



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Chemieberufe

**Lösungsvorschläge
für die Aufgaben im Buch**

Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe

Eckhard Ignatowitz, Henrik Althaus, Ernst Bartels, Holger Rapp

8. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr. 71764

Autoren in alphabetischer Reihenfolge:

Dr. Henrik Althaus, OStR	Stade
Dr. Ernst Bartels, StD	Hannover
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR a. D.	Waldbronn
Holger Rapp, Dipl.-Ing.	Waldbronn

Autoren bis zur 6. Auflage:

Dr. Klaus Brink, StR †	Leverkusen
Gew.-Lehrer Gerhard Fastert, OStR †	Stade

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:

Dr. Eckhard Ignatowitz

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Vorwort und Hinweise für den Benutzer:

Das vorliegende Buch enthält Lösungsvorschläge für sämtliche Aufgaben im Buch „Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe“. Teilweise wurde für eine Aufgabe sowohl ein Lösungsweg mit Größengleichungen und ein Lösungsweg mit Schlussrechnung ausgeführt.

Die Lösungsvorschläge sind in derselben Reihenfolge wie die Aufgaben im Buch „Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe“ (TML) angeordnet. Die Seitenzahl von TML ist jeweils in den Kapitelüberschriften und am Außenrand einer jeden Buchseite angegeben.

Das Auffinden des Lösungsvorschlags einer bestimmten Aufgabe ist mithilfe des Inhaltsverzeichnis und der TML-Seitenzahl leicht möglich.

8. Auflage 2022

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-8085-8384-5

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2022 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Ertstadt
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald
Umschlagfoto: © angellodeo – stock.adobe.com
Druck: ITC Print, 1035 Riga (Lettland)

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen 7

1.1	Zahlenarten	7
1.3	Grundrechnungsarten	7
1.3.1	Addieren und Subtrahieren	7
1.3.2	Multiplizieren	7
1.3.3	Dividieren	8
1.4	Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke	8
1.5	Bruchrechnen	9
1.6	Rechnen mit Potenzen	12
1.7	Rechnen mit Wurzeln	13
1.8	Rechnen mit Logarithmen	14
1.8.2	Berechnen dekadischer Logarithmen	14
1.8.3	Berechnen natürlicher Logarithmen	14
1.8.4	Logarithmengesetze	14
1.8.5	Logarithmieren bei der pH-Wert-Berechnung	15
1.9	Lösen von Gleichungen	15
1.9.1	Lineare Bestimmungsgleichungen	15
1.9.2	Quadratische Bestimmungsgleichungen	16
1.9.3	Wurzelgleichungen	19
1.9.4	Exponentialgleichungen	20
1.9.5	Umstellen von Größengleichungen	21
1.10	Rechnen mit Winkeln und Winkelfunktionen	22
1.11	Berechnungen mit dem Dreisatz	23
1.12	Berechnungen mit Proportionen	24
1.13	Berechnungen mit Anteilen	24
	Gemischte Aufgaben zu: 1 Mathematische Grundlagen und praktisches Rechnen	25

2 Auswertung von Messwerten und Prozessdaten 38

2.1	Messtechnik in der Chemie	38
2.1.1	Grundbegriffe der Messtechnik, Messunsicherheit, Messgenauigkeit	38
2.2	Rechnen mit Messwerten	38
2.3	Auswertung von Messwertreihen	39
2.4	Darstellung von Messergebnissen	40
2.4.1	Messwerte in Wertetabellen	40
2.4.2	Grafische Darstellung von Messwerten	41
2.4.3	Arbeiten mit Diagrammen in der Chemie	42
2.4.4	Funktionsgraphen	44
2.4.5	Linearisieren einer Kurve	45
2.4.6	Verwendung grafischer Papiere	46
2.5	Versuchs- und Prozessdatenauswertung mit dem Computer	50

2.5.1	Das Tabellenkalkulationsprogramm Excel®	50
2.5.2	Auswertung von Messreihen mit Excel®	50
2.5.3	Diagramme zeichnen mit Excel®	52
2.5.4	Regressionsanalyse mit Excel®	54
	Gemischte Aufgaben zu: 2 Auswertung von Messwerten und Prozessdaten	56

