Mathematik

Fachhochschulreife an Berufskollegs

Baden-Württemberg

mit Kurzbeschreibung von GeoGebra

Autoren:
Josef Dillinger
Bernhard Grimm
Dr. Frank-Michael Gumpert
Gerhard Mack
Katharina Schuster

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 70018

Autoren des Buches „Mathematik Fachhochschulreife an Berufskollegs Baden-Württemberg“

Josef Dillinger	Hausen
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Dr. Frank-Michael Gumpert	Stuttgart
Gerhard Mack	Esslingen
Katharina Schuster	Sindelfingen, Böblingen

Lektorat:
Bernhard Grimm

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2021
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-7585-7001-8

Layout und Satz: Daniela Schreuer, 78256 Steißlingen
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald
Umschlagfoto: © CenturionStudio.it – stock.adobe.com
Druck: RCOM Print GmbH, 97222 Würzburg-Rimpar

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch erfüllt die Vorgaben der Bildungspläne zum Erwerb der Fachhochschulreife, die mit Beginn des Schuljahres 2017/2018 in Baden-Württemberg in Kraft getreten sind.
Das Buch richtet sich an Schüler*innen, die an allen beruflichen Schulen in Baden-Württemberg den Fachhochschulreife-Abschluss anstreben. Dies betrifft alle 1-jährigen, 2-jährigen und 3-jährigen Berufskollegs an gewerblich-technischen, kaufmännisch-wirtschaftlichen und haus- und landwirtschaftlichen beruflichen Schulen.

Das Buch enthält alle erforderlichen Inhalte, die zum Erwerb der Fachhochschulreife notwendig sind, und stützt sich dabei auf den Lehrplan für das 1BKFH. Der Seitenumfang ist so gewählt, dass das Buch in der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit vollständig durchgearbeitet werden kann.

Um die Mathematik mit der Alltagserfahrung in Verbindung zu bringen, werden die mathematischen Inhalte in der Regel schülergerecht an praktischen Beispielen anwendungsbezogen eingeführt und behandelt. Dabei kommt jedoch das theoretische, innermathematische Arbeiten mit Symbolen, Schaubildern, Formeln und der Sprache der Mathematik nicht zu kurz.

Durch gezielte Übungsaufgaben werden die Schüler*innen darin gefördert, Ergebnisse darzustellen, zu präsentieren und zu interpretieren, reale Vorgänge mathematisch zu modellieren und Problemlösefähigkeiten zu entwickeln. Dadurch sollen die Schüler*innen zur Studierfähigkeit geführt werden. Die Lösungen der Aufgaben sind stets auf derselben Buchseite angegeben, wodurch eine Selbstorganisation des Lernprozesses auch in kooperativen Lerngruppen ermöglicht wird. Darüber hinaus kann eine bedarfsorientierte Binnendifferenzierung durchgeführt werden, indem Schüler*innen ohne Unterstützungsbedarf eigenständig und selbstkontrolliert arbeiten können, während der Lehrer gezielt die anderen Schüler*innen betreut.

Die schriftliche Abschlussprüfung im Fach Mathematik zur Fachhochschulreife enthält zwei Prüfungsteile. Ein Teil ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten, der andere mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner, der jedoch nicht programmierbar und nicht grafikfähig ist. Deshalb enthält dieses Buch ein Kapitel Prüfungsvorbereitung, in welchem die Schüler*innen gezielt auf die beiden unterschiedlichen Prüfungsteile vorbereitet werden.

Zur Stärkung der digitalen Medienkompetenz enthält das Buch ein Kapitel, in welchem erste Schritte mit dem digitalen Mathematikwerkzeug Geogebra trainiert werden können, sowie die Beschreibungen mehrerer Apps für den Tablet-Einsatz, um z. B. mathematische Inhalte zu einem Thema als Mindmap zu strukturieren.

Schüler*innen, deren Realschulzeit schon länger zurückliegt, haben die Möglichkeit, im Kapitel G die zum Gesamtverständnis erforderlichen Grundlagen wieder in Erinnerung zu bringen. Das Kapitel P enthält lehrplangemäß Projektvorschläge zur fachlichen Vertiefung.

Ergänzend zu diesem Buch stehen ein didaktisch aufbereiteter Löser mit Lösungsschritten sowie eine Formelsammlung zur Verfügung.

- „Formelsammlung Mathematik für die Fachhochschulreife"   ISBN 978-3-8085-8514-6   Europa-Nr.: 85129
- „Lösungen Mathematik Fachhochschulreife an Berufskollegs"   ISBN 978-3-8085-7227-2   Europa-Nr.: 72272

Wir wollen dieses Buch für den Mathematikunterricht bestmöglich weiterentwickeln. Deshalb freuen wir uns über Anregungen und Verbesserungsvorschläge unter: info@europa-lehrmittel.de

Das Autorenteam und der Verlag Europa Lehrmittel   Frühjahr 2021

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Fachbegriffe ... 6
Aufbau des Buches ... 8

G Grundlagen

G1 Zahlenmengen und ihre Elemente ... 9
G2 Koordinatensystem und Intervalle ... 10
G3 Algebraische Grundlagen ... 11
G4 Flächenberechnungen ... 19
G5 Volumenberechnung ... 22

1 Funktionen, deren Schaubilder und Gleichungen

1.1 Funktionsbegriff ... 26
1.2 Lineare Funktionen ... 28
1.2.1 Proportionale Funktionen ... 28
1.2.2 Allgemeine lineare Funktionen ... 30
1.2.3 Steigungswinkel α und Schnittwinkel φ ... 32
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 35
1.3 Quadratische Funktionen ... 36
1.3.1 Parabeln mit dem Scheitel im Ursprung ... 36
1.3.2 Verschieben von Parabeln ... 37
1.3.3 Scheitelform und Normalform ... 38
1.3.4 Nullstellenberechnung ... 40
1.3.5 Bestimmen von Funktionsgleichungen ... 43
1.3.6 Schnittpunkte von Schaubildern ... 44
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 47
1.4 Ganzrationale Funktionen höheren Grades ... 48
1.4.1 Potenzfunktionen ... 48
1.4.2 Schaubilder und Gleichungen ... 49
1.4.3 Nullstellenberechnungen ... 55
1.4.4 Gemeinsame Punkte von Schaubildern ... 62
1.4.5 Strecken und Verschieben von Schaubildern ... 63
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 67
1.5 Exponentialfunktionen ... 68
1.5.1 Wachstums- und Zerfallsprozesse ... 68
1.5.2 Natürliche Exponentialfunktionen ... 69
1.5.3 Logarithmen und Exponentialgleichungen ... 72
1.5.4 Schnittpunktberechnungen ... 74
1.5.5 Modellierung exponentieller Prozesse ... 76
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 79
1.6 Trigonometrische Funktionen ... 80
1.6.1 Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck ... 80
1.6.2 Sinus und Kosinus am Einheitskreis ... 82
1.6.3 Sinusfunktion und Kosinusfunktion ... 85
1.6.4 Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion ... 86
1.6.5 Trigonometrische Gleichungen ... 89
Erwerben Sie Prüfungskompetenz ... 93

2 Lineare Gleichungssysteme LGS

2.1 Aufstellen von LGS ... 94
2.2 Lösungsverfahren ... 95
2.3 Lösungsvielfalt ... 100
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 105

3 Differenzialrechnung

3.1 Änderungsraten und Ableitungen ... 106
3.1.1 Änderungsraten ... 106
3.1.2 Erste Ableitung f' ... 108
3.1.3 Höhere Ableitungen ... 113
3.2 Kurvendiskussion ... 116
3.2.1 Extrempunkte und Wendepunkte ... 116
3.2.2 Monotonie und Krümmungsverhalten ... 120
3.2.3 Tangenten und Sekanten ... 123
3.2.4 Untersuchen von Kurven ... 126
Erwerben Sie Prüfungskompetenz ... 131
3.3 Ermittlung von Funktionstermen ... 132
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 139
3.4 Extremwertrechnung ... 140
3.4.1 Lokale Extremwerte ... 140
3.4.2 Absolute und lokale Extremwerte ... 144
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 151

4 Integralrechnung

4.1 Flächeninhaltsfunktionen ... 152
4.2 Das unbestimmte Integral ... 154
4.3 Das bestimmte Integral ... 157
4.4 Flächenberechnungen ... 159
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! ... 171

5 Prüfungsvorbereitung

5.1 Prüfungsteil ohne Hilfsmittel ... 172
5.2 Prüfungsteil mit Hilfsmittel ... 176
Musterprüfung ... 180

6 Digitale Medienwerkzeuge

6.1 GeoGebra ... 182
6.2 Tablet-Unterricht ... 186

P Projektthemen

P1 Grundlagen der Vektorrechnung ... 190
P2 Grundlagen der Kostenrechnung ... 198
P3 Grundlagen der Stochastik ... 206

Mathematische Zeichen und Formelzeichen ... 214
Sachwortverzeichnis ... 216

Mathematische Fachbegriffe

Ableitungsfunktion
Ist die Funktion $f'(x)$, deren Werte die Steigungen des Schaubildes K_f der Funktion f angeben.

