}.$$

Dadurch wird eine (offensichtlich lineare) Abbildung $\partial_i : R \to R$ definiert. Da mit f auch $\partial_i f$ wieder ein Polynom ist, können wir erneut partielle Ableitungen bilden und erhalten dadurch die höheren Ableitungen:

$$\partial_{i_1,i_2,\ldots,i_k} f \;:=\; (\partial_{i_k}\circ\cdots\circ f_{i_2}\circ\partial_{i_1})\; f.$$

(a) Zeige, daß $\partial_i\circ\partial_j = \partial_j\circ\partial_i$ für alle i,j gilt, und schließe dann, daß eine höhere partielle Ableitung $\partial_{i_1,\ldots,i_k} f$ nicht von der Reihenfolge der Indices i_j abhängt.

(b) Die k-te Ableitung von f an einem Punkt $p = (p_1,\ldots,p_n) \in K^n$ ist die k-Linearform $f^{(k)}(p) : K^n \times \cdots \times K^n \to K$, die definiert ist durch

$$f^{(k)}(p)\,[h^{(1)},\ldots,h^{(k)}] \;:= \sum_{i_1,\ldots,i_k} (\partial_{i_1,\ldots,i_k} f)(p)\, h^{(1)}_{i_1} h^{(2)}_{i_2}\cdots h^{(k)}_{i_k},$$

wobei über alle n^k Tupel $(i_1,\ldots,i_k)$ von Indices $1 \le i_j \le n$ summiert wird. Zeige, daß $f^{(k)}(p)$ eine symmetrische k-Linearform auf K^n ist. Formal setzen wir noch $f^{(0)}(p) = f(p) \in K$.

(c) Nun setzen wir $\mathrm{char}(K) \neq 0$ voraus. Zeige, daß dann für alle $p \in K^n$ und $h \in K^n$ die **Taylorentwicklung**

$$f(p+h) \;=\; \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(p)}{k!}[h,h,\ldots,h] \;=\; f(p) + f'(p)[h]$$
$$+\frac{f''(p)}{2}[h,h] + \frac{f'''(p)}{6}[h,h,h] + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}[h,\ldots,h]$$

gilt, wenn n den Grad von f bezeichnet. **Bemerkung:** Später in der Analysis werden wir diese Formel folgendermaßen deuten. Wir wollen wissen, welche Auswirkungen eine "kleine" Änderung des Arguments p auf den Funktionswert an der Stelle p hat, wie also $f(p+h)$ von h abhängt. Die k-te Ableitung $f^{(k)}(p)$ beschreibt dann den Effekt k-ter Ordnung des Übergangs von $f(p)$ zu $f(p+h)$.

Aufgabe (63.3) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $v,w \in V$ in einem Vektorraum V.

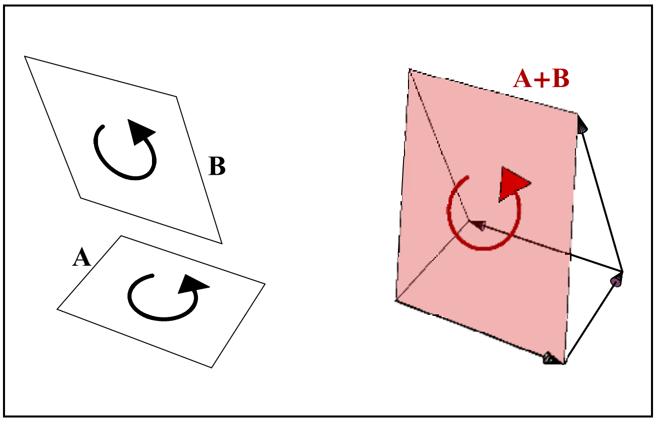
(a) Zu welchen Vektoren $\xi \in V$ gibt es einen Vektor $\eta \in V$ mit $v \wedge w = \xi \wedge \eta$? Ist ξ ein solcher Vektor, so bestimme die Menge aller Vektoren η mit $v \wedge w = \xi \wedge \eta$ und stelle sie geometrisch dar!

(b) Begründe, warum der Ausdruck $v \wedge w$ ein orientiertes Flächenelement im gleichen Sinne darstellt, wie ein einzelner Vektor ein orientiertes Linienelement darstellt.

Aufgabe (63.4) (a) Deute Bilinearität und Schiefsymmetrie des Keilprodukts geometrisch!

