



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Chemieberufe

Technische Mathematik für Chemieberufe

Grundlagen

Eckhard Ignatowitz, Henrik Althaus, Holger Rapp

7. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr. 71314

Autoren:

Dr. Henrik Althaus, OStR	Stade
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR a.D.	Waldbronn
Dipl.-Ing., Dipl.-Wirt.-Ing. Holger Rapp	Waldbronn
Autoren bis zur 5. Auflage	
Gew.-Lehrer Gerhard Fastert, OStR †	Stade
Dr. Klaus Brink, a.D. OStR †	Leverkusen

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:

Dr. Eckhard Ignatowitz

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

7. Auflage 2022

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-8085-8400-2

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2022 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Ertstadt

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald

Umschlagbild: ©Michael-stock.adobe.com

Druck: Nikolaus Bastian Druck und Verlag GmbH, 54343 Föhren

Vorwort

Das Buch **TECHNISCHE MATHEMATIK FÜR CHEMIEBERUFE** ist ein Lehr-, Lern- und Übungsbuch für die schulische und betriebliche Ausbildung im Unterrichtsfach Technische Mathematik.

Es ist besonders für die Ausbildung in den Produktionsberufen der chemischen Industrie geeignet: zum Chemikant und zur Produktionsfachkraft Chemie.

Darüber hinaus kann es für die Ausbildung zur Fachkraft für Wasserversorgungstechnik bzw. Abwassertechnik, für Papiermacher, für Textilreiniger und Färberei-Textilveredler sowie verschiedene Laborberufe verwendet werden.

Hilfreich kann es auch an Berufsfachschulen, Fachoberschulen, Meister-Fachschulen, Chemotechniker-Fachschulen und bei Weiterbildungskursen in der chemischen Industrie eingesetzt werden.

Zudem bietet es eine fachmathematische Einführung für ein Chemie- bzw. Chemie-Ingenieurstudium.

Das Buch vermittelt neben mathematischen Grundkenntnissen vor allem berufsbezogene fachmathematische Kenntnisse aus den Bereichen allgemeine Chemie und analytische Chemie, technikorientierte Sachgebiete aus der Chemie, Physik sowie Messtechnik.

Die Stoffauswahl basiert auf dem Rahmenlehrplan der Kultusministerkonferenz sowie den Lehrplänen der Bundesländer des Ausbildungsberufes Chemikant. Darüber hinaus wurden Ergänzungen für die anderen Berufe und Schularten aus dem Berufsfeld Chemie aufgenommen.

Die Kapitel des Buches lauten:

1	Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen	7	Analytische Bestimmungen
2	Auswertung von Messwerten und Prozessdaten	8	Berechnungen zur Elektrizitätslehre
3	Ausgewählte physikalische Berechnungen	9	Berechnungen zur Wärmelehre
4	Stöchiometrische Berechnungen	10	Bestimmung von Produkteigenschaften
5	Rechnen mit Gehaltsgrößen von Mischungen	11	Qualitätssicherung
6	Berechnungen zum Verlauf chemischer Reaktionen		

Die Lerninhalte sind nach einem einheitlichen methodischen Grundkonzept dargeboten:

Nach einer kurzen Einführung in die theoretischen Sachverhalte werden die zur Berechnung erforderlichen Größengleichungen abgeleitet oder gegeben und die Einheiten der physikalischen Größen erläutert.

Darauf folgt die ausführliche Darstellung des Rechengangs an ein oder zwei typischen Aufgabenbeispielen. Zum eigenständigen Üben steht eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben zum gerade dargebotenen Lerninhalt zur Verfügung.

Am Ende jedes Großkapitels folgt eine Zusammenstellung von gemischten Aufgaben, die zur Leistungskontrolle oder zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden können.

Beim chemischen Rechnen wird als Lösungsmethode überwiegend das Rechnen mit Größengleichungen eingesetzt. Aber auch das Schlussrechnen wird eingeführt und in dafür typischen Aufgabenbeispielen durchgerechnet.

Das Buch ist durchgängig auf die Verwendung von Taschenrechner und PC konzipiert. Dabei werden das Runden und das Rechnen mit den signifikanten Ziffern eingeführt und im ganzen Buch konsequent berücksichtigt. Auch die Prozessdatenauswertung und die grafische Darstellung mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel wird an berufstypischen Beispielen geübt.

Das Buch hat ein ausführliches Sachwortverzeichnis mit der englischen Übersetzung der Fachausdrücke. Es kann als **Sachwort-Lexikon** genutzt werden.

In der vorliegenden **7. Auflage** des Buches wurden eine Reihe von Verbesserungen durchgeführt:

- Das Layout wurde nochmals verbessert, um die schnelle Erfassung der Inhalte zu erleichtern.
- Im ganzen Buch wurden die Aufgaben noch stärker an den berufsspezifischen Inhalten ausgerichtet.
- Satzfehler wurden korrigiert.

Zum Buch **TECHNISCHE MATHEMATIK FÜR CHEMIEBERUFE** gibt es ein **Lösungsbuch**, EUROPA-Nr. 71411, in dem für alle Aufgaben ein Lösungsvorschlag mit Ergebnis durchgerechnet ist.

Die Autoren und der Verlag freuen sich über kritisch-konstruktive Hinweise und Verbesserungsvorschläge zum Buch. Bitte richten Sie Ihre Zuschrift per e-mail an: Lektorat@europa-lehrmittel.de

Die Autoren

Sommer 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen	8	2.3.3	Standardabweichung	42
1.1	Zahlenarten	8	2.3.4	Gauß'sche Normalverteilung	43
1.2	Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln	9	2.3.5	Auswertung mit dem Taschenrechner und Computer	43
1.3	Grundrechnungsarten	10	2.4	Darstellung von Messergebnissen	45
1.3.1	Addieren und Subtrahieren	10	2.4.1	Messwerte in Wertetabellen	45
1.3.2	Multiplizieren	11	2.4.2	Grafische Darstellung von Messwerten ..	46
1.3.3	Dividieren	12	2.4.3	Arbeiten mit Diagrammen in der Chemietechnik	48
1.4	Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke	13	2.4.4	Funktionsgraphen	50
1.5	Bruchrechnen	14	2.4.5	Linearisieren einer Kurve	52
1.5.1	Addieren und Subtrahieren von Brüchen	14	2.4.6	Verwendung grafischer Papiere	53
1.5.2	Multiplizieren und Dividieren von Brüchen	15	2.5	Versuchs- und Prozessdatenauswertung mit dem Computer	55
1.6	Rechnen mit Potenzen	16	2.5.1	Das Tabellenkalkulationsprogramm Excel	55
1.7	Rechnen mit Wurzeln	18	2.5.2	Auswertung von Messreihen mit Excel ..	57
1.8	Rechnen mit Logarithmen	20	2.5.3	Diagramme zeichnen mit Excel	60
1.8.1	Definition des Logarithmus	20	2.5.4	Regressionsanalyse mit Excel	64
1.8.2	Berechnen dekadischer Logarithmen	21	Gemischte Aufgaben zu Kapitel 2	66	
1.8.3	Berechnen natürlicher Logarithmen	21			
1.8.4	Logarithmengesetze	22	3	Ausgewählte physikalische Berechnungen	69
1.8.5	Logarithmieren bei der pH-Wert-Berechnung	22	3.1	Größen, Zeichen, Einheiten, Umrechnungen	69
1.9	Lösen von Gleichungen	23	3.2	Berechnung von Längen, Flächen, Oberflächen und Volumina	74
1.9.1	Lösen von Bestimmungsgleichungen ..	23	3.2.1	Längenberechnung	74
1.9.2	Lösen von Größengleichungen	24	3.2.2	Umfangs- und Flächenberechnung	75
1.10	Rechnen mit Winkeln und Winkelfunktionen	25	3.2.3	Oberflächen- und Volumenberechnung ..	76
1.11	Berechnungen mit dem Dreisatz	26	3.3	Berechnung von Masse, Volumen und Dichte	78
1.12	Berechnungen mit Proportionen	27	3.4	Bewegungsvorgänge	82
1.13	Berechnungen mit Anteilen	28	3.5	Strömende Medien in Rohrleitungen	85
	Gemischte Aufgaben zu Kapitel 1	29	3.6	Kräfte	87
			3.7	Arbeit	90
2	Auswertung von Messwerten und Prozessdaten	32	3.8	Leistung	92
2.1	Messtechnik in der Chemieanlage	32	3.9	Energie	93
2.1.1	Grundbegriffe der Messtechnik	32	3.10	Wirkungsgrad	94
2.1.2	Unsicherheit von Messwerten	33	3.11	Druck und Druckarten	96
2.1.3	Messgenauigkeit im Labor und Chemiebetrieb	34	3.12	Druck in Flüssigkeiten	97
2.2	Rechnen mit Messwerten	38	3.13	Auftriebskraft	99
2.2.1	Signifikante Ziffern	38	3.14	Druck in Gasen, Gasgesetze	101
2.2.2	Runden	38	3.15	Sättigungsdampfdruck, Partialdruck	103
2.2.3	Rechnen mit Messwerten ohne angegebene Unsicherheit	39	3.16	Luftfeuchtigkeit	104
2.2.4	Rechnen mit Messwerten mit angegebener Unsicherheit	40	Gemischte Aufgaben zu Kapitel 3	106	
2.3	Auswertung von Messwertreihen	41			
2.3.1	Statistische Kennwerte	41			
2.3.2	Absoluter und relativer Fehler	41			