Achsenschnittpunkte
Schnittpunkte von Schaubildern mit den Koordinatenachsen, z. B. der x-Achse, y-Achse oder z-Achse.

Äquivalenzumformung
Umformung von Gleichungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Arkus-Funktionen
Die Arkus-Funktionen, z. B. $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$ und $\arccos(x)$, sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\tan(x)$ und $\cos(x)$.

Asymptote
Eine Gerade, der sich ein ins Unendliche verlaufendes Schaubild beliebig nähert.

Biquadratische Gleichung
Eine Gleichung vierten Grades mit nur geradzahligen Exponenten: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Definitionsmenge
Menge der x-Werte, die in den Funktionsterm eingesetzt werden dürfen, auch Definitionsbereich genannt.

Differenzenquotient
Die Steigung einer Sekanten, die das Schaubild einer Funktion in zwei Punkten schneidet.

Differenzialquotient
Grenzwert des Differenzenquotienten. Entspricht der Steigung der Tangente an ein Schaubild.

Differenzierbarkeit von Funktionen
Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle der Definitionsmenge D eine eindeutig bestimmte Tangente mit einer endlichen Steigung hat.

e-Funktion
Exponentialfunktion mit der Basis e, auch natürliche Exponentialfunktion genannt, z. B. $f(x) = e^x$.

Einheitskreis
Ein Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

Exponentialfunktion
Eine Funktion, bei der die Variable x im Exponenten steht, z. B. $f(x) = 2^x$. Mit Exponentialfunktionen werden Wachstums- und Zerfallsprozesse beschrieben.

Extremstelle
Die Stelle x, an der eine Funktion in einer lokalen Umgebung ihren größten oder kleinsten y-Wert annimmt, auch Hochpunkt oder Tiefpunkt genannt.

Funktion
Eindeutige Zuordnung von Elementen.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$
Sie können positiv, negativ oder null sein.

Ganzrationale Funktionen
Bestehen aus der Addition verschiedener Potenzfunktionen.

Gerade
Das Schaubild für die Darstellung der linearen Funktion heißt Gerade.

Gleichung
Eine Gleichung entsteht durch Verbindung zweier Terme durch ein Gleichheitszeichen.

Integrieren
Eine abgeleitete Funktion wieder in die ursprüngliche Form zurückführen.

Irrationale Zahlen
Dezimalzahlen mit unendlich vielen, nichtperiodischen Nachkommastellen, z. B. π, e, $\sqrt{2}$.

Kartesische Koordinaten
Mit Koordinaten lässt sich die Lage von Punkten in einer Ebene, z. B. $(1|2)$, oder im Raum, z. B. $(1|2|3)$, eindeutig festlegen und darstellen.

Konstante Funktion
Funktionswert bleibt für alle Werte x konstant, z. B. $f(x) = 2$.

Koordinatensystem
Achsen stehen senkrecht aufeinander und haben die Einheit 1 LE.

Krümmungsverhalten einer Funktion
Die Krümmung gibt den Verlauf des Schaubildes einer Funktion an, z. B. linksgekrümmt und/oder rechtsgekrümmt.

Lineare Funktion
Ganzrationale Funktion ersten Grades.

Lineares Gleichungssystem LGS
System von Lineargleichungen, deren Variablen die Hochzahl 1 enthalten.

Logarithmische Funktion
Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion, z. B. $f(x) = \ln(x)$.

Logarithmus
Durch Logarithmieren berechnet man die Hochzahl einer Potenz, z. B. $\lg(100) = 2$.

Monotonie
Gibt den Verlauf eines Schaubildes bezüglich ihrer Steigung an, z. B. monoton steigend/fallend.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$
Positive, ganze Zahlen einschließlich der Zahl Null. $\mathbb{N}^*$ ist die Menge $\mathbb{N}$ ohne der Zahl Null: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Nummerische Integration
Näherungsweise Berechnung des Flächeninhaltes, z. B. durch Auszählen von elementaren Teilflächen, wie Rechtecken oder Trapezen. Sie wird angewendet, wenn keine Stammfunktion bekannt ist.

Nullstellen
Die x-Werte der Schnittpunkte eines Schaubildes mit der x-Achse.

Orthogonal
Rechtwinklig. Orthogonale (rechtwinklige) Geraden haben einen Winkel von 90° zueinander.

Parabel
Schaubild einer quadratischen Funktion.

Parameter
Platzhalter für Zahlen aus einer Zahlenmenge, auch Variable genannt.

Polynom
Eine andere Bezeichnung für eine ganzrationale Funktion.

Potenz
Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren.

Potenzfunktion
Funktion von der Form $f(x) = x^n$.

Quadranten
Zeichenebenen im Koordinatensystem.

Quadratische Gleichung
Eine Gleichung zweiten Grades: $ax^2 + bx + c = 0$.

Quadratwurzel
Beim Wurzelziehen (Radizieren) wird der Wert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Das Ergebnis einer Quadratwurzel ist immer größer gleich null.

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind.

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$
Zahlen, die rational oder irrational sind.

Relation
Eindeutige oder mehrdeutige Zuordnung von Elementen.

Sattelpunkt, Terrassenpunkt
Punkt im Schaubild einer Funktion mit waagrechter Tangente, an dem sich die Krümmung ändert, z. B. von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve.

Satz vom Nullprodukt
Lösungsverfahren von Gleichungen in Produktform. Ein Produkt wird null, wenn einer der Faktoren null wird.

Skalar
Größe, die durch einen bestimmten reellen Zahlenwert festgelegt ist.

Steigung
Verhältnis des Δy-Wertes zum Δx-Wert eines Steigungsdreiecks.

Term
Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen kann.

Trigonometrische Funktion
Winkelfunktionen, z. B. $f(x) = \sin(x)$.

Umkehrfunktion
Funktion, bei der die Zuordnung der Variablen, z. B. x und y, vertauscht wird.

Variable
Buchstaben, z. B. x, y oder z, an deren Stelle Zahlen aus der Grundmenge gesetzt werden.

Vektor
Physikalische oder mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird und durch Richtung und Betrag festgelegt ist.

Wendepunkt
Punkt im Schaubild einer Funktion, an dem sich die Krümmung ändert, z. B. von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve.

Wertemenge
Alle y-Werte, die sich ergeben, wenn x-Werte aus der Definitionsmenge in einen Funktionsterm eingesetzt werden.

Aufbau des Buches

Die für die schriftliche Prüfung maßgebenden Kapitel sind gleich benannt wie die Kapitel im Bildungsplan:

1 **Funktionen, deren Schaubilder und Gleichungen**
2 **Lineare Gleichungssysteme LGS**
3 **Differenzialrechnung**
4 **Integralrechnung**

Sofern keine Zahlenmenge angegeben ist, wird bei allen Rechnungen die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen verwendet.

Jedes Unterkapitel, wie z. B. **„1.3 Quadratische Funktionen“**, enthält:

- grün markierte Beispielrechnungen,
- orange unterlegte zentrale Merksätze und
- grau unterlegte Formeln.

Beispiel: Parabeln mit $f(x) = ax^2$ und $a < 0$
Darzustellen sind die Parabeln der Funktionen m und n mit $m(x) = -x^2$ und $n(x) = -0{,}25x^2$.

Lösung: **Bild 3**

$f(x) = ax^2$

a Streckfaktor

Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ heißt …

In jedem Unterkapitel folgt nach meistens 2 bis 4 Seiten eine ganze Übungsseite mit dem Titel:

„Festigen Sie Ihr Wissen!“

Alle Übungsaufgaben im Buch sind durchgängig

- blau unterlegt.

Zu allen Aufgaben sind die Lösungen für die Selbstkontrolle angegeben.

Festigen Sie Ihr Wissen!