(b) Es sei (e_1,e_2) eine positiv orientierte Basis eines zweidimensionalen Vektorraums. Deute die Gleichung $(4e_1+e_2)\wedge(2e_1+3e_2) = (4e_1)\wedge(3e_2) + e_2\wedge(2e_1)$ geometrisch!

Aufgabe (63.5) Ist V ein Vektorraum, so bezeichnet man die Elemente vom $\bigwedge^2 V$ auch als **Bivektoren**. Erläutere anhand der folgenden Skizzen die Analogie zwischen der Addition zweier Vektoren in einem zweidimensionalen Vektorraum mit der Addition von Bivektoren in einem dreidimensionalen Raum.



↗ Lösungen zu »Symmetrien multilinearer Abbildungen«

Aufgabe (63.6) Zeige: Sind a, b, c Vektoren mit $a + b + c = 0$, so gelten die Gleichungen

$$a \wedge b \;=\; b \wedge c \;=\; c \wedge a.$$

Zeige, daß dieser Zusammenhang nichts anderes ist als der Sinussatz für Dreiecke!

Aufgabe (63.7) Es sei (e_1, e_2, e_3) eine Basis eines dreidimensionalen Vektorraums V. Gib eine geometrische Deutung der folgenden Gleichung!

$$\begin{aligned} v \wedge w &= (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \wedge (w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3) \\ &= (v_1 w_2 - v_2 w_1)\, e_1 \wedge e_2 \\ &\quad + (v_2 w_3 - v_3 w_2)\, e_2 \wedge e_3 \\ &\quad + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\, e_3 \wedge e_1 \end{aligned}$$

Aufgabe (63.8) Vereinfache die beiden folgenden Ausdrücke!

(a) $(2e_1 - 3e_2 + 5e_3) \wedge (4e_4 - 7e_2 + 8e_1) \wedge (e_1 + e_2 - 9e_4)$

(b) $(e_1 - e_2 + e_4) \wedge (e_1 - e_2 + e_4) \wedge (e_1 - e_2 + e_4)$

Aufgabe (63.9) (a) Es sei K ein beliebiger Körper. Zeige, daß die Abbildungen $\wedge : K^2 \times K^2 \to K$ und $\wedge : K^3 \times K^3 \to K^3$ surjektiv sind.

(b) Es seien e_1, e_2, e_3 Elemente eines Vektorraums V; wir betrachten in $\bigwedge^2(V)$ das Element $\xi := e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3$. Gib explizit Vektoren $u, v \in V$ an mit $\xi = u \wedge v$.

Aufgabe (63.10) Es sei V ein vierdimensionaler Vektorraum mit einer Basis (e_1, e_2, e_3, e_4). Der Bivektor $(e_1 \wedge e_2) + (e_3 \wedge e_4)$, also $\sum_{i<j} c_{ij}\, e_i \wedge e_j$ mit $c_{12} = c_{34} = 1$ und $c_{ij} = 0$ für alle anderen Indices $i < j$, erfüllt nicht die Plücker-Relation $c_{12}c_{34} - c_{13}c_{24} + c_{14}c_{23} = 0$ und kann daher nicht als einfacher Bivektor $a \wedge b$ mit $a, b \in V$ geschrieben werden. (Der Vektor $(1, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ tritt also nicht als Vektor der Plückerkoordinaten eines zweidimensionalen Unterraums von V auf.) Rechne dies per Hand nach, ohne die Plücker-Relation heranzuziehen!

Aufgabe (63.11) Wie lauten die Plückerschen Relationen für die Abbildung $\wedge : K^5 \times K^5 \to K^{10}$? Was ist also eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß sich ein Vektor $v \in K^{10}$ in der Form $v = a \wedge b$ mit $a, b \in K^5$ schreiben läßt?

Aufgabe (63.12) Es sei V ein vierdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $\mathrm{char}\,(K) \neq 2$, und es sei (e_1, e_2, e_3, e_4) eine Basis von V. Zeige, daß für Elemente $a, b \in V$ mit $a \wedge b = \sum_{i<j} c_{ij} e_i \wedge e_j$ die Plückersche Relation $c_{12}c_{34} - c_{13}c_{24} + c_{14}c_{23} = 0$ äquivalent ist zu der Bedingung $a \wedge b \wedge a \wedge b = 0$.

Aufgabe (63.13) Es sei K ein beliebiger Körper.