3 Ausgewählte physikalische Berechnungen 69

3.1	Größen, Zeichen, Einheiten, Umrechnungen	69
3.2	Berechnung von Längen, Flächen, Oberflächen und Volumina	71
3.2.1	Längenberechnung	71
3.2.2	Umfangs- und Flächenberechnung	71
3.2.3	Oberflächen- und Volumenberechnung	73
3.3	Berechnung von Masse, Volumen und Dichte	74
3.4	Bewegungsvorgänge	78
3.5	Strömende Medien in Rohrleitungen	80
3.6	Kräfte	81
3.7	Arbeit	82
3.8	Leistung	83
3.9	Energie	84
3.10	Wirkungsgrad	85
3.11	Druck und Druckarten	86
3.12	Druck in Flüssigkeiten	86
3.13	Auftriebskraft	88
3.14	Gaskinetik	89
3.15	Druck in Gasen, Gasgesetze	90
3.16	Sättigungsdampfdruck, Partialdruck	90
3.17	Luftfeuchtigkeit	91

	Gemischte Aufgaben zu: 3 Ausgewählte physikalische Berechnungen	92
--	---	----

4 Stöchiometrische Berechnungen 97

4.2	Aufbau der chemischen Elemente	97
4.3	Symbole und Ziffern in chemischen Formeln	97
4.4	Quantitäten von Stoffportionen	99
4.5	Zusammensetzung von Verbindungen und Elementen	101
4.6	Empirische Formel, Molekülformel (Teilchenformel)	104
4.6.1	Berechnung der empirischen Formel einer Verbindung	104
4.6.2	Berechnung der Molekülformel einer Verbindung	105

4.6.3	Ermittlung der Molekülformel mit der Elementaranalyse	107
	Gemischte Aufgaben zu 4.6: Empirische Formel, Molekülformel (Teilchenformel)	108
4.7	Berechnungen mit Gasportionen	110
4.7.1	Gase bei Normbedingungen	110
4.7.2	Gasportionen bei beliebigen Drücken und Temperaturen	112
4.7.3	Bestimmung der molaren Masse aus der allgemeinen Gasgleichung	114
4.7.4	Dichte einer Gasportion	114
4.8	Rechnen mit Reaktionsgleichungen	115
4.8.1	Aufbau von Reaktionsgleichungen	115
4.8.2	Aufstellen von Reaktionsgleichungen	115
4.8.3	Oxidationszahlen	116
4.8.4	Aufstellen von Redox-Gleichungen	117
	Gemischte Aufgaben zu: 4.8 Rechnen mit Reaktionsgleichungen	122
4.9	Umsatzberechnung bei chemischen Reaktionen	122
4.9.1	Umsatzberechnung bei Einsatz reiner Stoffe	122
4.9.2	Umsatzberechnung bei Einsatz verunreinigter oder gelöster Stoffe	125
4.9.3	Umsatzberechnung bei Gasreaktionen	130
4.9.4	Umsatzberechnung unter Berücksichtigung der Ausbeute	133
	Gemischte Aufgaben zu: 4.9 Umsatzberechnung	135
4.10	Kernreaktionen	141
5	Rechnen mit Gehaltsgrößen von Mischungen	142
5.1	Gehaltsgrößen von Mischungen	142
5.1.1	Massenanteil w	142
5.1.2	Volumenanteil φ	144
5.1.3	Stoffmengenanteil χ	145
	Gemischte Aufgaben zu Rechnen mit Anteilen	146
5.1.4	Umrechnung der verschiedenen Anteile	150
5.1.5	Massenkonzentration β	153
5.1.6	Volumenkonzentration σ	153
5.1.7	Stoffmengenkonzentration c , Äquivalentkonzentration $c(1/z^*X)$	154
5.1.8	Umrechnen der verschiedenen Konzentrationen	155
	Gemischte Aufgaben zum Rechnen mit Konzentrationen	156
5.1.9	Löslichkeit L^*	159
5.2	Umrechnen von Anteilen – Konzentrationen – Löslichkeiten	161
5.2.1	Umrechnung Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Stoffmengenkonzentration $c(X)$	161
5.2.2	Umrechnung Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Massenkonzentration $\beta(X)$	162
5.2.3	Umrechnung Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Volumenkonzentration $\sigma(X)$	164
5.2.4	Umrechnung Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Löslichkeit $L^*(X)$	164
	Gemischte Aufgaben zu: 5.2 Umrechnen der Gehaltsgrößen	166
5.3	Mischen, Verdünnen und Konzentrieren von Lösungen	170
	Mischen und Verdünnen von Lösungen	170
5.3.3	Volumenberechnung beim Mischen von Lösungen	172
5.3.4	Konzentrieren von Lösungen	172
	Gemischte Aufgaben zu: Rechnen mit Mischphasen	176
6	Berechnungen zum Verlauf chemischer Reaktionen	185
6.1	Die Reaktionsgeschwindigkeit	185
6.2	Beeinflussung der Reaktionsgeschwindigkeit	186
6.2.1	Einfluss der Konzentration auf die Reaktionsgeschwindigkeit	186
6.2.2	Grafische Ermittlung der Reaktionsordnung	187
6.2.3	Einfluss der Temperatur auf die Reaktionsgeschwindigkeit	190
	Aufgaben zu 6.4 und 6.5 Massenwirkungsgesetz	192
6.6	Verschiebung der Gleichgewichtslage	195
7	Rechnen mit Ionengleichgewichten	198
7.1	Protolysegleichgewichte	198
7.1.1	Protolysegleichgewicht des Wassers	198
7.1.2	Der pH-Wert	198
7.1.3	pH-Wert starker Säuren und Basen	200
7.1.4	Dissoziationsgrad α , Protolysegrad	202
7.1.5	Säure- und Basenkonstante	203
7.1.6	pH-Wert schwacher Säuren und Basen	205
7.1.7	pH-Wert mehrprotoniger Säuren	206
7.1.8	Das Ostwald'sche Verdünnungsgesetz	208
7.1.9	pH-Wert von Pufferlösungen	210
7.1.10	Lage von Protolysegleichgewichten	212
7.2	Löslichkeitsgleichgewichte	214
	Gemischte Aufgaben zu: 7 Ionengleichgewichte	217
8	Analytische Bestimmungen	226
8.1	Gravimetrie	226
8.1.1	Feuchtigkeits- und Trockengehaltsbestimmungen von Feststoffen	226
8.1.2	Bestimmung des Wassergehalts in Ölen	227
8.1.3	Glührückstandsbestimmungen	227
8.1.4	Thermogravimetrie	228
8.1.5	Gravimetrische Fällungsanalysen	230