1. Das Schaubild K_f einer quadratischen Funktion hat den Scheitelpunkt im Koordinatenursprung $O(0|0)$. Bestimmen Sie den Steckfaktor a, wenn das Schaubild außerdem folgenden Punkt P besitzt.

a) $P(1\|0{,}4)$	b) $P(1\|-2{,}3)$	c) $P(1\|2{,}8)$
d) $P(-0{,}5\|0{,}25)$	e) $P(-1{,}5\|-2{,}25)$	f) $P(-2\|16)$
g) $P(-3\|4{,}5)$	h) $P(-1{,}5\|13{,}5)$	i) $P(2{,}5\|1{,}35)$

Lösungen: 1. a) 0,4 b) −2,3 c) 2,8 d) 1 e) −1 f) 4 g) −3 h) 6 i) 0,

Jedes Unterkapitel besitzt einen tabellarischen Rückblick mit der Überschrift:

Das soll ich für die Prüfung können:

In einer Tabelle werden Prüfungskompetenzen aufgelistet, die für ein erfolgreiches Abschneiden in der Prüfung notwendig sind.

Das soll ich für die Prüfung können:

I. Den Einfluss des Streckfaktors … erklären!	
Geg.: $f(x) = a(x^2 - 2x)$ Ges.: Einfluss von $a = -2$	1. Polarität $-2 < 0$: nach unten offen
II. Die Gleichung einer quadrati ... erstellen!	

Am Ende jedes Unterkapitels folgt auf jede Seite **„Das soll ich für die Prüfung können“** eine Seite:

Erwerben Sie Prüfungskompetenz!

Diese Seite enthält Aufgaben, in welchen gelernte Prüfungskompetenzen erprobt werden. Zu jeder Aufgabe werden die Prüfungskompetenzen angegeben, die zur Lösung der Aufgabe erforderlich sind.

Erwerben Sie Prüfungskompetenz!

1. zu I und II

Ordnen Sie den in **Bild 1** dargestellten Schaubildern A bis E folgende Funktionen mit Begründung zu.

a) Funktion f mit $f(x) = -0{,}375 \cdot (x + 3)^2 - 1$.
b) Funktion g mit $g(x) = 0{,}5 \cdot (x + 3)^2 - 1$.

Lösungen: 1. a) E, $S(-3|-1)$, $a < 0$ und $|a| < 1$ b) D, $S(-3|-1)$, a

G Grundlagen

G1 Zahlenmengen und ihre Elemente

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Mengen werden in beschreibender oder aufzählender Form oder grafisch mit Mengendiagrammen (Venn-Diagrammen) angegeben (**Bild 1** und **Tabelle 1**).

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}$ beinhaltet alle Zahlen, die zum Abzählen benötigt werden, einschließlich der Zahl Null.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$

Menge der ganzen Zahlen Z

Die Menge $\mathbb{Z}$ enthält die natürlichen Zahlen und alle negativen ganzen Zahlen. Damit ist die Rechenoperation Subtraktion uneingeschränkt möglich. $\mathbb{N}$ ist Teilmenge von $\mathbb{Z}$, das schreibt man:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z} = \{\ldots -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Erweiterung der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen machen die Rechenoperation Division (ausgenommen mit der Zahl Null) möglich. Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

$\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{p}{q} \right\}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Zahlen, die nicht durch einen Bruch darstellbar sind, haben unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen. Diese Zahlen bezeichnet am als irrationale Zahlen $\mathbb{I}$, z. B. π; e; $\sqrt{2}$; ln(2). Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ (Vereinigungsmenge von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{I}$)

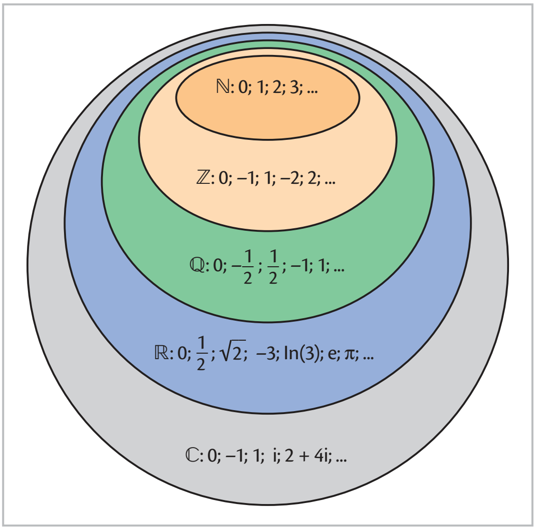


Bild 1: Zahlenmengen

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Die Gleichung der Form $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Aus diesem Grund hat man die imaginäre Einheit eingeführt und die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ um die imaginäre Zahlenmenge erweitert. Beispiele für imaginäre Zahlen sind z. B. – i oder 2i (zweimal die imaginäre Zahl i). Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{C} = \{\underline{z} \,|\, \underline{z} = a + bi\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Komplexen Zahlen $\underline{z}$ bestehen aus einem Realteil $a = \mathrm{Re}(\underline{z})$ und einem Imaginärteil $b = \mathrm{Im}(\underline{z})$. Die komplexen Zahlen können wegen der imaginären Anteile nicht mehr am Zahlenstrahl dargestellt werden. Ihre Darstellung erfolgt in der komplexen Zahlenebene (Gauß´sche[1] Ebene). Diese besitzt eine reelle Achse $\mathrm{Re}(\underline{z})$ und eine imaginäre Achse $\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(\underline{z})$. Komplexe Zahlen werden oft mit Polarkoordinaten beschrieben.

Tabelle 1: Zusammenfassung der Zahlenmengen

Zahlenmenge	Symbol	Zahlenart	Beispiele
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	Positive ganze Zahlen	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; …
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	Negative und positive ganze Zahlen	…; – 4; – 3; – 2; – 1; 0; 1; 1; 2; 3; 4; …
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	Ganze Zahlen und Bruchzahlen	…; $-\frac{7}{8}$; – 0,5; 0,2; $\frac{3}{7}$; $\frac{10}{11}$; 13; …
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	Rationale und irrationale Zahlen	…; $-\sqrt{3}$; – 0,5; 0,7; $\frac{3}{7}$; $\sqrt{2}$; π; 7; …
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	Reelle und imaginäre Zahlen	…; – 2i; $\sqrt{-1}$; –1 + 2i; 3 + i; 5 + 2i; …

[1] Carl Friedrich Gauß, dt. Mathematiker 1777 bis 1855

G2 Koordinatensystem und Intervalle

Rechtwinkliges Koordinatensystem

Zur Festlegung eines Punktes in einer Ebene wird das rechtwinklige Koordinatensystem verwendet. Die waagrechte Achse heißt Abszisse, die senkrechte Achse heißt Ordinate. Auf der Abszisse werden die Zahlen der Variablen x abgetragen, deshalb nennt man sie auch x-Achse. Auf der Ordinate trägt man die Zahlen der Variablen y ab, deshalb nennt man sie auch y-Achse. Der Schnittpunkt beider Achsen heißt Nullpunkt oder Ursprung $O(0|0)$ (**Bild 1**).

Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in vier Quadranten ein. Sie werden gegen den Uhrzeigersinn mit den römischen Ziffern I bis IV bezeichnet.

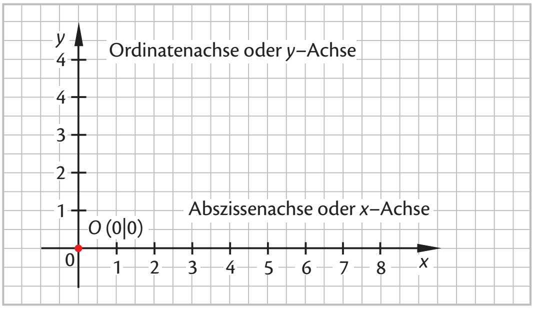


Bild 1: Rechtwinkliges Koordinatensystem

Beispiel: Quadranten und Wertepaare im Schaubild

In ein rechtwinkliges Koordinatensystem sind

a) die Bezeichnung der Quadranten einzutragen,

b) folgende Wertepaare der Wertetabelle einzuzeichnen,

x	3	– 2	– 3	2
y	2	3	– 2	– 3

c) die Vorzeichen der Koordinaten in den vier Quadranten anzugeben.

Lösung: **Bild 2**

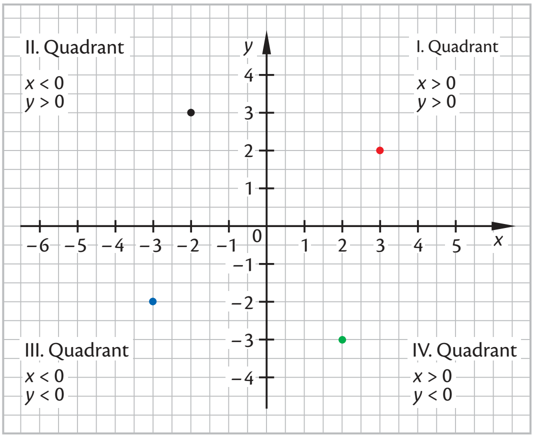


Bild 2: Wertepaare im Koordinatensystem

Das Koordinatensystem besteht aus zwei zueinander senkrechten Achsen, die als x-Achse und y-Achse bezeichnet werden. Der Schnittpunkt der beiden Achsen wird als Ursprung O bezeichnet.
Durch die Angabe der Koordinaten wird die Lage eines Punktes, z. B. $P\,(x_P|y_P)$, festgelegt.