4	Stöchiometrische Berechnungen	108	5.1.2	Volumenanteil φ	153
4.1	Grundgesetze der Chemie	108	5.1.3	Stoffmengenanteil χ	154
4.2	Aufbau der chemischen Elemente	108	5.1.4	Umrechnen der verschiedenen Anteile ..	155
4.3	Symbole und Ziffern in chemischen Formeln	110	5.1.5	Massenkonzentration β	157
4.4	Quantitäten von Stoffportionen	111	5.1.6	Volumenkonzentration σ	158
4.4.1	Stoffmenge	111	5.1.7	Stoffmengenkonzentration c und Äquivalentkonzentration $c(1/z \cdot X)$	159
4.4.2	Molare Masse	112	5.1.8	Umrechnen der verschiedenen Konzentrationen	160
4.4.3	Atomare Masseneinheit	113	5.1.9	Löslichkeit L^*	161
4.5	Zusammensetzung von Verbindungen und Elementen	114		Gemischte Aufgaben zu Gehaltsgrößen ..	163
4.5.1	Massenanteile von Bestandteilen in Verbindungen	114	5.2	Umrechnen von Anteilen in Konzentrationen und Löslichkeiten	164
4.5.2	Masse der Bestandteile in Portionen von Verbindungen	114	5.2.1	Umrechnung von Massenanteil $w(X)$ und Stoffmengenkonzentration $c(X)$	164
4.5.3	Zusammensetzung von Isotopengemischen	115	5.2.2	Umrechnung von Massenanteil $w(X)$ und Massenkonzentration $\beta(X)$	165
4.6	Empirische Formel, Molekülformel (Teilchenformel)	116	5.2.3	Umrechnung von Massenanteil $w(X)$ und Volumenkonzentration $\sigma(X)$	165
4.6.1	Berechnung der empirischen Formel einer Verbindung	117	5.2.4	Umrechnung von Massenanteil $w(X)$ und Löslichkeit $L^*(X)$	166
4.6.2	Berechnung der Molekülformel einer Verbindung	118	5.3	Gehaltsgrößen beim Mischen, Verdünnen und Konzentrieren von Lösungen	169
4.6.3	Ermittlung der Molekülformel mit der Elementaranalyse	119	5.3.1	Mischen von Lösungen	169
4.7	Berechnungen mit Gasportionen	120	5.3.2	Verdünnen von Lösungen	171
4.7.1	Gase bei Normbedingungen	120	5.3.3	Volumenberechnung beim Mischen von Lösungen	172
4.7.2	Gasportionen bei beliebigen Drücken und Temperaturen	122	5.3.4	Konzentrieren von Lösungen	173
4.7.3	Bestimmung der molaren Masse aus der allgemeinen Gasgleichung	124		Gemischte Aufgaben zu Kapitel 5	174
4.7.4	Dichte einer Gasportion	125			
4.8	Rechnen mit Reaktionsgleichungen	126	6	Berechnungen zum Verlauf chemischer Reaktionen	176
4.8.1	Aufbau von Reaktionsgleichungen	126	6.1	Reaktionsgeschwindigkeit	176
4.8.2	Aufstellen von Reaktionsgleichungen ..	128	6.2	Beeinflussung der Reaktionsgeschwindigkeit	179
4.8.3	Oxidationszahlen	131	6.2.1	Einfluss der Konzentration	179
4.8.4	Aufstellen von Redox-Gleichungen	133	6.2.2	Einfluss der Temperatur auf die Reaktionsgeschwindigkeit	181
	Gemischte Aufgaben zum Rechnen mit Reaktionsgleichungen	136	6.2.3	Einfluss von Katalysatoren auf die Reaktionsgeschwindigkeit	183
4.9	Umsatzberechnung bei chemischen Reaktionen	137	6.3	Chemisches Gleichgewicht	184
4.9.1	Umsatzberechnung bei Einsatz reiner Stoffe	137	6.4	Massenwirkungsgesetz	185
4.9.2	Umsatzberechnung bei Einsatz verunreinigter oder gelöster Stoffe	139	6.5	Verschiebung der Gleichgewichtslage ..	187
4.9.3	Umsatzberechnung bei Gasreaktionen ..	142	6.6	Protolysegleichgewichte	191
4.9.4	Umsatzberechnung unter Berücksichtigung der Ausbeute	144	6.6.1	Protolysegleichgewicht des Wassers	192
	Gemischte Aufgaben zur Umsatzberechnung	147	6.6.2	Der pH-Wert	193
			6.6.3	pH-Wert starker Säuren und Basen	194
5	Rechnen mit Gehaltsgrößen von Mischungen	149	6.6.4	pH-Wert schwacher Säuren und Basen ..	195
5.1	Gehaltsgrößen von Mischungen	149	6.7	pH-Wert von Pufferlösungen	198
5.1.1	Massenanteil w	151	6.8	Löslichkeitsgleichgewichte	199
				Gemischte Aufgaben zu Kapitel 6	200

7	Analytische Bestimmungen	201	7.8.2	Säulenchromatografie	246
7.1	Thermogravimetrische Analysen	202	7.8.3	Kenngößen der Chromatografie	248
7.1.1	Feuchtigkeits- und Trockengehaltsbestimmungen von Feststoffen	202	7.8.4	Trennwirkung einer chromatografischen Säule	249
7.1.2	Glührückstandsbestimmungen	203	7.8.5	Auswertung säulenchromatografischer Analysen	250
7.1.3	Bestimmung des Wassergehalts in Mineralölen	204	7.8.5.1	Auswertung eines Chromatogramms mit der 100%–Methode	251
	Gemischte Aufgaben zu 7.1 Thermogravimetrischen Analysen	205	7.8.5.2	Auswertung eines Chromatogramms mit externem Standard	251
7.2	Volumetrische Bestimmungen (Maßanalyse)	206	8	Berechnungen zur Elektrotechnik	255
7.2.1	Durchführung einer Maßanalyse	206	8.1	Grundbegriffe der Elektrotechnik	255
7.2.2	Maßanalyse mit aliquoten Teilen	206	8.2	Elektrischer Widerstand und Leitwert eines Leiters	257
7.2.3	Gehaltsangaben von Maßlösungen	207	8.3	Ohm'sches Gesetz	259
7.2.4	Titer von Maßlösungen	208	8.4	Reihenschaltung von Widerständen	260
7.2.5	Neutralisationstitrationsen	210	8.5	Parallelschaltung von Widerständen	262
7.2.5.1	Direkttitrationsen	210	8.6	Gruppenschaltungen, Netzwerk- Schaltungen	264
7.2.5.2	Rücktitrationsen	213	8.7	Wheatstone'sche Brückenschaltung	266
7.3	Bestimmung von Abwasserkennwerten	215	8.8	Thermische Widerstandsänderung, Widerstandsthermometer	267
7.3.1	Biochemischer Sauerstoffbedarf BSB	215	8.9	Thermospannung, Thermoelement	268
7.3.2	Chemischer Sauerstoffbedarf CSB	219	8.10	Widerstandsänderung eines Leiters durch Dehnung	270
7.4	Bestimmung der Wasserhärte	221	8.11	Elektrische Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad	271
7.4.1	Definition und Berechnung der Wasserhärte	221	8.12	Berechnungen zum Drehstrom	273
7.4.2	Bestimmung der Wasserhärte durch komplexometrische Titration	222	8.12.1	Stern- und Dreieckschaltung	273
7.4.3	Bestimmung der Härtebereiche mit Teststreifen	224	8.12.2	Leistungsschilder elektrischer Geräte (rating plates)	275
7.5	Bestimmung maßanalytischer Kennzahlen von Fetten	225	8.12.3	Elektrische Leistung bei verschiedenen Stromarten	275
7.5.1	Säurezahl SZ	225	8.13	Elektrolytische Stoffabscheidung	277
7.5.2	Verseifungszahl VZ	226	8.13.1	Elektrolytisch abgeschiedene Stoffmasse	277
7.5.3	Esterzahl EZ	227	8.13.2	Elektrolytische Abscheidung von Gasen	278
7.6	Maßanalytische Bestimmungen mit elektrochemischen Methoden	228		Gemischte Aufgaben zu Kapitel 8	280
7.6.1	Potentiometrische Neutralisationstitrationsen	228	9	Berechnungen zur Wärmelehre	282
7.6.2	Leitfähigkeitstitrationsen (Konduktometrie)	230	9.1	Temperaturskalen	282
	Gemischte Aufgaben zu 7.2 bis 7.6 Maßanalytische Bestimmungen	231	9.2	Verhalten der Stoffe bei Erwärmung	283
7.7	Optische Analyseverfahren	233	9.2.1	Thermische Längenänderung von Feststoffen	283
7.7.1	Fotometrie, Spektroskopie	233	9.2.2	Thermische Volumenänderung von Feststoffen	284
7.7.1.1	Physikalische Grundlagen	233	9.2.3	Thermische Volumenänderung von Flüssigkeiten	285
7.7.1.2	Optische Größen der Fotometrie/ Spektroskopie	234	9.2.4	Thermische Volumenänderung von Gasen	287
7.7.1.3	Gesetz von Bouguer, Lambert und Beer	235	9.3	Wärmeinhalt von Stoffportionen	288
7.7.1.4	Filterfotometrie	236			
7.7.1.5	UV-VIS-Spektroskopie	238			
7.7.2	Refraktometrie	240			
7.7.3	Polarimetrie	243			
7.8	Chromatografie	245			
7.8.1	Dünnschichtchromatografie und Papierchromatografie	245			