8.2	Volumetrische Bestimmungen (Maßanalyse)	232
8.2.1	Durchführung einer Maßanalyse	232
8.2.2	Maßanalyse mit aliquoten Teilen	232
8.2.3	Gehaltsangaben von Maßlösungen	232
8.2.4	Herstellen von Maßlösungen	233
8.2.5	Titer von Maßlösungen	234
8.2.6	Einstellen einer Maßlösung	235
8.2.7	Neutralisationstitrationsen	235
8.2.7.1	Direkttitrationsen	235
8.2.8	Bestimmung des Titers von Maßlösungen	238
8.2.9	Rücktitrationen	239
8.2.10	Mehrstufige Neutralisationstitrationsen	241
8.2.11	Indirekte Titration – Mehrfachbestimmung	243
8.2.12	Oleum-Bestimmungen	245
8.2.13	Redox-Titrationsen (Oxidimetrie)	249
8.2.13.1	Manganometrische Titrationsen	249
8.2.13.2	Iodometrische Titrationsen	250
8.2.14	Fällungstitrationsen	255
8.2.15	Komplexometrische Titrationsen	258
	Gemischte Aufgaben zu: 8.2 Volumetrische Bestimmungen (Maßanalyse)	258
8.3	Maßanalytische Bestimmungen mit elektrochemischen Methoden	264
8.3.1	Potentiometrische Neutralisationstitrationsen	264
8.3.2	Leitfähigkeitsstitrationsen (Konduktometrie)	268
8.4	Bestimmung von Abwasserkennwerten	272
8.4.1	Biochemischer Sauerstoffbedarf BSB	272
8.4.2	Chemischer Sauerstoffbedarf CSB	272
8.5	Bestimmung der Wasserhärte	273
8.6	Bestimmung maßanalytischer Kennzahlen von Fetten	273
8.6.1	Säurezahl SZ	273
8.6.2	Verseifungszahl VZ	274
8.6.3	Esterzahl EZ	275
8.6.4	Hydroxylzahl OHZ	275
8.6.5	Iodzahl IZ	276
	Gemischte Aufgaben zu: Maßanalytische Kennzahlen organischer Substanzen	278
8.7	Optische Analyseverfahren	280
8.7.1	UV/VIS-Spektroskopie	280
8.7.1.3	Verdünnungsstrategien bei analytischen Bestimmungen	287
8.7.2	Refraktometrie	290
8.7.3	Polarimetrie	291
8.8	Chromatografie	292
9	Statistische Methoden in Biologie und analytischer Chemie	300