(a) Für eine $\bigl(n \times (n-1)\bigr)$-Matrix A schreiben wir $A_{(i)}$ für diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile hervorgeht. Zeige, daß es zu je n Elementen $a_1, \ldots, a_n \in K$ eine Matrix $A \in K^{n \times (n-1)}$ gibt mit $a_i = \det A_{(i)}$ für $1 \le i \le n$.

(b) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Zeige, daß jedes Element $\xi \in \bigwedge^{n-1} V$ multiplikativ zerlegbar (also in der Form $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ mit Vektoren $v_i \in V$ darstellbar) ist.

Aufgabe (63.14) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

(a) Zeige: Ist $\alpha \in \bigwedge^k V$ mit einer ungeraden Zahl k, so gilt $\alpha \wedge \alpha = 0$.

(b) Finde Beispiele $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V \setminus \{0\}$ mit einer geraden Zahl k so, daß $\alpha \wedge \alpha = 0$, aber $\beta \wedge \beta \neq 0$ gilt.

↗ Lösungen zu »Symmetrien multilinearer Abbildungen«

A64: Die äußere Algebra eines Vektorraums

Aufgabe (64.1) Es sei K ein Körper mit Charakteristik $\mathrm{char}(K) = 0$.

(a) Eine Bilinearform $\varphi : K^n \times K^n \to K$ sei gegeben durch $\varphi(x, y) = x^T Ay$ mit einer Matrix $A \in K^{n\times n}$. Bestimme die Alternierung von φ!

(b) Eine Trilinearform $\varphi : K^n \times K^n \times K^n \to K$ sei gegeben durch $\varphi(x, y, z) = x_1y_2z_3$. Bestimme die Alternierung von φ!

(c) Wie (b), aber diesmal mit $\varphi(x, y, z) = x_1y_1z_3$.

Aufgabe (64.2) Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen.

(a) Zeige, daß es für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\wedge^k f : \bigwedge^k(V) \to \bigwedge^k(W)$ derart gibt, daß für alle Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ die folgende Gleichung gilt:

$$(\wedge^k f)(v_1, \ldots, v_k) \;=\; f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k).$$

(b) Zeige: Sind $g : U \to V$ und $f : V \to W$ lineare Abbildungen, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\wedge^k(f \circ g) \;=\; (\wedge^k g) \circ (\wedge^k f).$$

(c) Ist speziell V ein n-dimensionaler Vektorraum und ist $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V, so ist $\wedge^n f : \bigwedge^n(V) \to \bigwedge^n(V)$ ein Endomorphismus eines eindimensionalen Vektorraums, also einfach die Multiplikation mit einem festen Element in K. Welche Bedeutung hat dieses Element? Was bedeutet die Aussage in Teil (b) mit $k := n$ in dieser Situation?

Aufgabe (64.3) Es sei V ein dreidimensionaler Vektorraum. Bezüglich einer Basis (e_1, e_2, e_3) habe $f : V \to V$ die Matrixdarstellung

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrixdarstellung von $\wedge^2 f : \wedge^2(V) \to \wedge^2(V)$ bezüglich der Basis $(e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2)$!

Aufgabe (64.4) Es sei $f : V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums, und es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von f (gezählt mit Vielfachheit).

(a) Zeige, daß auch jede Abbildung $\wedge^k(f) : \bigwedge^k V \to \bigwedge^k(V)$ diagonalisierbar ist, und bestimme die Eigenwerte von $\wedge^k f$!

(b) Es sei $\det(f - \lambda\mathbf{1}) = \sum_{k=0}^n c_k\lambda^k$ das charakteristische Polynom von f. Zeige, daß die Koeffizienten dieses Polynoms gegeben sind durch $c_{n-k} = (-1)^k \operatorname{tr}(\wedge^k f)$.

Aufgabe (64.5) Es seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Zeige, daß die Eigenwerte von $\wedge^k f$ (gezählt mit Vielfachheit) genau die Zahlen der Form $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ sind, wobei die Zahlen λ_i die Eigenwerte von f sind (ebenfalls gezählt mit Vielfachheit).

Hinweis: Führe die Aufgabe auf den bereits in der vorhergehenden Aufgabe behandelten Fall zurück, daß f diagonalisierbar ist.

Aufgabe (64.6) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Ein von Null verschiedenes Element von $\bigwedge^n(V^\star)$ wird als **Volumenform** auf V bezeichnet. Begründe diese Wortwahl!