Intervalle

Zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden häufig als Intervalle angegeben (**Tabelle 1**).

Beispiel: Intervallbestimmung

Aus dem Schaubild in **Bild 3** sind im Bereich von 0 bis 5π die Intervalle zu bestimmen, in denen die Funktionswerte positiv sind.

Lösung: Intervalle $[0; \pi]$ und $[2\pi; 3\pi]$ und $[4\pi; 5\pi]$

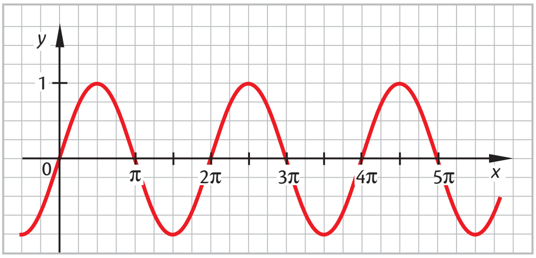


Bild 3: Schwingung

Bei **abgeschlossenen** Intervallen gehören die beiden Randwerte a und b zur Wertemenge dazu. Gehört nur ein Randwert zur Menge dazu, nennt man es **halboffen**, gehört keiner der Randwerte dazu, nennt man es **offen**.

Tabelle 1: Intervalle und Intervallschreibweise

Intervall	Sprechweise und Art des Intervalls	Intervall als Ungleichung
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall von a bis b	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$]a, b]$	Linksseitig offenes, rechtsseitig abgeschlossenes Intervall von a bis b	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a, b[$	Linksseitig abgeschlossenes, rechtsseitig offenes Intervall von a bis b	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a, b[$	Offenes Intervall von a bis b	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

G3 Algebraische Grundlagen

Gleichungen

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r. Terme enthalten Zahlen, Variablen oder beides.

Werden Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel: Gleichung

Der Linksterm $T_l: x + 2$ und der Rechtsterm $T_r: -4$ ist als Gleichung darzustellen.

Lösung: $x + 2 = -4$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden (**Tabelle 1**). Diese Operation nennt man **Äquivalenzumformung**. Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage sein, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

Beispiel: Lösung einer Gleichung

Die Gleichung $x + 2 = -4$ ist durch Äquivalenzumformung zu lösen.

Lösung:

$$\begin{aligned} x + 2 &= -4 \qquad | -2 \\ x + 2 - 2 &= -4 - 2 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Ein Wert x einer Zahl heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen

Rechenoperation	Beispiel
Addition	$x - 5 = 0 \quad \vert +5$ $x - 5 + 5 = 0 + 5$ $x = 5$
Subtraktion	$x + 7 = 0 \quad \vert -7$ $x + 7 - 7 = 0 - 7$ $x = -7$
Multiplikation	$\frac{1}{2} \cdot x = 1 \quad \vert \cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$
Division	$2 \cdot x = 4 \quad \vert :2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$

Tabelle 2: Einschränkung der Definitionsmenge in IR

Term	Einschränkung	Definitionsmenge
Bruchterm $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x+1}{x-1}$	$N(x) \neq 0$	$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ $D = \{x \vert x \neq 1\}$
Wurzelterm $T(x) = \sqrt{x-1}$	Radikant ≥ 0	$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ $D = \{x \vert x \geq 1\}$

Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus einer Grundmenge ausschließen (**Tabelle 2**). Die Bezeichnung ist D.

Beispiel: Definitionsmenge

Die Definitionsmenge folgender Terme ist zu bestimmen: a) $T(x) = \frac{x+2}{x}$ b) $T(x) = \sqrt{5-x}$

Lösung:

a) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $5 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 5; \; D = \{x | x \leq 5\}$

Unter der Definitionsmenge versteht man die Menge von Zahlen oder Elementen, die man in einen Term einsetzen darf, ohne ein Rechengesetz zu verletzen.

Lösungsmenge

Alle Zahlen, die eine Aussageform in eine wahre Aussage übergehen lassen, bilden die Lösungsmenge L.

Beispiel: Lösungsmenge

Die Lösungsmenge folgender Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen: a) $2x + 4 = 13 - x$ b) $5 - x \geq 0$

Lösung:

a) $2x + 4 = 13 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3; \; L = \{3\}$

b) $5 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 5; \; L = \{x | x \leq 5\}$

Unter der Lösungsmenge versteht man die Menge von Zahlen oder Elementen, die zu einer wahren Aussage führen.

Aufgaben:

1. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme für $x \in \mathbb{R}$ an: a) $T(x) = \frac{x}{x-2}$ b) $T(x) = 2x + 2$ c) $T(x) = \sqrt{2x-4}$
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$: a) $6x - 4 = 6 + x$ b) $4 - x \geq x + 6$

Lösungen: 1. a) $D = \mathbb{R} \neq 2$ b) $D = \mathbb{R}$ c) $D = \{x|x \geq 2\}$ **2.** a) $L = \{2\}$ b) $L = \{x|x \leq -1\}$

Binomische Formeln

Bild 1 veranschaulicht die erste Binomische Formel. Das gesamte Quadrat mit den Seitenlängen $(a + b)$ setzt sich aus dem roten Quadrat mit der Fläche a^2, dem gelben Quadrat mit der Fläche b^2 und den beiden grünen Rechtecken mit den Flächen $2ab$ zusammen. Damit ist:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

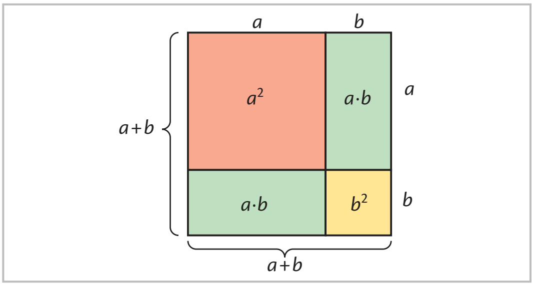


Bild 1: Erste Binomische Formel

Erste Binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beispiel: Erste Binomische Formel

Zu berechnen ist a) $(x + 2)^2$ und b) $(3x + 5y)^2$.

Lösungen:

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + 25y^2$
$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$

Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ergibt die Summe von ihren Quadraten mit ihrem doppelten Produkt.

Bild 2 veranschaulicht die zweite Binomische Formel. Das gesamte Quadrat hat die Seitenlänge a und die Fläche a^2. Zieht man von dieser die beiden grünen Rechtecke mit der Fläche $2 \cdot (a - b) \cdot b$ und das gelbe Quadrat mit Fläche b^2 ab, verbleibt das rote Quadrat mit der Fläche $(a - b)^2$. Damit ist:
$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot (a - b) \cdot b - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2$
$(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

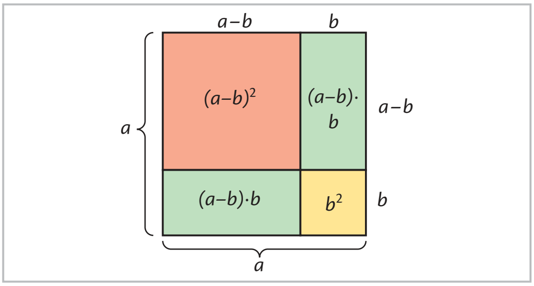


Bild 2: Zweite Binomische Formel

Zweite Binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Beispiel: Zweite Binomische Formel

Zu berechnen ist a) $(3a - 4)^2$ b) $(0{,}5 + 5u)^2$.

Lösungen:

a) $(3a - 4)^2 = 9a^2 - 24a + 16$

b) $(0{,}5 + 5u)^2 = 0{,}25 - 5u + 25u^2$

Bild 3 veranschaulicht die dritte Binomische Formel. Die blaue Differenzfläche der Quadrate mit a^2 und b^2 im linken Teil der Grafik besteht aus zwei gleichgroßen Trapezflächen. Im rechten Teil der Grafik sind diese zu einem Rechteck mit den beiden Seitenlängen $a + b$ und $a - b$ zusammengesetzt. Damit ist:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

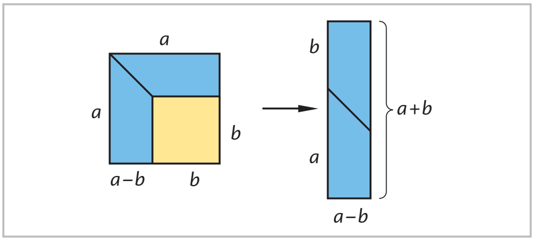


Bild 3: Dritte Binomische Formel

Dritte Binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Beispiel: Dritte Binomische Formel

Zu berechnen ist a) $(x + 2) \cdot (x - 2)$ und
b) $(a^2 - 3) \cdot (a^2 + 3)$.