10	Qualitätssicherung in der Analytischen Chemie	315
10.1	Validierung analytischer Verfahren	315
10.1.2	Untersuchung der Richtigkeit von Messwerten	315
10.1.3	Untersuchung der Präzision von Messwerten	317
10.1.3.6	Prüfung von Messwertreihen auf Ausreißer	321
10.2	Qualitätsregelkarten in der Analytischen Chemie	324
10.2.1	Erfassung der Verteilung von Messwerten	324
10.3	Qualitätsregelkarten in der Produktionsüberwachung	325
10.3.2	Regelgrenzen in Lage-Qualitätsregelkarten	325
10.3.3	Interpretation von Lage-Qualitätsregelkarten	326
10.3.4	Regelgrenzen in Streuungs-Qualitätsregelkarten	326
10.3 und 10.4	Erstellen und Führen von Qualitätsregelkarten	327
11	Berechnungen zur Elektrotechnik	334
11.1	Grundbegriffe der Elektrotechnik	334
11.2	Elektrischer Widerstand und Leitwert eines Leiters	334
11.3	Ohm'sches Gesetz	335
11.4	Reihenschaltung von Widerständen	335
11.5	Parallelschaltung von Widerständen	336
11.6	Gruppenschaltungen, Netzwerke	337
11.7	Wheatstone'sche Brückenschaltung	341
11.8	Thermische Widerstandsänderung, Widerstandsthermometer	341
11.9	Thermospannung, Thermoelement	342
11.10	Widerstandsänderung eines Leiters durch Dehnung	342
11.11	Elektrische Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad	343
	Gemischte Aufgaben zu: 11 Berechnungen zur Elektrotechnik	343
12	Elektrochemische Berechnungen	348
12.1	Elektrolytische Stoffabscheidung	348
12.2	Leitfähigkeit von Elektrolyten	349
12.3	Elektrochemische Potentiale	350
13	Berechnungen zur Wärmelehre	355
13.1	Temperaturskalen	355
13.2	Verhalten der Stoffe bei Erwärmung	355
13.2.1	Thermische Längenänderung von Feststoffen	355