Aufgabe (64.7) Es sei V ein Vektorraum mit geradzahliger Dimension $\dim(V) = 2n$ über einem Köper mit $\mathrm{char}(K) = 0$, und es sei $\omega : V \times V \to K$ eine nichtausgeartete alternierende Bilinearform auf V. Begründe, warum man ω als Element von $\bigwedge^2(V^\star)$ auffassen kann, und zeige, daß dann das n-fache Produkt $\omega\wedge\cdots\wedge\omega$ ein von Null verschiedenes Element von $\bigwedge^{2n}(V^\star)$ (also eine Volumenform auf V) ist.

Aufgabe (64.8) Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und ω ein Erzeuger von $\bigwedge^n(V)$. Für je zwei Elemente $\alpha \in \bigwedge^k(V)$ und $\beta \in \bigwedge^{n-k}(V)$ ist $\alpha \wedge \beta$ ein Element von $\bigwedge^n(V)$ und damit ein skalares Vielfaches von ω, sagen wir

$$\alpha \wedge \beta \;=\; c(\alpha, \beta) \cdot \omega.$$

Zeige, daß $c : \bigwedge^k(V) \times \bigwedge^{n-k}(V) \to K$ eine nicht ausgeartete bilineare Abbildung ist und daß durch

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k(V) & \to & \bigwedge^{n-k}(V)^\star \\ \alpha & \mapsto & c(\alpha, \bullet) \end{array}$$

ein Isomorphismus zwischen $\bigwedge^k(V)$ und $\bigwedge^{n-k}(V)^\star \cong \bigwedge^{n-k}(V^\star)$ gegeben ist.

Bemerkung: Ist auf V ein Skalarprodukt gegeben, so können wir $V^\star$ mit V identifizieren; die resultierende Isomorphie $\bigwedge^k(V) \cong \bigwedge^{n-k}(V)$ wird dann als **Hodge-Dualität** bezeichnet.

↗ Lösungen zu »Die äußere Algebra eines Vektorraums«

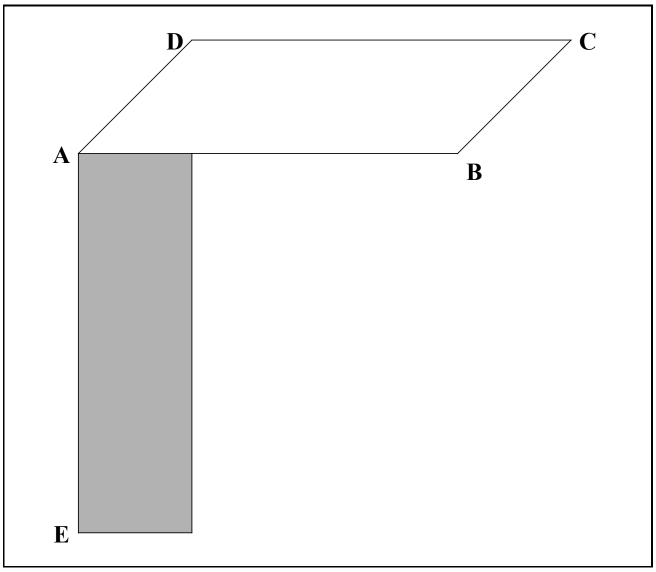
A65: Skalarprodukträume

Aufgabe (65.1) Es seien V ein reeller Skalarproduktraum und $a, b \in V$ Elemente von V. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Genau dann stehen a und b aufeinander senkrecht, wenn die Gleichung $\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ gilt.
(b) Genau dann stehen $a-b$ und $a+b$ aufeinander senkrecht, wenn die Gleichung $\|a\| = \|b\|$ gilt.
(c) Es gilt stets $\|a-b\|^2 + \|a+b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.
(d) Genau dann stehen a und b aufeinander senkrecht, wenn $\|a\| \le \|a + \lambda b\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Gib jeweils eine elementargeometrische Deutung!

Aufgabe (65.2) In der abgebildeten Figur hat die Diagonale AC eine Länge von 210 Metern, die Diagonale BD eine Länge von 120 Metern; ferner sei die Strecke AE genauso lang wie die Strecke CD. Welchen Flächeninhalt hat das grau markierte Rechteck?



Aufgabe (65.3) Zeige, daß für alle Vektoren $x, y \in V$ eines komplexen Skalarproduktraums die folgende Gleichung gilt!