Lösungen:

a) $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$

b) $(a^2 - 3) \cdot (a^2 + 3) = a^4 - 9$

Ob die Summe $4x^2 + 22x + 121$ ein Binom ist, kann mithilfe der ersten Binomischen Formel geprüft werden:

$$4x^2 + 22x + 121 = (2x)^2 + 2 \cdot 11 \cdot x + (11)^2$$

Da die Terme nicht das doppelte Produkt von $2x$ und 11 enthalten, liegt kein Binom vor. Es müsste lauten:

$$4x^2 + 44x + 121 = (2x + 11)^2$$

Beispiel: Binom bestimmen

Gesucht ist die Zahl c des Binoms $4x^2 + 12x + c$.

Lösung:

$4x^2 + 12x + c = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + c \;\Rightarrow\; c = 3^2 = 9$

$\Rightarrow\; (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

Bruchrechnen

Der Wert eines echten Bruches ist immer kleiner als eins. Welcher der beiden Brüche $\frac{4}{13}$ oder $\frac{5}{17}$ der größere ist erkennt man, wenn die Brüche so erweitert werden, dass sie denselben Nenner besitzen (**Bild 1**). Beim Vergleichen der Nenner erkennt man, dass der Bruch $\frac{4}{13}$ um den Wert $\frac{3}{221}$ größer ist als der Bruch $\frac{5}{17}$.

Erweitern mit 17

$$\frac{4}{13} = \frac{4 \cdot 17}{13 \cdot 17} = \frac{68}{221}$$

Erweitern mit 13

$$\frac{5}{17} = \frac{5 \cdot 13}{17 \cdot 13} = \frac{65}{221}$$

Bild 1: Erweitern echter Brüche

Der Wert eines unechten Bruches ist größer gleich eins, d. h. der Nenner ist nicht kleiner als der Zähler, z. B. $\frac{57}{38}$. Da sowohl Zähler als auch Nenner ein Vielfaches von 19 sind, kann mit 19 gekürzt werden (**Bild 2**). Die Schreibweise $1\frac{1}{2}$ bedeutet eins und ein halb, d. h. die Werte müssen addiert werden $1 + \frac{1}{2}$.

Kürzen mit 19

$$\frac{57}{38} = \frac{57 : 19}{38 : 19} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Bild 2: Kürzen eines unechten Bruches

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen müssen die Brüche auf denselben Nenner (Hauptnenner) gebracht werden. Er ist im Idealfall das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, d. h. die kleinste Zahl, in der beide Nenner enthalten sind, z. B. die Zahl 36 bei den Nennern 12 und 18.

Addition und Subtraktion

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \qquad b, d \neq 0$$

Beispiel: Addition von Brüchen

Zu berechnen ist $\frac{5}{12} + \frac{7}{18}$.

Lösung:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{36} = \frac{15 + 14}{36} = \frac{29}{36}$$

Beispiel: Subtraktion von Brüchen

Zu berechnen ist $\frac{7}{12} - \frac{11}{18}$.

Lösung:

$$\frac{7}{12} - \frac{11}{18} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 3 - 11 \cdot 2}{36} = \frac{21 - 22}{36} = -\frac{1}{36}$$

Beispiel: Multiplikation von Brüchen

Zu berechnen ist $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}$.

Lösung: $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 3} = \frac{24}{12} = 2$

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad b, d \neq 0$$

Brüche werden multipliziert, indem man ihre Zähler multipliziert und ihre Nenner multipliziert.

Wird der Bruch $\frac{3}{4}$ durch den Bruch $\frac{6}{8}$ dividiert, wird der Operator durch einen Hauptbruchstrich ersetzt und mit $\frac{8}{6}$ erweitert.

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{8} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{8}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6}}{\frac{6}{8} \cdot \frac{8}{6}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6}}{\frac{48}{48}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6}}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6}$$

Aus der Division mit $\frac{6}{8}$ wird eine Multiplikation mit $\frac{8}{6}$.

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{2}{2} = 1$$

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad b, d \neq 0$$

Beispiel: Multiplikation von Brüchen

Zu berechnen ist $\frac{13}{17} : \frac{26}{51}$.

Lösung: $\frac{13}{17} : \frac{26}{51} = \frac{13 \cdot 51}{17 \cdot 26} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Festigen Sie Ihr Wissen!

1. Zu welcher kleinstmöglichen Menge gehören folgende Zahlen?
a) 4 b) -3 c) 1,5 d) $\sqrt{7}$
e) π f) 14,3 g) $2 + 3i$

2. Welche Zahlen sind den Zahlenmengen in **Bild 1** falsch zugeordnet?

3. Welche Aussagen sind falsch?
a) $\sqrt{13} \in \mathbb{R}$ b) $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$ c) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ d) $0,3 \in \mathbb{N}$

4. In **Bild 2** sind die Punkte A, B, C und D eingetragen.
a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und D an.
b) In welchen Quadranten befinden sich die Punkte B und D?
c) Welcher Punkt wird im Koordinatensystem als Ursprung bezeichnet?
d) In welchen Quadranten wird der Punkt $P(-2|-2)$ eingetragen?

5. Intervalle können in Klammerschreibweise oder als Ungleichung angegeben werden.
a) Geben Sie das Intervall $]3; 9]$ als Ungleichung an.
b) Gehören die Zahlen 3 und 9 zum Intervall $]3; 9]$?
c) Ist die Zahl 4,5 Element des Intervalls $]3; 9]$, wenn die Zahlen Elemente von $\mathbb{Q}$ sind?
d) Das Intervall $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 5\}$ ist in der Klammerschreibweise anzugeben.

6. Für folgende Gleichungen ist die Lösung für $x \in \mathbb{R}$ anzugeben.
a) $2x - 4 = 16 - 3x$ b) $14 - 0,5x = -7,5x$
c) $\frac{2}{5}x = 8$ d) $-4 + 2x = 4 + 2x$

7. Die Definitionsmenge folgender Terme ist anzugeben.
a) $T(x) = 2x + 4$ b) $T(x) = \frac{2}{2x + 4}$
c) $T(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$ d) $T(x) = \sqrt{10 - 2x}$

8. Die Lösungsmenge folgender Gleichungen ist anzugeben.
a) $2x + 4 = 16$ b) $0,5x + 4 = 12 - 1,5x$
c) $12 - x \geq 0$ d) $12 - x \geq 6 + 2x$

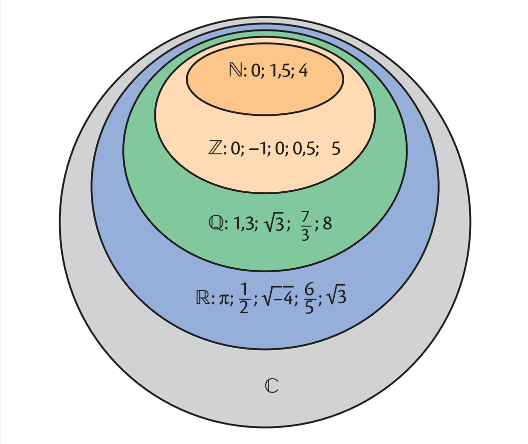


Bild 1: Zahlenmengen

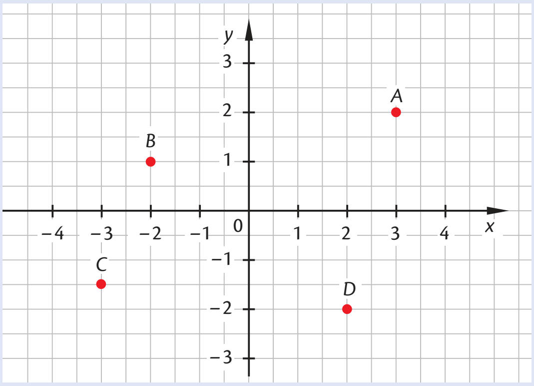


Bild 2: Punkte im Koordinatensystem

9. Folgende Terme sind mithilfe der Binomischen Formeln zu ersetzen.
a) $(2x - 4) \cdot (2x + 4)$ b) $(3 - a) \cdot (3 - a)$
c) $(x + 4) \cdot (-x + y)$ d) $(\sqrt{2a} + x)^2$