9.4	Aggregatzustandsänderungen	290	10.6	Auswertung einer Siebanalyse mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel	332
9.4.1	Schmelzen und Erstarren	290	10.6.1	Rechnerische Auswertung der Siebanalyse mit Excel	332
9.4.2	Verdampfen, Kondensieren	291	10.6.2	Erstellen von Diagrammen zur Siebanalyse mit Excel	333
9.4.3	Zusammengesetzte thermische Vorgänge	291			
9.5	Siedepunkterhöhung	293			
9.6	Gefrierpunktniedrigung	295			
9.7	Temperaturänderung beim Mischen von Flüssigkeiten	296			
9.8	Temperaturänderung beim direkten Heizen und Kühlen	298			
9.9	Reaktionswärmen bei chemischen Reaktionen	300			
9.10	Heizwert und Brennwert von Brennstoffen	304			
	Gemischte Aufgaben zu Kapitel 9	306			
10	Bestimmung von Produkteigenschaften	308	11	Qualitätssicherung	335
10.1	Bestimmung der Dichte	308	11.1	Erfassung der Verteilung von Messwerten	335
10.1.1	Dichtebestimmung mit dem Pyknometer	309	11.2	Qualitätssicherung mit Qualitätsregelkarten	337
10.1.2	Dichtebestimmung mit der hydrostatischen Waage	312	11.2.1	Aufbau und Funktion von Qualitätsregelkarten	337
10.1.3	Dichtemessung mit der Westphal'schen Waage	313	11.2.2	Berechnen der Regelgrenzen bei Qualitätsregelkarten	339
10.1.4	Dichtebestimmung mit dem Tauchkörper-Verfahren	314	11.2.3	Erstellen und Führen von Qualitätsregelkarten	341
10.1.5	Dichtemessung mit dem Aräometer	315	11.3	Interpretation von Qualitätsregelkarten	342
10.1.6	Dichtebestimmung mit Biegeschwinger-Messgeräten	316			
10.2	Bestimmung technischer Dichten von Schüttgütern	318	12	Anhang	344
10.2.1	Bestimmung der Schütt- und Rütteldichte	318	Griechische Buchstaben	344	
10.2.2	Bestimmung der Pressdichte	318	Physikalische Konstanten	344	
10.3	Bestimmung der Viskosität	320	Vorsätze und Vorsatzzeichen	344	
10.3.1	Dynamische und kinematische Viskosität	320	Symbole und molare Massen der Elemente	345	
10.3.2	Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler	321	Hinweis zu den Normen	345	
10.3.3	Auslauf-Viskosimeter	322	Kopiervorlagen	346	
10.3.4	Rotations-Viskosimeter	323	Millimeterpapier	346	
10.4	Bestimmung der Oberflächenspannung	324	Einfach-Logarithmen-Papier	347	
10.4.1	Bügelverfahren oder Ringverfahren	325	Doppelt-Logarithmen-Papier	348	
10.4.2	Tropfenmethode	325	Vordruck zur Datenerfassung einer Siebanalyse	349	
10.4.3	Kapillarmethode	326	Histogramm	349	
10.5	Bestimmung der Partikelgrößenverteilung von Schüttgütern	327	RRSB-Netz für die Siebanalyse	350	
10.5.1	Auswertung einer Siebanalyse	327	Qualitätsregelkarte	351	
10.5.2	Darstellung und Auswertung einer Siebanalyse im RRSB-Netz	329			
10.5.3	Bestimmung der spezifischen Oberfläche von Schüttgütern	331	Sachwortverzeichnis mit englischen Sachwörtern	352	
			Danksagung und Bildquellenverzeichnis	360	

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

Basis des Rechnens in der Chemie sind die grundlegenden mathematischen Rechnungsarten sowie deren praktische Anwendung mit dem Taschenrechner oder dem Computer.

1.1 Zahlenarten

Beim Rechnen unterscheidet man die **bestimmten Zahlen** sowie die **allgemeinen Zahlen**.

Während die bestimmten Zahlen einen festen Wert haben, wie z.B. 3, 9, 5, $\frac{1}{2}$ usw., stehen die allgemeinen Zahlen, wie z.B. x , y , z , als Platzhalter für beliebige Zahlen.

■ Bestimmte Zahlen

Die bestimmten Zahlen kann man weiter in verschiedene Zahlenarten untergliedern.

Zahlenarten der bestimmten rationalen Zahlen	Beispiele
Natürliche Zahlen: Sie sind die zum Zählen benutzten Zahlen. Es sind positive ganze Zahlen sowie Null (0). Sie werden normalerweise ohne Pluszeichen (+) geschrieben.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, 12, ..., 37, ..., 59, 60, 61, ..., 107, ...
Die negativen ganzen Zahlen erhält man durch Subtrahieren einer größeren natürlichen Zahl von einer kleineren natürlichen Zahl. Beispiel: $5 - 7 = -2$; $15 - 29 = -14$	-1, -2, -3, ..., -18, -19, ...
Die ganzen Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen (positive ganze Zahlen) und die negativen ganzen Zahlen.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 71, 72, 73, ... -1, -2, -3, -4, ..., -21, -22, ...
Gebrochene Zahlen , auch Bruchzahlen genannt, sind Quotienten aus zwei ganzen Zahlen. Quotient ist der Name für einen Bruch, d.h. eine nicht ausgeführte Divisionsaufgabe ganzer Zahlen. Bruchzahlen können positiv und negativ sein.	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $1\frac{1}{6}$, $\frac{7}{9}$, ... $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $-2\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{9}$, ...
Dezimalzahlen sind Zahlen mit einem Komma. Es können positive und negative Dezimalzahlen sein.	1,748, 0,250, -8,32, -2,0, -0,5, -7,8316, 4,57, 7,8

Die bislang genannten Zahlen bezeichnet man insgesamt als **rationale Zahlen**. Außerdem gibt es die Gruppe der **irrationalen Zahlen**. Es sind bestimmte Zahlen.

Zahlenarten der bestimmten irrationalen Zahlen	Beispiele
Wurzelzahlen	$\sqrt{2} = 1,4142136\dots$; $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$
Transzendente Zahlen	$\pi = 3,1415927\dots$; $e = 2,7182818\dots$
Die irrationalen Zahlen sind nicht periodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen.	

■ Zahlenstrahl

Die bestimmten Zahlen lassen sich außer durch Ziffern (siehe Beispiele oben) auch zeichnerisch auf einem Zahlenstrahl als Strecke darstellen (**Bild 1**). Vom Nullpunkt aus nach rechts liegen die positiven Zahlen, nach links die negativen Zahlen.

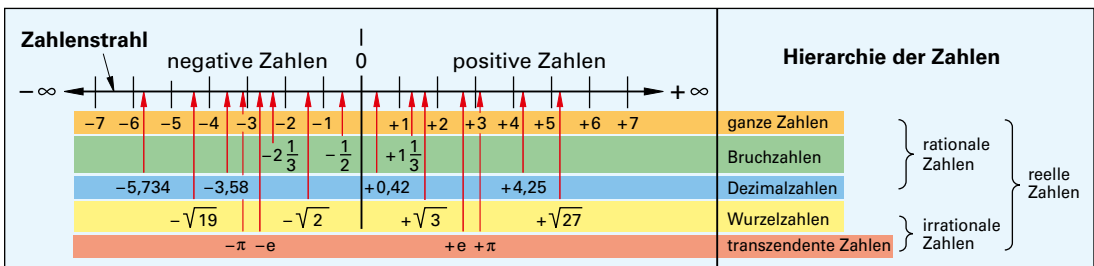


Bild 1: Zahlenarten und ihre Lage auf dem Zahlenstrahl, Hierarchie der Zahlen

Allgemeine Zahlen

Die allgemeinen Zahlen, auch Variable genannt, stehen als Platzhalter für eine beliebige Zahl.

In der Mathematik werden für die allgemeinen Zahlen die kleinen Buchstaben des Alphabets verwendet.

Beispiele
 a, b, c, \dots u, v, w, \dots x, y, z

In der technischen Mathematik benutzt man kleine oder große Buchstaben zur Benennung einer Variablen. Sie sind meist der Anfangsbuchstabe des deutschen oder englischen Namens der Variablen, wie z.B. l für Länge oder V für das Volumen.

l, b, t, v, \dots A, V, U, T, \dots
 l Länge, b Breite, t Zeit (time), h Höhe,
 A Fläche (aerea), V Volumen, U Umfang,
 T thermodynamische Temperatur, ...

Aufgaben zu Zahlenarten

- Zu welcher Zahlenart gehören folgende Zahlen:
 $0,7$, -18 , $\sqrt{3}$, $1/7$, 0 , -387 , $-\pi$, $-0,32$?
 - Wo liegen auf dem Zahlenstrahl die Zahlen:
 $-3\frac{1}{3}$, $0,85$, e , $-0,25$, $\sqrt{9}$, $\frac{2}{4}$, $-3,50$?
- Zeichnen Sie die Zahlen in den Zahlenstrahl ein.