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

Aufgabe (65.4) Es sei $V_{\mathbb{C}} = V + iV$ die Komplexifizierung eines reellen Vektorraums V. Zeige: Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein (reelles) Skalarprodukt auf V, so ist ein (komplexes) Skalarprodukt $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ auf $V_{\mathbb{C}}$ gegeben durch $\langle\!\langle v_1 + iv_2, w_1 + iw_2\rangle\!\rangle := \langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle + i\big(\langle v_2, w_1\rangle - \langle v_1, w_2\rangle\big)$.

Aufgabe (65.5) Zeige, daß eine Familie von Null verschiedener Vektoren, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, automatisch linear unabhängig ist.

Aufgabe (65.6) Zeige, daß für alle komplexen Zahlen $a_i \in \mathbb{C}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \;\le\; \sqrt{n}\cdot\sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}\,.$$

Aufgabe (65.7) Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Vektoren

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ (mit seinem kanonischen Skalarprodukt) an.

Aufgabe (65.8) Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Vektoren

$$u_1 = \begin{bmatrix}1+i\\i\\1\end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix}1\\i\\-i\end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ (mit seinem kanonischen Skalarprodukt) an.

Aufgabe (65.9) Es sei V der Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2. Zeige, daß durch die folgenden Vorschriften jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird!

(a) $\langle f, g\rangle := f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)} + f(2)\overline{g(2)}$
(b) $\langle f, g\rangle := f(0)\overline{g(0)} + f'(0)\overline{g'(0)} + f''(0)\overline{g''(0)}$
(c) $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

Gib in jedem der drei Fälle die Koordinatendarstellung des betrachteten Skalarprodukts bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ von V an!

Aufgabe (65.10) Im Vektorraum V der vorigen Aufgabe betrachten wir die Elemente f_1, f_2, f_3 mit $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ und $f_3(x) = x^2$. Wende für jedes der drei in Aufgabe (65.9) angegebenen Skalarprodukte das Gram-Schmidt-Verfahren auf (f_1, f_2, f_3) an!

Aufgabe (65.11) Wir betrachten den reellen Vektorraum V aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

sowie den Untervektorraum U aller Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2.

(a) Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $(1, x, x^2)$ von U an, um eine Orthonormalbasis von U zu erhalten.
(b) Bestimme die Bestapproximation von $f(x) = \sqrt{x}$ in U, d.h., finde dasjenige Polynom p vom Grad ≤ 2, für das $\int_0^1 \big(\sqrt{x} - p(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ minimal wird.

↗ Lösungen zu »Skalarprodukträume«

Aufgabe (65.12) Wenn ein Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung besitzt, kann man versuchen, eine Näherungslösung x_0 zu finden, die optimal in dem Sinne ist, daß der Ausdruck $\|Ax_0 - b\|$ minimal wird; dies ist genau dann der Fall, wenn Ax_0 eine Bestapproximation von b im Bild von A ist. Bestimme alle solchen Näherungslösungen x_0 für die beiden folgenden Gleichungssysteme!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Aufgabe (65.13) Es sei V die Menge aller (reellen oder komplexen) Zahlenfolgen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

(a) Zeige, daß V mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

(b) Zeige, daß für $x, y \in V$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ konvergiert und daß durch $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(c) Zeige, daß die Menge U aller Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern einen Untervektorraum von V bildet. Bestimme das Orthogonalkomplement $U^{\perp}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aufgabe (65.14) Es sei $V = \mathbb{K}^{m\times n}$ der Vektorraum aller (reellen bzw. komplexen) $m \times n$-Matrizen; für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sei $A^\star := \overline{A}^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ die Matrix, die aus A durch Transponieren und durch Konjugieren der einzelnen Matrixelemente entsteht.

(a) Zeige, daß durch $\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle := \mathrm{Spur}(B^\star A) = \mathrm{Spur}(AB^\star)$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist. (Dabei ist die Spur einer quadratischen Matrix die Summe ihrer Diagonalelemente. Beachte, daß $B^\star A$ eine $(n \times n)$-Matrix ist, dagegen $AB^\star$ eine $(m \times m)$-Matrix.) Dieses Skalarprodukt bezeichnet man als **Frobenius-Produkt**, die zugehörige Norm

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Spur}(A^\star A)} = \sqrt{\mathrm{Spur}(AA^\star)}$$

auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ als **Frobenius-Norm**.