10. Folgende Terme sind als Produkte anzugeben.
a) $1 - a^2$ b) $25a^2 - 49$
c) $4x^2 + 12x + 9$ d) $a^2 - 4ab + 4b^2$

11. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.
a) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9} + \frac{7}{12}$ b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{6} - \frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ d) $4ab : \frac{1}{2}a$
e) $\frac{2x}{5a - 3} - \frac{2}{5a + 3} + \frac{10a - 6}{25a^2 - 9}$
f) $\frac{2}{a - 1} + \frac{4}{a - 2} + \frac{4a}{2a^2 - 6a + 4}$

Lösungen: 1. a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Q}$ g) $\mathbb{C}$ **2.** $\mathbb{N}$: 1,5; $\mathbb{Z}$: 0,5; $\mathbb{Q}$: $\sqrt{3}$; $\mathbb{R}$: $\sqrt{-4}$ **3.** b) und d) **4.** a) $A(3|2)$, $B(-2|1)$, $C(-3|-1,5)$, $D(2|-2)$ b) B: II. Quadrant, D: IV. Quadrant c) $O(0|0)$ d) III. Quadrant **5.** a) $]3; 9] = \{x | 3 < x \leq 9\}$ b) 3 nicht c) ja d) $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 5\} = [0; 5[$ **6.** a) $x = 4$ b) $x = -2$ c) $x = 20$ d) keine Lösung **7.** a) $D = \mathbb{R}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ c) $D = \mathbb{R}$ d) $D = \{x | x \leq 5\}$ **8.** a) $L = \{6\}$ b) $L = \{4\}$ c) $L = \{x | x \leq 12\}$ d) $L = \{x | x \leq 2\}$ **9.** a) $4x^2 - 16$ b) $a^2 - 6a + 9$ c) $-x^2 + xy - 4x + 4y$ d) $x^2 + 2x\sqrt{a} + 2a$ **10.** a) $(1 + a) \cdot (1 - a)$ b) $(5a + 7) \cdot (5a - 7)$ c) $(2x + 3) \cdot (2x + 3)$ d) $(a - 2b) \cdot (a - 2b)$ **11.** a) $\frac{79}{36}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$ d) $8b$ e) $\frac{10ax + 6x}{25a^2 - 9}$ f) $\frac{16a - 16}{2a^2 - 6a + 4}$

Potenzrechnen

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis *a* (Grundzahl) und dem Exponenten *n* (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist der Potenzwert *b*.

Beispiel: Potenzschreibweise

Gegeben ist das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Es ist

a) als Potenz zu schreiben und

b) dessen Potenzwert anzugeben.

Lösung:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ b) $2^5 = 32$

Addition und Subtraktion von Potenzen

Gleiche Potenzen oder ihr Vielfaches lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen (**Tabelle 1**).

Beispiel: Addition und Subtraktion

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

Lösung: $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3 = 6x^3 + 2y^2$

Multiplikation von Potenzen

Potenzen gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Produkte ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel: Multiplikation

Das Produkt $2^3 \cdot 2^2$ ist zu berechnen und der Potenzwert anzugeben.

Lösung:

$2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ oder $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder in dem man den Nennerexponent vom Zählerexponent subtrahiert.

Beispiel: Division

Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung: $\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

oder $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = a^n \qquad a^n = b \qquad a^0 = 1$$

a Basis, $a > 0$ *n* Exponent *b* Potenzwert

Tabelle 1: Potenzgesetze

Regel, Definition	Potenzterm
Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n = (r \pm s) \cdot a^n$
Multiplikation bei gleicher Basis Potenzen werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Multiplikation bei gleichem Exponenten Potenzen werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division bei gleicher Basis Potenzen werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Division bei gleichem Exponenten Potenzen werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man ihre Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel: Potenzieren von Potenzen

Der Potenzterm $(2^2)^3$ ist zu berechnen.

Lösung: $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 64$

oder $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a Basis, $a > 0$ $\quad$ n Exponent

Merke: $(-2)^2 = 4$ aber $-2^2 = -4$

Beispiel: Exponentenschreibweise

Die Potenzterme a) 2^{-3} und b) 10^{-3} sind mit positivem Exponenten zu schreiben und der Potenzwert ist anzugeben.

Lösung:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ $\quad$ b) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Beispiel: Physikslische Benennungen

Folgende physikalischen Benennungen sind mit umgekehrtem Exponenten zu schreiben.

a) $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ $\quad$ b) $\mathrm{U} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ $\quad$ c) $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Lösung:

a) $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ $\quad$ b) $\mathrm{U} \cdot \mathrm{min}^{-1} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$ $\quad$ c) $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

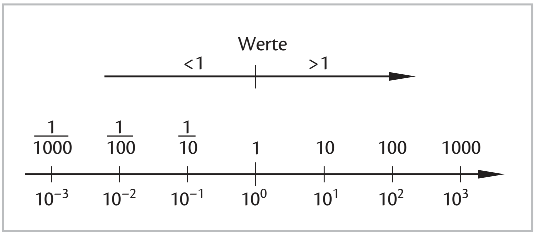


Bild 1: Zehnerpotenzen

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder große Zahlen verwendet. Werte größer als 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner als 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (**Bild 1** und **Tabelle 1**).

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten	
1 000 000 000	10^9	G	(Giga)
1 000 000	10^6	M	(Mega)
1 000	10^3	k	(Kilo)
100	10^2	h	(Hekto)
10	10^1	da	(Deka)
1	10^0	–	
0,1	10^{-1}	d	(Dezi)
0,01	10^{-2}	c	(Centi)
0,001	10^{-3}	m	(Milli)
0,000 001	10^{-6}	µ	(Mikro)
0,000 000 001	10^{-9}	n	(Nano)

Beispiel: Zehnerpotenzen

Folgende Benennungen sind als Zehnerpotenzen zu schreiben.

a) 20 µH $\quad$ b) 10 ml $\quad$ c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6}$ H $\quad$ b) $10 \cdot 10^{-3}$ l $\quad$ c) $3 \cdot 10^3$ Hz

Potenzgesetze in Anwendung

Beispiel: Flächen und Volumenberechnung

a) Die Fläche des Quadrates mit $a = 2$ m (**Bild 2**) und
b) das Volumen des Würfels für $a = 2$ m ist zu berechnen.

Lösung:

a) $A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$

$A = 2\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 2 \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{m} = 2^2\,\mathrm{m}^2 = 4\,\mathrm{m}^2$

b) $V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = a^3$

$= 2\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 2 \cdot 2 \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}$

$= 2^3\,\mathrm{m}^3 = 8\,\mathrm{m}^3$

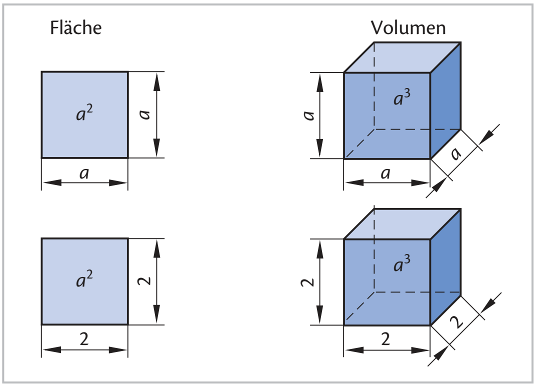


Bild 2: Fläche und Volumen

Wurzelrechnen

Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (lat. Radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden und dem Wurzelexponent. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$. Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden, z. B. $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$. Deshalb gelten bei Wurzeln auch die Potenzgesetze.

Beispiel: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Gegeben ist $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$. Gesucht sind a) die Potenzschreibweise der Wurzel und b) der Wurzelwert.

Lösung:

a) $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = 4^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$, denn $2 \cdot 2 = 4$.

Addition und Subtraktion bei Wurzeln

Wurzeln, die im Wurzelexponent und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert werden (**Tabelle 1**).

Beispiel: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Der Term $3\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{7} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{7}$ ist zusammenzufassen.

Lösung:

$3\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{7} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{7}$

$= (3 + 2) \cdot \sqrt{3} + (4 - 2) \cdot \sqrt[3]{7} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt[3]{7}$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel aus dem Zähler und dem Nenner gezogen werden (**Tabelle 1**).

Beispiel: Multiplikation und Division von Wurzeln

Aus den Wurzeln a) $\sqrt{9 \cdot a^2}$ und b) $\sqrt{\frac{a^2}{16}}$ sind die Wurzelwerte zu berechnen.