1.2 Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln

In chemischen Berechnungen wird meist mit Größen und Einheiten gerechnet, die mit mathematischen Zeichen in Formeln verknüpft sind.

Größen, Einheiten

Mit einer Größe (engl. physical quantity) werden chemische oder physikalische Eigenschaften beschrieben. Zu ihrer Kurzschreibweise benutzt man ein Größenzeichen, z.B. l für die Länge.

Der Wert einer Größe besteht aus einem Zahlenwert und einem Einheitenzeichen, z.B. 5,8 kg. Das Einheitenzeichen ist eine Kurzform des Einheitennamens, z.B. kg für Kilogramm.

Beispiel: Die Länge einer 3,40 Meter langen Rohrleitung beträgt: $l = 3,40$ m.

Es gibt 7 **Basisgrößen**, auf die sich alle Größen zurückführen lassen (**Tabelle 1**).

Mathematische Zeichen

Die mathematischen Zeichen (engl. mathematical symbols) dienen zur Kurzbezeichnung einer mathematischen Operation (**Tabelle 2**).

Beispiel: Sollen zwei Zahlen multipliziert werden, so setzt man zwischen die Zahlen einen Multiplikationspunkt, z.B. $3 \cdot 5$.

Für Flächenformate und räumliche Abmessungen ist auch das Multiplikationskreuz \times zugelassen.

Beispiel: $3 \text{ m} \times 5 \text{ m}$

Formeln, Größengleichungen

Die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen Größen werden durch Größengleichungen (engl. equations) oder Formeln (engl. formula) ausgedrückt. Mithilfe von Größengleichungen lassen sich durch Umstellen und Auflösen die gesuchten Größen berechnen (Seite 28).

Tabelle 1: Basisgrößen und ihre Einheiten (nach SI)

Physikalische Größen	Größenzeichen	Einheitenname	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stoffmenge	n	Mol	mol
Zeit	t	Sekunde	s
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

Tabelle 2: Mathematische Zeichen (DIN 1302)

Zeichen	Bedeutung	Zeichen	Bedeutung
$+, -$	plus, minus	$<, >$	kleiner, größer
$:, -, /$	geteilt durch, pro	\leq, \geq	kleiner gleich, größer gleich
\cdot, \times	mal	Δ	Differenz
$=, \neq$	ist gleich, ist ungleich	\dots	und so weiter
\approx	beträgt rund	∞	unendlich
\equiv	identisch gleich	\pm	plus/minus
\sim	proportional	$ a $	Betrag von a
$\hat{=}$	entspricht	$\sqrt{\quad}$	Wurzel

Beispiel für Größengleichungen:

Fläche $A = l \cdot b$ Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$
Volumen $V = l \cdot b \cdot h$ Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$

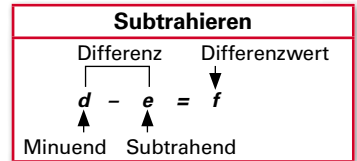
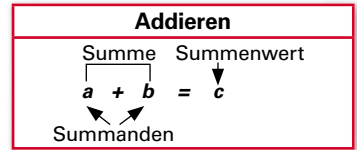
1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

Diese beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer aus Strichen bestehenden mathematischen Zeichen (+, -) auch als Strichrechnungen bezeichnet.

Beim **Addieren** (Zusammenzählen, engl. to add) werden die einzelnen Summanden zusammengezählt. Das Ergebnis heißt Summenwert oder kurz Summe.

Beim **Subtrahieren** (Abziehen, engl. to subtract) zieht man von einer Zahl eine andere Zahl ab. Das Ergebnis ist der Differenzwert, einfach auch Differenz genannt.



Rechenregeln und Klammern beim Addieren und Subtrahieren	
Rechenregeln	Beispiele
Nur gleichartige allgemeine Zahlen bzw. Größen können addiert bzw. subtrahiert werden.	$8 \text{ m}^2 + 72 \text{ cm}^2 + 7,5 \text{ m}^2 - 23 \text{ cm}^2 = 15,5 \text{ m}^2 + 49 \text{ cm}^2$
Die einzelnen Glieder in einer Strichrechnung können vertauscht werden (Kommutativgesetz).	$5 - 16 + 7 = -16 + 7 + 5 = -4;$ $11x - 3x + 9x = 11x + 9x - 3x = 17x$
Einzelne Glieder können zu Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammengefasst werden (Assoziativgesetz).	$2 + 5 - 2 - 1 = 7 - 3 = 4$ $8u - 3v + 3u + 8v = 11u + 5v$
Klammern beim Addieren und Subtrahieren	
Klammern, () oder [], fassen Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammen. Das Vorzeichen der Glieder in der Klammer kann sich durch das Setzen oder Weglassen von Klammern ändern.	
Steht ein + Zeichen vor einer Klammer, so kann man sie weglassen, ohne dass sich die Vorzeichen der Glieder in der Klammer ändern.	$25 + (5 - 3) = 25 + 5 - 3 = 27;$ $7a + (3a - 9a) = 7a + 3a - 9a = 1a = a$
Steht ein - Zeichen vor einer Klammer, so muss man beim Weglassen der Klammer das Vorzeichen aller Glieder in der Klammer umkehren. Setzt man eine Klammer, vor der ein - Zeichen steht, so muss man ebenfalls das Vorzeichen aller Glieder, die in der Klammer stehen, umkehren.	$16 - (3 - 2 + 8 - 5) = 16 - 3 + 2 - 8 + 5 = 12$ $5x - (2x + 9a - 7b) = 5x - 2x - 9a + 7b$

Aufgaben zum Addieren und Subtrahieren

1. Ermitteln Sie das Ergebnis:
 $59,30 a - 27,53 a + 7,83 b - 21,04 b$
2. Klammern Sie aus:
 $8,3x - 7,8a + 2,5x - 9,2a$
3. Lassen Sie die Klammer weg und berechnen Sie das Ergebnis:
 $25a - (36b - 19a - 11b - 12a)$
4. Ermitteln Sie die Maße l_1, l_2, l_{ges} der Rohrleitung in **Bild 1**. Die Maße in der Zeichnung sind in mm angegeben.

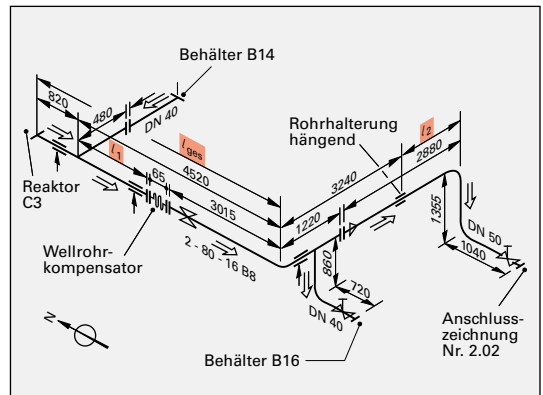


Bild 1: Maße in einer Rohrleitungszeichnung

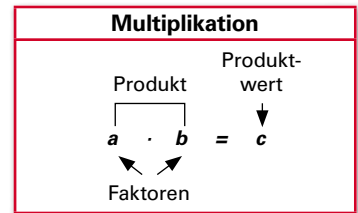
1.3.2 Multiplizieren

Beim **Multiplizieren** (umgangssprachlich Malnehmen, engl. to multiply) werden die Faktoren miteinander malgenommen und ergeben den Produktwert, kurz auch Produkt genannt.

Das mathematische Zeichen für Multiplizieren ist \cdot oder \times .

Bei allgemeinen Zahlen kann das Multiplikationszeichen weggelassen werden, z. B. ab anstatt $a \cdot b$.

Die Ziffer 1 wird meist nicht mitgeschrieben. **Beispiel:** $1a = a$



Rechenregeln beim Multiplizieren	Formeln	Beispiele
Ist ein Faktor 0, so ist das ganze Produkt 0. Die Faktoren können vertauscht werden. Teilprodukte lassen sich zusammenfassen.	$a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$ $a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$ $a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$	$387 \cdot 229 \cdot 712 \cdot 0 = 0$ $15 \cdot 28 \cdot 77 = 77 \cdot 28 \cdot 15$ $5 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 30 \text{ m}^3$
Vorzeichen beim Multiplizieren		
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergibt ein positives Produkt.	$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$	$2 \cdot 3 = 6$; $(-7) \cdot (-3) = 21$ $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen ergibt ein negatives Produkt.	$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$ $(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$5 \cdot (-2) = -10$; $(-6) \cdot 3 = -18$ $a \cdot (-b) = -ab$; $(-4) \cdot m = -4m$
Multiplizieren von Klammerausdrücken		
Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert.	$a \cdot (b - c) = ab - ac$	$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 7 - 9 \cdot 3$ $= 63 - 27 = 36$ $5 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$
Zwei Klammerausdrücke werden multipliziert, indem jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird.	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$	$(12 - 7) \cdot (3 + 5)$ $= 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 5$ $= 36 + 60 - 21 - 35 = 40$
Bei Klammerausdrücken mit bestimmten Zahlen wird zuerst der Zahlenwert der Klammer ermittelt und dann das Produkt berechnet.		$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 4 = 36$; $(12 - 7) \cdot (3 + 5) = 5 \cdot 8 = 40$;
Ausklammern (Faktorisieren)		
Haben mehrere Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann er ausgeklammert werden. Bei allgemeinen Zahlen wird dadurch die Summe in ein Produkt umgewandelt.	$ax + bx + cx$ $= x \cdot (a + b + c)$	$19 \cdot 7 - 19 \cdot 5 = 19 \cdot (7 - 5)$ $= 19 \cdot 2 = 38$ $3\pi x + 3\pi y = 3\pi(x + y)$ $L_0 + L_0 \alpha \cdot \Delta \vartheta = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta)$