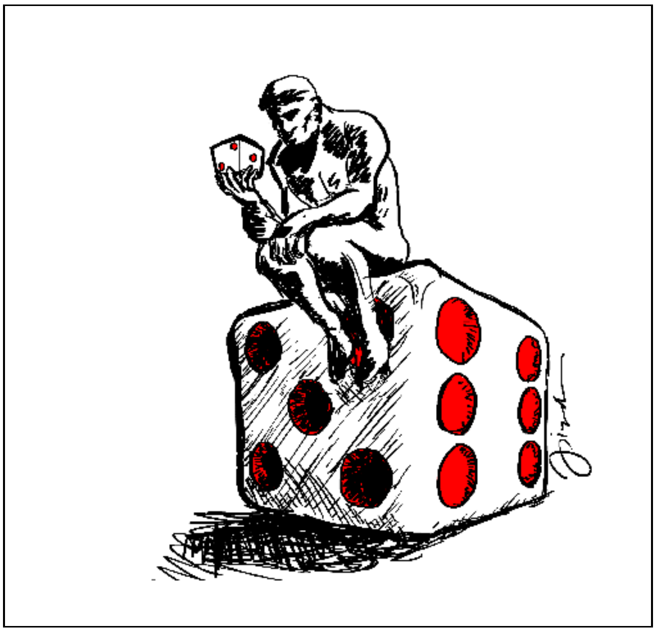
(b) Zeige, daß die Frobenius-Norm mit den kanonischen Normen auf $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ in dem Sinne kompatibel ist, daß für alle $x \in \mathbb{K}^n$ die Abschätzung

$$\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$$

gilt. (In dieser Ungleichung treten drei verschiedene Normen auf: $\|x\|$ wird mit der Standardnorm auf $\mathbb{K}^n$ gebildet, $\|Ax\|$ mit der Standardnorm auf $\mathbb{K}^m$ und $\|A\|$ mit der Frobenius-Norm.)

(c) Zeige, daß für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $m = n$ (also im Fall $V = \mathbb{R}^{n\times n}$) stets $\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle = 0$ gilt, wenn A symmetrisch und B schiefsymmetrisch ist. Zeige ferner, daß auch $\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle = 0$ gilt, wenn A eine Diagonalmatrix ist und B nur Nullen auf der Diagonalen hat.

Aufgabe (65.15) Die sechs Seiten eines Würfels seien mit den reellen Zahlen $f_1, \ldots, f_6$ beschriftet. Für jede Seite wird das arithmetische Mittel der Zahlen auf den vier Nachbarseiten ermittelt; anschließend wird jede der ursprünglichen Zahlen durch das jeweilige arithmetische Mittel ersetzt. Dieser Vorgang wird nun mit den neu erhaltenen Zahlen wiederholt, und so weiter. Welche Zahlen zeigt der Würfel nach n-facher Durchführung dieses Vorgangs? Was geschieht für $n \to \infty$? (Vorher raten!)



Anleitung: Wir schreiben W für die Menge der Seiten des Würfels; jede Beschriftung des Würfels durch reelle Zahlen läßt sich dann als eine Abbildung $f : W \to \mathbb{R}$ auffassen. Betrachte den Vektorraum $\mathfrak{F}$ aller Funktionen $f : W \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \sum_{x\in W} f(x)g(x)$ sowie die lineare Abbildung $L : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ mit

$$(Lf)(x) := \frac{1}{4} \sum_{\substack{y \text{ benach-} \\ \text{bart zu } x}} f(y)\,.$$

Ist x eine beliebige Seite des Würfels, so bezeichnen wir mit $x^\star$ die x gegenüberliegende Seite. Wir nennen eine Funktion f gerade, wenn $f(x^\star) = f(x)$ für alle $x \in W$ gilt, dagegen ungerade, wenn $f(x^\star) = -f(x)$ für alle $x \in W$ gilt. Zeige, daß die Mengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &:= \{f \in \mathfrak{F} \mid f \text{ ist konstant}\}, \\ \mathfrak{F}_2 &:= \{f \in \mathfrak{F} \mid f \text{ ist gerade mit } \textstyle\sum_{x\in W} f(x) = 0\}. \\ \mathfrak{F}_3 &:= \{f \in \mathfrak{F} \mid f \text{ ist ungerade}\} \end{aligned}$$

Untervektorräume von $\mathfrak{F}$ sind, die aufeinander senkrecht stehen und von L jeweils in sich abgebildet werden. Bestimme für $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ jeweils eine Orthonormalbasis! Löse dann die eigentliche Aufgabe.

↗ Lösungen zu »Skalarprodukträume«