Lösungen:

a) $\sqrt{9 \cdot a^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} = 3 \cdot a$ b) $\sqrt{\frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{16}} = \frac{a}{4}$

$b = \sqrt{a}$	$\sqrt{a} = \lvert a \rvert$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
a Basis, $a > 0$	b Wurzelwert	n Wurzelexponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze

Regel, Definition	Termausdruck
Addition und Subtraktion Wurzeln können addiert werden, wenn sie denselben Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall gerader Exponent: $\sqrt[4]{(-5)^4} = \lvert -5 \rvert = 5$

2. Fall ungerader Exponent: $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

Das Ergebnis der Quadratwurzel ist immer **positiv**!

Beispiel: Zwei Lösungen

Zu zeigen ist, wie beim Wurzelterm $\sqrt[2]{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

Fall 1: Für $a = 2$ gilt: $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

Fall 2: Für $a = -2$ gilt: $\sqrt{(-2)^2} = \lvert -2 \rvert = 2$

Festigen Sie Ihr Wissen!

1. Folgende Ausdrücke sind zu berechnen.

a) $(-5)^{-1}$ b) -5^{-1} c) $(-5)^0$ d) -5^0

e) $(-5)^1$ f) -5^1 g) $(-5)^2$ h) -5^2

2. Vereinfachen Sie die Potenzterme

a) $\frac{8^3}{8^2}$ b) $\frac{8^{3x}}{8^{2x}}$ c) $\frac{8^{ax}}{8^{-ax}}$ d) $\frac{8^n}{8^m}$

e) $\frac{a^{2b}}{a^{3b}}$ f) $\frac{a^{2+n}}{a^2}$ g) $\frac{a^{x-2}}{a^{x+2}}$ h) $\frac{a^{-b+1}}{a^{-2b-1}}$

i) $\left(-\frac{1}{u}\right)^{-2} \cdot u^{v-2}$ j) $\frac{(-x)^{-2}}{x^{-3}}$ k) $\frac{y \cdot (y^m + z^m) \cdot y^2}{y^{m+1} + z^m \cdot y}$

3. Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen mit nur positiven Exponenten.

a) $2 \cdot 10^{-2}$ b) min^{-1} c) $\frac{a^{-2} \cdot b \cdot c^2}{(a+b)^{-1}}$ d) $5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

4. Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen mit negativen Exponenten.

a) $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ b) $\frac{1}{10^3}$ c) $\frac{1}{\mathrm{m}}$ d) $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

5. Geben Sie die Zahlen in Zehnerpotenzen an.

a) Rauminhalt der Erde:
1083 000 000 000 000 000 000 m^3

b) Oberfläche der Erde: 510 000 000 000 000 m^2

c) Entfernung Erde – Sonne: 149 500 000 000 m

6. Folgende Terme sind zu vereinfachen.

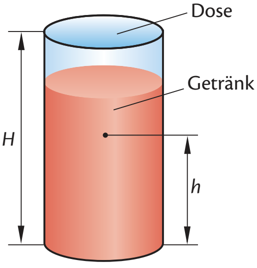
a) $\frac{(a+b)^0}{2^{-1}}$ b) $\frac{x \cdot x^{-2}}{(n^2 \cdot x)^{-1}}$ c) $\frac{x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot y^3}{y^{n+2} \cdot x^{m+2}}$

d) $\frac{n^{-2+x}}{n^{x-1}}$ e) $(n^{-2})^{-1} \cdot n^{a-2}$ f) $\frac{(n^{-4} \cdot m^{-2})^{-3}}{(n^{-2} \cdot m^{-3})^5}$

7. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme an und schreiben Sie die Wurzelterme als Potenz.

a) $T(x) = \sqrt{2x + 100}$ b) $T(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 100}}$

c) $T(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ d) $T(x) = \sqrt{(10 - 2x)^2}$



$$h = \frac{m \cdot H}{M - m}\sqrt{\frac{M}{m}} - \frac{m \cdot H}{M - m}$$

h Höhe des Schwerpunkts über dem Boden

M Masse der Dose mit Inhalt

m Masse der Dose

H Höhe der Dose

Bild 1: Schwerpunkt in Abhängigkeit des Inhalts

8. Vereinfachen Sie die Terme

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{9 + 3}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{\frac{3 \cdot 8}{2}}}{\sqrt{3}}$ e) $\left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2$ f) $(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})$

g) $\sqrt[3]{(4 - \sqrt{8}) \cdot (4 + \sqrt{8})}$ h) $\sqrt[3]{\frac{a^{-3b}}{a^{-9b}}}$

i) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x + y}}$ j) $\frac{(2x + 2y)^2}{(x + y) \cdot \sqrt{x + y}}$ k) $\frac{(a + b)}{(a - b)^{-1}}$

9. Der Abstand des Schwerpunkts vom Boden einer mit Flüssigkeit gefüllten Dose lässt sich mit der Formel

$$h = \frac{m \cdot H}{M - m} \cdot \sqrt{\frac{M}{m}} - \frac{m \cdot H}{M - m}$$

beschreiben (**Bild 1**). Geben Sie die Definitionsmenge an und stellen Sie die Formel nach *H* um.

10. Vereinfachen Sie die Wurzeln unter Verwendung der Potenzschreibweise.

a) $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{a + 1}}$ b) $\frac{\sqrt{25a^2 - 49}}{\sqrt{5a - 7}}$

c) $\frac{\sqrt{4x^2 + 12x + 9}}{2x + 3}$ d) $\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{2b - a}$

e) $\sqrt[n+m]{(x^2)^{3n + 3m}}$ f) $\sqrt[an]{3^{n \cdot (a + b)}}$

Lösungen: 1. a) $-\frac{1}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) 1 d) -1 e) -5 f) -5 g) 25 h) -25 **2.** a) 8 b) 8^x c) 8^{2ax} d) 8^{n-m} e) a^{-b} f) a^n g) a^{-4} h) a^{b+2} i) u^v j) x k) y^2 **3.** a) $\frac{2}{10^2}$ b) $\frac{1}{\mathrm{min}}$ c) $\frac{(a+b)bc^2}{a^2}$ d) $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **4.** a) $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ b) 10^{-3} c) m^{-1} d) Vm^{-1} **5.** a) $1{,}083 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}^3$ b) $5{,}1 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2$ c) $1{,}495 \cdot 10^{11}$ m **6.** a) 2 b) n^2 c) $\frac{1}{x^3}$ d) $\frac{1}{n}$ e) n^a f) $n^{22} \cdot m^{21}$ **7.** a) $x \geq -50$; $(2x + 100)^{\frac{1}{2}}$ b) $x > -50$; $(2x + 100)^{-\frac{1}{2}}$ c) $D = \mathbb{R}$; $(x^2 + 1)^{-1}$ d) $D = \mathbb{R}$; $10 - 2x$ **8.** a) 2 b) 2 c) 2 d) 2 e) 12 f) 6 g) 2 h) a^{2b} i) $\sqrt{x - y}$ j) $4\sqrt{x + y}$ k) $a^2 - b^2$ **9.** a) $D = \{m | m \neq M \land m \neq 0\}$; $H = \frac{(M - m) \cdot h}{\sqrt{\frac{M}{m}} - 1 \cdot m}$ **10.** a) $(1 - a)^{\frac{1}{2}}$ b) $(5a + 7)^{\frac{1}{2}}$ c) 1 d) -1 e) x^6 f) $3^{1 + ba^{-1}}$

G4 Flächenberechnungen

Quadrat und Rechteck

Der Flächeninhalt A beim Quadrat und Rechteck, errechnet sich aus dem Produkt von Länge l und Breite b (**Bild 1** und **Tabelle 1**).

Parallelogramm

Ein Parallelogramm ergibt durch Scherung in ein flächengleiches Rechteck (**Bild 2**). Die Fläche ergibt sich als Produkt von Grundlinie g und Höhe h.

Dreieck

Verschiebt man im Parallelogramm aus **Bild 2** den Punkt C auf den Punkt D, ergibt es ein Dreieck. Der Flächeninhalt ist halb so groß wie die Fläche des Parallelogramms und somit gleich dem halben Produkt aus Grundlinie g und Höhe h.

Trapez

Werden am Trapez flächengleiche Umformungen vorgenommen, so entsteht ein Rechteck mit der Länge m, die als Mittelparallele bezeichnet wird (**Bild 3**). Um m zu berechnen, wird die Summe der beiden Grundseiten halbiert. Die Fläche des Trapezes ist das Produkt aus Mittelparallele m und Höhe h.

Beispiel: Trapez

Ein Trapez hat eine Fläche A = 100 cm², eine Höhe h = 50 mm und eine Seitenlänge a = 80 mm.
Welche Länge hat die Seite c?