Aufgaben zum Multiplizieren

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke
 - a) $(+3) \cdot (-15)$
 - b) $(+9) \cdot (+7)$
 - c) $(-7) \cdot (-12)$
 - d) $(+5) \cdot 0$
 - e) $(0) \cdot (-16)$
 - f) $(-3a) \cdot (+8b) \cdot (+2c)$
 - g) $(+9x) \cdot (-4y)$
 - h) $(+13m) \cdot (+4m) \cdot (+2m)$
2. Führen Sie die Multiplikationen aus:
 - a) $3(3a - 2b)$
 - b) $9(7u + 8v)$
 - c) $(-5) \cdot (-4x - 7y)$
 - d) $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32)$
 - e) $(6c - 3d) \cdot (+2a)$
 - f) $-x(y - z)$
 - g) $4uv(9r - 5s)$
 - h) $-(4ab + 7xy) \cdot (-12)$
 - i) $W = p \cdot (V_2 - V_1)$
 - j) $m_M = \varrho_M \cdot \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} \right)$
3. Multiplizieren Sie die Ausdrücke:
 - a) $(7s + 5r) \cdot (3l - 6k)$
 - b) $5(3u - 4v) \cdot 8 \cdot (2w - 9x)$
 - c) $(-4) \cdot (9w + 3x) \cdot (-3) \cdot (8y - 5z)$
 - d) $11a(-3b + 2x) \cdot (4c - 5y)$
4. Welche Zahl liefert der Ausdruck, wenn für $x=3$ und $y=4$ gesetzt wird?

$$7(5 - 2x) \cdot (-4) \cdot (-3 + 6y)$$
5. Klammern Sie aus:
 - a) $2ab + 2ac + 2ad$
 - b) $\pi n r_1 + \pi n r_2$
 - c) $k \cdot A \cdot \vartheta_2 - k \cdot A \cdot \vartheta_1$
 - d) $\pi r_1^2 + \pi h^2$

1.3.3 Dividieren

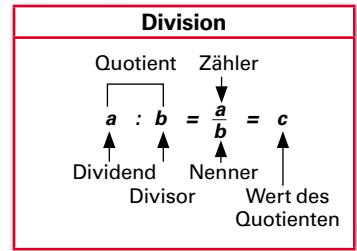
Das Dividieren (umgangssprachlich Teilen; engl. to divide) ist die Umkehrung des Multiplizierens.

Das mathematische Zeichen für Dividieren ist der Doppelpunkt : oder der Bruchstrich $\frac{\quad}{\quad}$ bzw. der Schrägstrich \diagup .

Der Doppelpunkt : und der Bruchstrich $\frac{\quad}{\quad}$ sind gleichbedeutend.

Zähler und Nenner dürfen **nicht** vertauscht werden.

Ist der Nenner null, so hat der Quotient keinen bestimmten Wert, er kann nicht bestimmt werden.



Rechenregeln beim Dividieren	Formeln	Beispiele
<p>Vorzeichen beim Dividieren</p> <p>Gleiche Vorzeichen bei Zähler und Nenner ergeben einen positiven Quotienten.</p> <p>Ungleiche Vorzeichen von Zähler und Nenner ergeben einen negativen Quotienten.</p>	$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}; \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$(+2) : (+3) = \frac{2}{3}; \quad \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$ $\frac{-4}{+7} = -\frac{4}{7}; \quad \frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}$
<p>Dividieren von Klammerausdrücken</p> <p>Ein Klammerausdruck wird dividiert, indem jedes Glied in der Klammer mit dem Nenner geteilt wird.</p> <p>Der Bruchstrich fasst die Ausdrücke auf und unter dem Bruchstrich zusammen, als ob sie von einer Klammer umschlossen wären.</p>	$(a - b) : x = a : x - b : x$ $\frac{a - b}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x}$ $\frac{a + b}{c} \cdot d = \frac{a \cdot d}{c} + \frac{b \cdot d}{c}$	$\frac{36xyz - 24xuv}{6x}$ $= \frac{36xyz}{6x} - \frac{24xuv}{6x}$ $= 6yz - 4uv$
<p>Kürzen, Erweitern</p> <p>Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl geteilt.</p> <p>Es können nur Faktoren gekürzt werden oder es müssen alle Summanden gekürzt werden.</p> <p>Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert.</p>	$\frac{4ab}{6ac} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot 2}{\cancel{6} \cdot \cancel{a} \cdot c \cdot 3} = \frac{2b}{3c}$ $\frac{a(b+c)}{a} = b+c$ $\frac{ab+ac}{a} = b+c$ $b+c = \frac{(b+c)a}{a}$	$\frac{-48xy}{36y} = \frac{-4 \cdot \cancel{12} \cdot xy}{3 \cdot \cancel{12} \cdot y}$ $= -\frac{4}{3}x$ <p>$\frac{9x-2y}{5z}$ erweitern mit $(-3) \Rightarrow$</p> $\frac{(9x-2y)(-3)}{5z \cdot (-3)} = \frac{-27x+6y}{-15z}$

Aufgaben zum Dividieren

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

1. a) $63 : (-7)$ b) $(-64) : (-4)$ c) $(-91) : 13$ d) $\frac{105}{15}$ e) $\frac{-96}{8}$ f) $\frac{-132}{-11}$
2. a) $\frac{(-7) \cdot (18)}{12}$ b) $\frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)}$ c) $\frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)}$
3. a) $(156 - 72) : 14$ b) $(391 - 144) : (121 - 102)$
4. Kürzen Sie soweit wie möglich:
 - a) $\frac{-12uv}{3v}$ b) $\frac{6a-3b}{3}$ c) $\frac{81xyz}{-9yz}$ d) $\frac{-187rs + 153rs + 34rs}{-17s}$ e) $\frac{21 \cdot (-9) \cdot 4x}{(-35) \cdot (-2)}$
 - f) $\frac{-(x-5)}{(5-x)}$ g) $\frac{-(7x-y) \cdot 3 + 2b}{-2b-3}$
5. Erweitern Sie:
 - a) $\frac{7a}{5b}$ mit (-3) b) $\frac{3x}{-8y}$ mit (-1)

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

Bei der Berechnung von Ausdrücken, die sowohl Additionen und Subtraktionen (Strichrechnungen + -) als auch Multiplikationen und Divisionen (Punktrechnungen · :) enthalten, werden die Rechenoperationen in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt:

1. Enthält der zu verrechnende Ausdruck nur Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Punkt vor Strich, d. h., Punktrechnungen müssen vor den Strichrechnungen ausgeführt werden.

Beispiele: $5 \cdot 7 + 65 : 13 = 35 + 5 = 40;$ $\frac{21}{7} - \frac{48}{6} + (-3) \cdot (-9) = 3 - 8 + 27 = 22$
 $\frac{122 - 66}{8} \cdot 14 = \frac{56}{8} \cdot 14 = 98;$ $125 : (+5) - (-80) : (-4) = +25 - 20 = 5$

2. Enthält ein Ausdruck neben Punktrechnungen und Strichrechnungen noch Klammern, so gilt:

Zuerst die Klammerausdrücke berechnen, dann die Punktrechnungen und anschließend die Strichrechnungen ausführen.

Beispiele: $3 \cdot (23 - 17) + 12 = 3 \cdot 6 + 12 = 18 + 12 = 30$
 $5a \cdot (11b - 8b) - 2b \cdot (3a + 4a) = 5a \cdot 3b - 2b \cdot 7a = 15ab - 14ab = ab$
 $\frac{7 \cdot (23,2 - 23,3)}{(2,4 + 4,6) \cdot (-0,5)} = \frac{7 \cdot 0,1}{7 \cdot 0,5} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2$

3. Enthält der Ausdruck ineinander verschachtelte Klammerausdrücke, so gilt:

Zuerst die innerste Klammer, dann die nächstäußere Klammer usw. zusammenfassen.

Beispiel: $4ac + [(3a + 7a) \cdot 5c + 5ac] = 4ac + [10a \cdot 5c + 5ac] = 4ac + 50ac + 5ac = 59ac$

4. Enthält ein Ausdruck verschachtelte Klammern sowie Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Es wird in der Reihenfolge – Klammerausdrücke – Punktrechnungen – Strichrechnungen – ausgerechnet. Innerhalb der Klammerausdrücke gilt ebenfalls: Punktrechnungen vor Strichrechnungen.