Lösung:

$A = m \cdot h = 100\ \text{cm}^2;\ m = \frac{A}{h} = \frac{100\ \text{cm}^2}{5\ \text{cm}} = 20\ \text{cm}$

$m = \frac{1}{2} \cdot (a + c) = 20\ \text{cm} \;\Rightarrow\; c = 40\ \text{cm} - 8\ \text{cm} = 32\ \text{cm}$

Beispiel: Bleche

Der Flächeninhalt A der Bleche 1 und 2 sind zu berechnen (**Bild 4**).

Lösung:

Blech 1: $A = A_1 + A_2 = A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Trapez}}$

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 190\ \text{mm} \cdot 100\ \text{mm} = 9500\ \text{mm}^2$

$A_2 = m \cdot h = \frac{(a + c)}{2} \cdot h = \frac{(100 + 70)\ \text{mm}}{2} \cdot 80\ \text{mm}$

$= 6800\ \text{mm}^2$

$A = A_1 + A_2 = 16\,300\ \text{mm}^2 = 163\ \text{cm}^2$

Blech 2: $A = A_1 + 2 \cdot A_2 = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\text{Trapez}}$

$A_1 = l \cdot b = 210\ \text{mm} \cdot 95\ \text{mm} = 19\,950\ \text{mm}^2$

$A_2 = m \cdot h = \frac{(a + c)}{2} \cdot h = \frac{(210 + 130)\ \text{mm}}{2} \cdot 255\ \text{mm}$

$= 43\,350\ \text{mm}^2$

$A = 19\,950\ \text{mm}^2 + 2 \cdot 43\,350\ \text{mm}^2 = 106\,650\ \text{mm}^2$

Tabelle 1: Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen

Flächenform	Formel
Quadrat	$A = a \cdot a = a^2$
Rechteck	$A = l \cdot b$
Parallelogramm	$A = g \cdot h$
Dreieck	$A = \frac{g \cdot h}{2}$
Trapez	$A = \frac{(a + c)}{2} \cdot h = m \cdot h$

A Flächeninhalt, a Seite, l Länge, b Breite, g Grundlinie, h Höhe, c parallele Seiten zu a am Trapez, m Mittelparallele

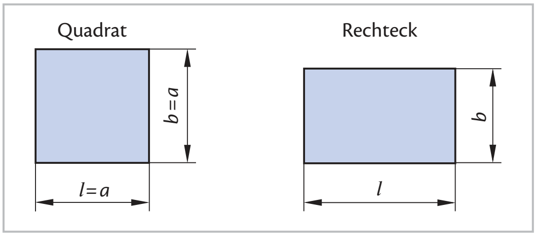


Bild 1: Quadrat und Rechteck

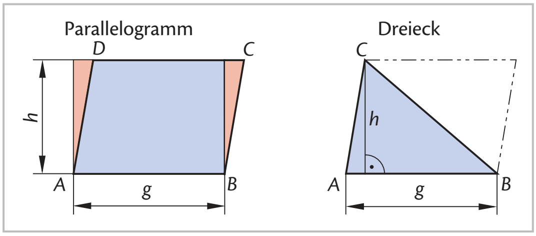


Bild 2: Quadrat und Rechteck

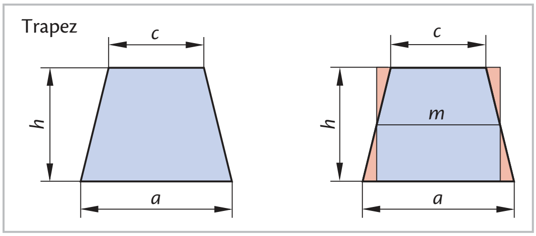


Bild 3: Trapez

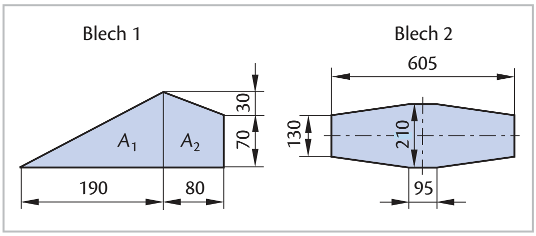


Bild 4: Bleche

Kreis

Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt M der Ebene einen konstanten Abstand r haben (**Bild 1**). Die Kreisfläche A ist das Produkt aus der Zahl π und dem Quadrat des Radius r.

Kreisring

Die zwei von konzentrischen Kreisen begrenzte Figur heißt Kreisring (**Bild 1**). Die Kreisringfläche A errechnet sich aus der Differenz zwischen äußerer Kreisfläche und innerer Kreisfläche.

Beispiel: Kreisring

Die Kreisringfläche A mit Außenradius R = 60 mm und Innenradius r = 40 mm ist zu berechnen.

Lösung:

$A_{\text{außen}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (60\text{ mm})^2 = 11\,309{,}7\text{ mm}^2$

$A_{\text{innen}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (40\text{ mm})^2 = 5026{,}5\text{ mm}^2$

$A = A_{\text{außen}} - A_{\text{innen}} = 6283{,}2\text{ mm}^2$

Kreisausschnitt

Der Kreisausschnitt (**Bild 2**) wird auch als Kreissektor bezeichnet. Die Fläche A des Kreisausschnitts verhält sich zur Fläche A eines Kreises wie der Zentriwinkel α zur Winkelsumme 360° im Kreis.

$$A_{\text{Ausschnitt}} : A_{\text{Kreis}} = \alpha : 360°$$

Kreisabschnitt

Der Kreisabschnitt (**Bild 2**) wird auch als Kreissegment bezeichnet. Die Fläche A eines Kreisabschnitts ergibt sich aus der Differenz des Kreisausschnittes und des durch die Sehne und dem Radius gebildetem Rechteck.

$$A_{\text{Abschnitt}} = A_{\text{Ausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}}$$

Beispiel: Abdeckblech

Der Blechbedarf für die Abdeckung aus **Bild 3** ist zu berechnen.

Lösung:

$A = A_{\text{Ausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{s \cdot (r-h)}{2}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 48{,}49° \Rightarrow \alpha = 97{,}18°$

$A = \pi \cdot (40\text{ mm})^2 \cdot \frac{97{,}18°}{360°} - \frac{60\text{ mm} \cdot (40\text{ mm} - 15\text{ mm})}{2}$

$A = 1356{,}9\text{ mm}^2 - 750\text{ mm}^2 = 606{,}9\text{ mm}^2$

Tabelle 1: Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen

Flächenform	Formel
Kreis	$A = \pi \cdot r^2$; $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$
Kreisring	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$; $A = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$
Kreisausschnitt	$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$; $A = \frac{b \cdot r}{2}$
Kreisabschnitt	$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{s \cdot (r-h)}{2}$ $A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2}$

A Flächeninhalt, b Bogenlänge, h Höhe
R, r Radius, s Sehnenlänge, α Winkel
D, d Durchmesser

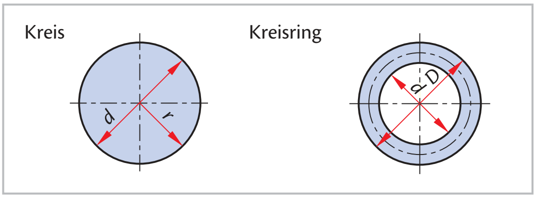


Bild 1: Kreis und Kreisring

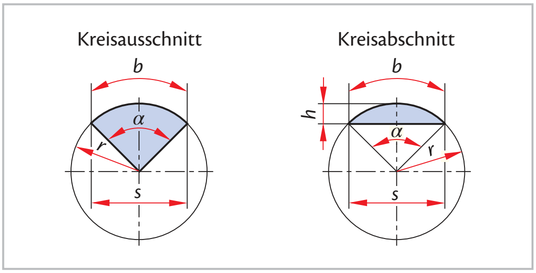


Bild 2: Kreisausschnitt und Kreisabschnitt

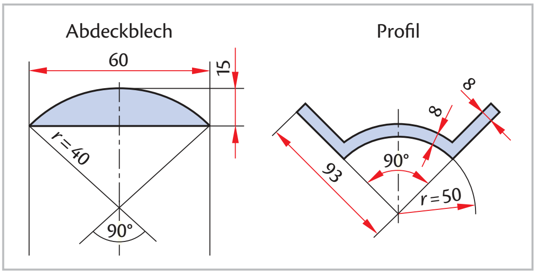


Bild 3: Abdeckblech und Profil

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die Fläche A eines Kreisausschnitts für α = 60° und r = 50 mm.
2. Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Profils aus **Bild 3**.

Lösungen: 1. A = 1309 mm² **2.** A = 1238,58 mm²