Aufgaben zum Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

1. a) $-4 \cdot (0,2 - 3,2) + (14,5 - 8,5) \cdot (-0,1)$ b) $12x \cdot (-3y) + (0,75x - 0,50x) \cdot (+80)$
2. a) $\frac{(-2,5) \cdot (86 - 82)}{(1,3 - 0,8) \cdot (42 - 38)}$ b) $\frac{222}{37} - \frac{0,125 \cdot (-85 + 117)}{(0,4) \cdot (-8) \cdot (2,5)}$ c) $24,7 \cdot \frac{(1 - 0,392)}{(1 - 0,065)}$
3. a) $(23,8 - 21,3) \cdot \frac{2,14 + 0,86}{4,52 - 4 \cdot 0,38}$ b) $\frac{18,06 - 17,56}{0,25} + \frac{27}{3,2 + 5,8} - \frac{(0,2 + 2,8) \cdot (5,4 - 3,4)}{2,4 \cdot 2,5}$
4. a) $2x - [5y - (3x - 4y) + 7x] - y$ b) $4,5a \cdot [(2b - c) - c] - 8a(c - b)$
 c) $[-0,2a - (1,7b - 1,9a)] : \left[\frac{5,5a}{10} - 0,85b + 0,3a \right]$
5. a) $2 \cdot [-2xy - (20a - 12xy)] + 5(2a - x - y)$ b) $(0,3a \cdot (5xy - (92x - 87y)) - (84y - 82x))$
 c) $(-9,5x + [(1,5x - 4y) \cdot (0,5 + 6,5)] + 29y) \cdot \frac{1}{x + y}$

1.5 Bruchrechnen

Ein Bruch (engl. fraction) ist eine Divisionsaufgabe, die mit einem Bruchstrich geschrieben ist. Als Bruchrechnen bezeichnet man das Rechnen mit Brüchen.

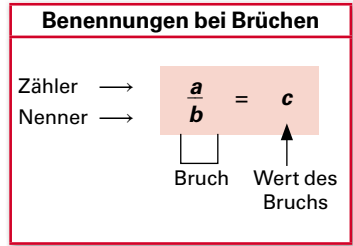
Ein Bruch besteht aus dem Zähler und dem Nenner.

Jeden Bruch kann man in eine Dezimalzahl umrechnen, z.B.: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$

Mit Brüchen wird bevorzugt bei der Umwandlung von Formeln gerechnet.

Es gibt verschiedene **Brucharten**:

Brucharten	Beispiele	Merkmale	Brucharten	Beispiele	Merkmale
Echte Brüche	$\frac{1}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{5}$	Zähler < Nenner	Gleichnamige Brüche	$\frac{1}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{7}$	Brüche mit gleichen Nennern
Unechte Brüche	$\frac{5}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{2}$	Zähler ≥ Nenner Wert des Bruchs ≥ 1	Ungleichnamige Brüche	$\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$	Brüche mit ungleichen Nennern
Gemischte Zahlen	$1\frac{1}{2}$; $3\frac{2}{3}$	Ganze Zahl und Bruch	Scheinbrüche	$\frac{3}{1}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{10}{5}$	Der Wert des Bruchs ist eine ganze Zahl



Die Regeln des Kürzens und Erweiterns von Brüchen wurden bereits beim Dividieren genannt (Seite 12).

- Das Kürzen dient meist zur Vereinfachung der weiteren Rechnung oder des Ergebnisses.
- Durch Erweitern wird der Bruch so umgeformt, wie es für die weitere Rechnung vorteilhaft ist.

Beispiele zum Kürzen: $\frac{7}{21} = \frac{\cancel{7}^1}{\cancel{21}_3} = \frac{1}{3}$; $\frac{8ab}{14a} = \frac{\cancel{8}^2 \cancel{a}^1 b}{\cancel{14}_2 \cancel{a}^1} = \frac{4b}{7}$; $\frac{32a+4ab}{6a} = \frac{\cancel{4}^1 (8+b) \cdot \cancel{2}^1}{\cancel{6}_3} = \frac{2(8+b)}{3}$

Beispiel zum Erweitern: $\frac{2a-3b}{2}$ erweitern auf den Nenner $10a \Rightarrow \frac{(2a-3b) \cdot 5a}{2 \cdot 5a} = \frac{5a(2a-3b)}{10a}$

1.5.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler zusammenfasst und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiele: $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$; $\frac{3x}{5b} + \frac{7x}{5b} - \frac{4x}{5b} = \frac{3x+7x-4x}{5b} = \frac{6x}{5b}$

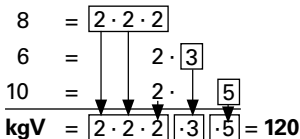
Addieren und Subtrahieren

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} = \frac{a+b-c}{x}$$

Brüche mit ungleichen Nennern (ungleichnamige Brüche) müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren in Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) umgewandelt werden und können erst dann zusammengefasst werden. Den gemeinsamen Nenner mehrerer Brüche nennt man **Hauptnenner**. Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache, kurz das **kgV**, der einzelnen Nenner.

■ **Schema zur Ermittlung der Summe ungleichnamiger Brüche:** Beispiel: $\frac{3}{8} - \frac{5}{6} - \frac{7}{10}$

- Zerlegung in Primzahlfaktoren
Nenner Primzahlfaktoren
- Hauptnenner (kgV) bestimmen
Das kgV ist das Produkt der größten Anzahl jeder vorkommenden Primzahl: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. (Primzahlen sind die kleinsten Faktoren, in die eine Zahl zerlegt werden kann.)
- Erweiterungsfaktor der einzelnen Brüche bestimmen
- Gleichnamigmachen der einzelnen Brüche durch Erweitern
- Addieren bzw. Subtrahieren der jetzt gleichnamigen Brüche



$$\begin{array}{l}
 120 : 8 = 15 \\
 120 : 6 = 20 \\
 120 : 10 = 12
 \end{array}$$

$$\frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 15} + \frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 20} - \frac{7 \cdot 12}{10 \cdot 12} = \frac{45}{120} + \frac{100}{120} - \frac{84}{120} = \frac{61}{120}$$

Zusammenfassen mehrerer Brüche mit bestimmten und allgemeinen Zahlen

Beispiel: $\frac{3x}{2a} - \frac{2x}{9ab} + \frac{5x}{18b}$

1. Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \cdot a \\ 9ab &= 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ \frac{18b}{kgV} &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b} = 18ab \end{aligned}$$

2. Erweiterungsfaktoren bestimmen:

$$\begin{aligned} 18ab : 2a &= 9b \\ 18ab : 9ab &= 2 \\ 18ab : 18b &= a \end{aligned}$$

3. Erweitern und zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{3x \cdot 9b}{2a \cdot 9b} - \frac{2x \cdot 2}{9ab \cdot 2} + \frac{5x \cdot a}{18b \cdot a} &= \frac{27bx}{18ab} \\ - \frac{4x}{18ab} + \frac{5ax}{18ab} &= \frac{x(27b - 4 + 5a)}{18ab} \\ &= \frac{x(5a + 27b - 4)}{18ab} \end{aligned}$$

Aufgaben: Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen

1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$ b) $\frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ 2. a) $\frac{7x}{4a} + \frac{5x}{12b}$ b) $\frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b}$

1.5.2 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Rechenregeln	Formeln	Beispiele
<p>Multiplizieren</p> <p>Brüche werden multipliziert, indem jeweils die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden.</p> <p>Gemischte Zahlen werden miteinander multipliziert, indem sie zuerst in unechte Brüche umgewandelt und diese dann miteinander multipliziert werden.</p>	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot f = \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ $\frac{3y}{x} \cdot \frac{4x}{y} = \frac{3\cancel{y} \cdot 4\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{y}} = 12$ $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$
<p>Dividieren</p> <p>Ein Bruch wird durch einen 2. Bruch dividiert, indem der 1. Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruchs multipliziert wird.</p> <p>Ganze Zahlen können als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden.</p>	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $a = \frac{a}{1}$	$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} : \frac{5}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ $7 : \frac{7}{4} = \frac{7}{1} : \frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 7} = 4$

Aufgaben zum Bruchrechnen

1. Fassen Sie zusammen

a) $\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8}$ b) $3\frac{6}{25} - 18\frac{7}{10} + 24\frac{3}{5}$ c) $\frac{8x+4y}{4a+6b} + \frac{9x}{9b+6a} - \frac{5}{3}$

2. Multiplizieren Sie

a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22}$ c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ d) $1\frac{5}{6} \cdot 3\frac{6}{15}$ e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a}$

3. Dividieren Sie

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7}$ c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15}$ d) $3xy : \frac{1}{2}z$ e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y}$ f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v}$

4. Berechnen Sie bzw. fassen Sie soweit wie möglich zusammen

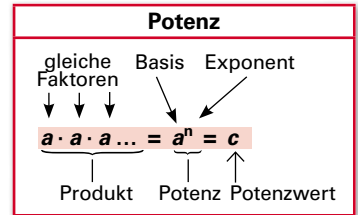
a) $14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right)$ b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22}$ c) $\frac{8x+8y}{3r-3s} : \frac{4x+4y}{9r-9s}$ d) $\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10}\right) \cdot 8$ e) $\frac{5a-3b}{6n} + \frac{5a-3b}{3m}$

f) $5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10}\right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2}\right)\right]$ g) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{8}{5}$ h) $\left(12 : 2\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{9}$ i) $\left(\frac{u+v}{1+k} + \frac{3(u+v)}{2(k+l)} - \frac{5(u-v)}{3(k+l)}\right) \cdot \frac{1}{2}$

1.6 Rechnen mit Potenzen

Definition des Potenzbegriffs

Besteht ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren, so kann es abgekürzt als Potenz (engl. power) geschrieben werden. Der Exponent (Hochzahl) gibt an, wie viel Mal die Basis (Grundzahl) mit sich selbst multipliziert wird.



Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (gesprochen: 2 hoch 5)
 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Die Potenzwerte von Potenzzahlen werden mit dem **Taschenrechner** berechnet. Dazu haben die Taschenrechner eine Potenziertaste, z.B. $\boxed{y^x}$ oder $\boxed{\wedge}$

Beispiel: Es ist zu berechnen: $3,25^3$

Eingabe	3,25	$\boxed{y^x}$ 3	$\boxed{=}$
Anzeige	3,25	$3,25^3$	34,328125

Das Vorzeichen beim Potenzieren

Beispiele: $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$; $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
 $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ usw.

- Merke:**
- Ist die Basis positiv, so ist der Potenzwert immer positiv.
 - Ist die Basis negativ und der Exponent eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv.
 - Ist die Basis negativ und der Exponent eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ.

Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz mit negativem Exponenten (z. B. a^{-n}) kann auch als Kehrwert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit positivem Exponenten im Zähler eines Bruchs als Potenz mit negativem Exponenten im Nenner des Bruchs gesetzt werden.

Beispiele: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0,008$; $4^{-2} = \frac{4^2}{3^4} = \frac{16}{81} = 0,1975$; $\frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$

Potenzformeln

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^x}{b^y} = \frac{b^{-y}}{a^{-x}}$$

$$1^n = 1$$

$$a^0 = 1$$

Sonderfälle bei Potenzen

Potenzen mit Basis 1. **Beispiel:** $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Merke: Jede Potenz mit der Basis 1 hat immer den Potenzwert 1.

Potenzen mit dem Exponent 0. **Beispiel:** $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$, da $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$

Merke: Jede Potenz mit dem Exponent 0 hat den Wert 1.

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Sehr große und sehr kleine Zahlen können als Vielfaches der Potenzen der Basis 10 (Zehnerpotenzen) geschrieben werden.

Große positive Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten ausgedrückt.

Beispiele: $100000000 = 1,0 \cdot 10^8 = 10^8$; $7200000 = 7,2 \cdot 1000000 = 7,2 \cdot 10^6$

Sehr kleine Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten geschrieben.

Beispiele: $0,0085 = 85 \cdot 10^{-4}$; $0,0002938 = 2938 \cdot 10^{-7} = 2,938 \cdot 10^{-4}$

Aufgaben

- | | | |
|---|---|---|
| <p>1. Schreiben Sie in Potenzform:</p> <p>a) $2L \cdot 4L \cdot 8L$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b$</p> <p>c) $1,5 \text{ cm} \cdot 2,3 \text{ cm} \cdot 1,4 \text{ cm}$</p> | <p>2. Berechnen Sie den Potenzwert:</p> <p>a) $21^{2,5}$ b) $(-6,3)^3$</p> <p>c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ d) $2,4^{3,5}$</p> | <p>3. Schreiben Sie als Zehnerpotenz:</p> <p>a) 5000000 b) 0,0023</p> <p>c) 96485 d) 0,000082</p> |
|---|---|---|

Rechenregeln beim Potenzieren	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Potenzen Potenzen können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl dieselbe Basis als auch denselben Exponenten haben. Potenzausdrücke zuerst ordnen und dann die gleichnamigen Glieder zusammenfassen.	$x \cdot a^n + y \cdot a^n = (x + y) \cdot a^n$	$9 \cdot 3^4 - 6 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= (9 - 6) \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $4,2 \text{ cm}^2 + 5,8 \text{ cm}^2$ $= (4,2 + 5,8) \cdot \text{cm}^2 = 10,0 \text{ cm}^2$
Multiplizieren von Potenzen Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten und mit der Summe der Exponenten potenziert wird. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem ihre Basen multipliziert und der Exponent beibehalten wird.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$ $10^{-3} \cdot 10^6 = 10^{(-3+6)} = 10^3$ $m^3 \cdot m^{-2} = m^{(3-2)} = m^1 = m$ $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$ $4,0^3 \cdot \text{cm}^3 = (4,0 \cdot \text{cm})^3 = 64 \text{ cm}^3$
Dividieren von Potenzen Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert wird. Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem aus den Basen ein Bruch gebildet wird, der mit dem gemeinsamen Exponent potenziert wird.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$ $\frac{m^5}{m^2} = m^{5-2} = m^3$ $\frac{12^3}{10^3} = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 1,728$
Potenzieren von Potenzen Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$ $(r^2)^x = r^{2 \cdot x} = r^{2x}$
Potenzieren von Summen aus Zahlen Eine Summe oder eine Differenz aus Zahlen wird zuerst ausgerechnet und dann potenziert.		$(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$ $(9 - 3)^3 = 6^3 = 216$

Aufgaben zum Rechnen mit Potenzen

1. Addieren und Subtrahieren von Potenzen

- a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2$ b) $12 \text{ m}^2 + 7 \text{ m}^3 - 7 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^3$ c) $6,2x^4 + 3,4y^2 + 7,5x^4 - 3,4y^2$
 d) $2,8\pi r^2 h + \frac{4}{5}\pi r^3 - 1,75\pi r^3 + 2,2hr^2\pi$ e) $-14,3 \cdot 7^3 + 6,9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1,1 \cdot 11^4 + 8,7 \cdot 7^3$

2. Multiplizieren von Potenzen

- a) $10^7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}$ b) $0,4a^4 \cdot 0,5a^5$ c) $2,5 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}$ d) $(r^3 - 2,5r^2) \cdot 2r^2$
 e) $d^{0,5x} \cdot d^{7x+3}$ f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n}$ g) $(r + s)^2 \cdot (r + s)^3$ h) $(x + y)^a \cdot (x + y)^b$

3. Dividieren von Potenzen

- a) $\frac{10^3}{10^2}$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3}$ c) $\frac{225^3}{15^3}$ d) $\frac{780x^5}{39y^5}$ e) $\frac{2r^3}{3a^2} \cdot \frac{12a^2}{16r^3}$ f) $\frac{n^3}{x^4} : \frac{n^3 \cdot x^4}{a}$

4. Potenzieren von Potenzen

- a) $(5^3)^2$ b) $(10^3)^{-2}$ c) $(4^2 \cdot axy^2)^3$ d) $5 \cdot (u^2 v^3)^5$ e) $(17)^2 \cdot (3^0)^3$ f) $(7^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$

5. Potenzieren von Summen

- a) $(3 + 7)^3$ b) $(22 - 17)^5$ c) $(23 - 14)^5$ d) $(5 + 9)^4$

1.7 Rechnen mit Wurzeln

Definition des Wurzelbegriffs

Das Wurzelziehen, auch Radizieren genannt, ist die Umkehrung des Potenzierens.

Durch Wurzelziehen (engl. extraction) soll ermittelt werden, welche Zahl (x) z.B. ins Quadrat (Exponent 2) erhoben werden muss, um den Potenzwert (25) zu erhalten. Als Operatorzeichen für das Wurzelziehen verwendet man das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{}$, kurz Wurzel genannt.

Beispiele: $\sqrt[3]{16} = ?$; Lösung: $\sqrt[3]{16} = 4$, da $4^2 = 16$
 $\sqrt[3]{9} = ?$; Lösung: $\sqrt[3]{9} = 3$, da $3^2 = 9$

Ein Wurzelausdruck besteht aus dem Wurzelzeichen mit Wurzelexponent und der darunter stehenden Basis. Das Ergebnis ist der Wurzelwert (siehe rechts).

Einschränkung auf bestimmte Zahlen: Um Probleme beim Rechnen zu vermeiden, sollten die Basis a und der Wurzelwert c positive Zahlen und der Wurzelexponent n eine natürliche Zahl sein.

Verschiedene Wurzelexponenten

Da es bei Potenzen verschiedene Exponenten gibt (2, 3, 4, ...), gibt es auch Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (2, 3, 4, ...).

Die einfachste Wurzel hat den Wurzelexponenten 2. Sie heißt Quadratwurzel oder einfach Wurzel. Beim Schreiben wird der Wurzelexponent 2 im Wurzelzeichen meist weggelassen: $\sqrt{}$

Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 heißt Kubikwurzel oder 3. Wurzel.

Ab dem Wurzelexponent 4 wird der Wurzelname nur noch mit dem Wurzelexponent gebildet, also 4. Wurzel ($\sqrt[4]{}$), 5. Wurzel ($\sqrt[5]{}$) usw.

Außer beim Wurzelexponenten 2 muss der Wurzelexponent immer geschrieben werden.

Wurzeln in Potenzschreibweise

Ein Wurzelausdruck kann auch in Potenzschreibweise geschrieben werden. Dem Wurzeloperator entspricht ein Potenzbruch.

Der Zähler des Potenzbruchs ist der Exponent der Basis und sein Nenner ist der Wurzelexponent.

Da das Wurzelzeichen die Umkehrung des Potenzierens ist, heben sich Radizieren und Potenzieren mit demselben Exponenten auf.

In umgekehrter Reihenfolge gilt das bei negativen Zahlen nicht immer!

Berechnen von Wurzelzahlen

Der Wurzelwert von Wurzelzahlen wird mit dem Taschenrechner berechnet.

Zur Berechnung von Quadratwurzeln haben die Taschenrechner eine Quadratwurzeltaste, z.B. $\sqrt{}$ oder \sqrt{x} .

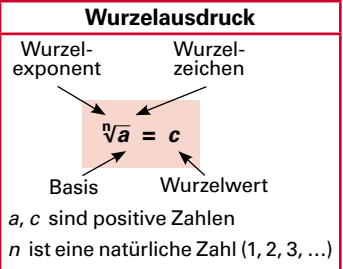
Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten werden mit den entsprechenden Rechnerastern berechnet, z.B. $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ oder $\text{INV } \sqrt{x}$.

Beispiel: Potenzieren
 $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Beispiel: Wurzelziehen
 $x^2 = 25$; $x = ?$

Schreibweise mit Wurzelzeichen:
 $\sqrt[3]{25} = ?$

Lösung: $\sqrt[3]{25} = 5$, da $5^2 = 25$



Beispiel: Quadratwurzel
 $\sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$
 (sprich: Wurzel aus 36 ist 6)

Beispiel: Kubikwurzel
 $\sqrt[3]{64} = 4$ (da $4^3 = 64$)
 (sprich: Kubikwurzel oder 3. Wurzel aus 64 ist 4)

Beispiel: 4. Wurzel
 $\sqrt[4]{16} = 2$ (da $2^4 = 16$)

Wurzel als Potenzausdruck

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

Aufheben des Wurzelziehens

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Beispiel: $(\sqrt[3]{64})^3 = 64$

Beispiele: Es sind zu berechnen:
 a) $\sqrt{529}$; b) $\sqrt[4]{39,0625}$

a) Eingabe	\sqrt{x}	529	$=$	
Anzeige	$\sqrt{}$	$\sqrt{529}$		23.00000

b) Eingabe	4	\sqrt{x}	39,0625	$=$	
Anzeige	4	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[4]{39.0625}$		2.500016

Rechenregeln beim Wurzelziehen	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Wurzeln Es können nur Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten und gleicher Basis (so genannte gleichnamige Wurzeln) addiert oder subtrahiert werden. Man klammert die gleichnamige Wurzel aus und addiert bzw. subtrahiert die Beizahlen (Koeffizienten).	$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y) \cdot \sqrt[n]{a}$	$5 \cdot \sqrt[3]{125} + 12 \cdot \sqrt[3]{125} - 14 \cdot \sqrt[3]{125} = (5 + 12 \dots 14) \cdot \sqrt[3]{125}$ $3 \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$
Radizieren von Produkten Ein Produkt wird radiziert, indem <ul style="list-style-type: none"> entweder der Produktwert radiziert wird oder jeder einzelne Faktor des Produkts radiziert wird. 	$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$	$\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{2916} = 54$ oder $\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{81} = 6 \cdot 9 = 54$
Radizieren von Quotienten (Brüchen) Ein Quotient wird radiziert, indem <ul style="list-style-type: none"> entweder der Quotientenwert radiziert wird oder Zähler und Nenner getrennt radiziert werden. 	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{64}{16}} = \sqrt[4]{4} = 2$ oder $\sqrt[4]{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{2}{2} = 1$
Radizieren von Potenzen Eine Potenz wird radiziert, indem man <ul style="list-style-type: none"> die Wurzel aus der Basis zieht und den Wurzelwert mit dem Exponenten der Basis potenziert oder die Wurzel in Potenzschreibweise umwandelt. 	$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$ $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	$\sqrt{9^4} = (\sqrt{9})^4 = 3^4 = 81$ $\sqrt{9^4} = \sqrt[2]{9^4} = 9^2 = 81$
Radizieren von Summen und Differenzen Eine Summe oder eine Differenz kann nur radiziert werden, wenn vorher der Summenwert zahlenmäßig ausgerechnet oder zu einem Produkt zusammengefasst wurde.	$\sqrt[n]{a + b} = \sqrt[n]{(a + b)}$	$\sqrt[3]{81 + 44} = \sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt{289 - 145} = \sqrt{144} = 12$ $\sqrt{39x^2 y^2 + 25x^2 y^2} = \sqrt{64x^2 y^2} = 8xy$

Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln

1. Berechnen Sie den Wurzelwert

a) $\sqrt{45796}$ b) $\sqrt{0,0065324}$ c) $\sqrt{1432,6225}$ d) $\sqrt[3]{39,785}$ e) $\sqrt[4]{42,424}$ f) $\sqrt{\pi}$

2. Berechnen Sie, nachdem Sie möglichst weit zusammengefasst haben

a) $2,8 \cdot \sqrt{3} + 1,9 \cdot \sqrt{5} - 2,1 \cdot \sqrt{5} - 1,6 \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{216} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{125} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22,5}$
 d) $(7 + \sqrt[4]{3}) \cdot (7 - \sqrt[4]{3})$ e) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ f) $\frac{5}{\sqrt[3]{343}}$ g) $\frac{7x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\sqrt[3]{27^4}$ i) $125^{\frac{2}{3}}$

3. Berechnen Sie

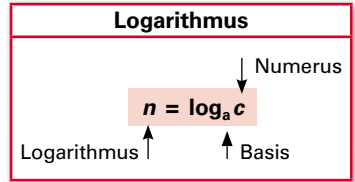
a) $\sqrt{1444 \cdot 729}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27}$ c) $\sqrt{64^2}$ d) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{2560}}{\sqrt[3]{5}}$ f) $\sqrt[4]{81^6}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}$
 h) $4,3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3,8 \cdot \sqrt[3]{343}$ i) $1\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ j) $\sqrt{\left(\frac{3,9 \text{ m} - 2,7 \text{ m}}{3}\right)^2 + (0,3 \text{ m})^2}$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.1 Definition des Logarithmus

Soll in einem Potenzausdruck $a^n = c$ der unbekannte Exponent n bestimmt werden, so ist das dazu erforderliche Rechenverfahren das **Logarithmieren** (engl. logarithm).

Der Logarithmus ist der Exponent n , mit dem die Basis a potenziert werden muss, um den Numerus c zu erhalten.



Man schreibt: $n = \log_a c$. Man spricht: n ist gleich dem Logarithmus von c zur Basis a .

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Potenzrechnung, der Wurzelrechnung und dem Logarithmieren:

Bei der Potenzrechnung :	Berechnet wird der Potenzwert c :	$c = a^n$	z. B.	$100 = 10^2$
Bei der Wurzelrechnung :	Berechnet wird die Basis a :	$a = \sqrt[n]{c}$	z. B.	$10 = \sqrt[2]{100}$
Beim Logarithmieren :	Berechnet wird der Exponent n :	$n = \log_a c$	z. B.	$2 = \log_{10} 100$

Beispiele für Logarithmen

$\log_2 8 = 3$	da $2^3 = 8$;	$\log_2 32 = 5$	da $2^5 = 32$
$\log_3 9 = 2$	da $3^2 = 9$;	$\log_3 27 = 3$	da $3^3 = 27$
$\log_5 25 = 2$	da $5^2 = 25$;	$\log_5 125 = 3$	da $5^3 = 125$
$\log_{10} 10 = 1$	da $10^1 = 10$;	$\log_{10} 100 = 2$	da $10^2 = 100$
$\log_{10} 1000 = 3$	da $10^3 = 1000$	$\log_{10} 10000 = 4$	da $10^4 = 10000$
$\log_{10} 0,1 = -1$	da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1$	$\log_{10} 0,01 = -2$	da $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$

Logarithmensysteme

Alle Logarithmen einer Basis bilden ein Logarithmensystem. Als Basis kann außer 0 und 1 jede positive Zahl verwendet werden.

In den Naturwissenschaften und der Technik sind zwei Logarithmensysteme in Gebrauch.

Das Logarithmensystem mit der Basis 10 ist rechnerisch am einfachsten zu handhaben und deshalb das in der Technik und den Naturwissenschaften übliche Logarithmensystem.

Logarithmen der Basis 10 werden **dekadische Logarithmen** oder **Brigg'sche Logarithmen** genannt. Man schreibt sie entweder \log_{10} oder vereinfacht nur **log** oder **lg**.

Auf der Taschenrechnerastatur berechnet man dekadische Logarithmen mit der Taste **log** oder **LOG**.

In den Naturwissenschaften, wie z. B. der Chemie oder Physik, wird außerdem ein Logarithmensystem mit der Basis e angewandt: \log_e . Es wird **natürlicher Logarithmus** genannt und abgekürzt **ln** geschrieben.

(e , die sogenannte Euler-Zahl, ist eine Zahl, die zur Beschreibung natürlicher Wachstumsvorgänge benutzt wird. Sie beträgt $e = 2,7182818\dots$; mit unendlich vielen Stellen.)

Auf dem Taschenrechner berechnet man natürliche Logarithmenwerte mit der Taste **lnx** oder **LN**.

Die Logarithmen der beiden Systeme können mit einem Faktor ineinander umgerechnet werden (siehe rechts).

Umrechnen der Logarithmen

$$\lg x = 0,4342945 \cdot \ln x$$

$$\ln x = 2,3029851 \cdot \lg x$$

Beispiel: Es soll der natürliche Logarithmus (ln) der Zahl 126 mit einem Taschenrechner ermittelt werden, der nur eine **log**-Taste besitzt.

Lösung: Mit der **log**-Taste wird bestimmt: $\lg 126 = 2,1003705$

Mit der Umrechnungsgleichung folgt:

$$\ln 126 = 2,3025851 \cdot \lg 126 = 2,3025851 \cdot 2,1003705 = \mathbf{4,8362819}$$