13.2.2	Thermische Volumenänderung von Feststoffen	356	14.6	Bestimmung der Partikelgrößenverteilung von Schüttgütern	392
13.2.3	Thermische Volumenänderung von Flüssigkeiten	356	14.7	Auswertung einer Siebanalyse mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel®	401
13.2.4	Thermische Volumenänderung von Gasen	357	14.7.1	Rechnerische Auswertung der Siebanalyse mit Excel®	401
13.3	Wärmeinhalt von Stoffportionen	357	14.7.2	Erstellen von Diagrammen zur Siebanalyse mit Excel®	402
13.4	Aggregatzustandsänderungen	358	15	Trennen von Flüssigkeitsgemischen	406
13.4.1	Schmelzen, Erstarren	358	15.1	Destillieren	406
13.4.2	Verdampfen, Kondensieren	359	15.1.1 und 15.1.2	Dampfdruck von Flüssigkeiten und Siedeverhalten homogener Flüssigkeitsgemische	406
13.4.3	Zusammengesetzte thermische Vorgänge	359	15.1.3 bis 15.1.6	Siedediagramm, Gleichgewichtsdiagramm, einfache und fraktionierte Destillation	407
13.5	Temperaturänderung beim Mischen und Kalometrie	359	15.2	Wasserdampfdestillation	413
13.6	Temperaturänderung beim direkten Heizen und Kühlen	360	15.3	Rektifikation (Gegenstromdestillation) ..	415
13.7	Reaktionswärmen bei chemischen Reaktionen	362	15.4	Flüssig-Flüssig-Extraktion	420
13.8	Heiz- und Brennwert von Brennstoffen ..	364	16	Berechnungen mit Beschichtungsstoffen	422
13.9	Neutralisationsenthalpie	365	16.1	Gehaltsgrößen von Beschichtungsstoffen	422
13.10	Lösungsenthalpie	366	16.1.1	Massenanteile in Beschichtungsstoffen ..	422
13.11	Freie Reaktionsenthalpie, Entropie	366	16.1.2	Pigmentvolumenkonzentration PVK in Beschichtungsstoffen	423
Gemischte Aufgaben zu: 13 Berechnungen zur Wärmelehre	369		16.1.3	Pigment-Bindemittel-Massenverhältnis ..	425
14	Bestimmung von Produkteigenschaften	375	16.1.4	Umrechnung von Rezepturen	425
14.1	Bestimmung der Dichte	375	Gemischte Aufgaben zu Gehaltsgrößen von Beschichtungsstoffen	426	
14.1.1	Dichtebestimmung mit dem Pyknometer ..	375	16.2	Bestimmung der Kenngrößen von Beschichtungen	430
14.1.2	Dichtebestimmung mit Biegeschwinger-Messgeräten	376	16.3	Schichtdicke von Beschichtungen	431
14.1.3	Dichtemessung mit dem Aräometer	377	16.4	Verbrauch und Ergiebigkeit von Beschichtungsstoffen	433
14.1.4 und 14.1.5	Dichtebestimmung mit der hydrostatischen und Westphal'schen Waage	377	16.5	Maßanalytische Kennzahlen von Beschichtungsstoffen	435
14.2	Bestimmung technischer Dichten	378	16.5.1	Aminzahl, H-aktiv-Äquivalentmasse	435
14.3	Bestimmung der Viskosität	379	Aufgaben zu Isocyanatmassenanteil, Hydroxylzahl ..	436	
14.3.2	Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler	379	16.5.4	Epoxid-Äquivalentmasse, Epoxidwert	437
14.3.3 und 14.3.4	Auslauf-Viskosimeter und Rotations-Viskosimeter	380	16.6	Mischen von Zweikomponenten-Lacken (2 K-Lacke)	438
14.4	Bestimmung der Oberflächenspannung ..	382	16.6.1	2-Komponenten-Lacke mit Hydroxylgruppen und Isocyanatgruppen ..	438
14.5	Bestimmung der molaren Masse	383	16.6.2	2-Komponenten-Lacke mit Epoxid-Gruppen und aktivem Wasserstoff	439
14.5.1	Molare Masse aus den Gasgesetzen	383			
14.5.2	Molare Masse aus der Dampfdruckerniedrigung	384			
14.5.3	Molare Masse aus der Siedepunkterhöhung	385			
14.5.4	Molare Masse aus der Gefrierpunkterniedrigung	387			
14.5.5	Molare Masse aus dem osmotischen Druck	390			

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

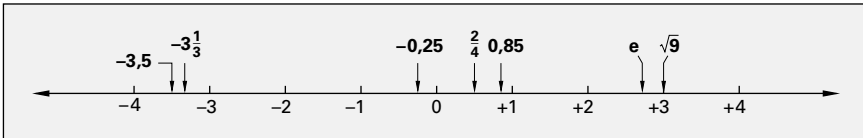
1

1.1 Zahlenarten

- | | | | | | |
|-----|---|------------|------------------------------|---------------|-----------------------|
| ► 9 | 1 | 0,7 | Dezimalzahl; | -18 | negative ganze Zahl; |
| | | $\sqrt{3}$ | Wurzelzahl | $\frac{1}{7}$ | Bruchzahl; |
| | | 0 | natürliche Zahl; | -387 | negative ganze Zahl; |
| | | $-\pi$ | negative transzendente Zahl; | -0,32 | negative Dezimalzahl. |

► 9
10
11

2



1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

- 10
- 1 $59,30a - 27,53a + 7,83b - 21,04b = 31,77a - 13,21b$
- 2 $8,3x - 7,8a + 2,5x - 9,2a = 8,3x - (7,8a - 2,5x + 9,2a)$
- 3 $25a - (36b - 19a - 11b - 12a) = 25a - 36b + 19a + 11b + 12a = 56a - 25b$
- 4 $l_1 = 4520 \text{ mm} - 65 \text{ mm} - 3015 \text{ mm} = 1440 \text{ mm}$
 $l_2 = 2880 \text{ mm} + 1220 \text{ mm} - 3240 \text{ mm} = 860 \text{ mm}$
 $l_{\text{ges}} = 4520 \text{ mm} + 820 \text{ mm} = 5340 \text{ mm}$

1.3.2 Multiplizieren

- 11
- 1 a) $(+3) \cdot (-15) = -45$ b) $(+9) \cdot (+7) = 63$
 c) $(-7) \cdot (-12) = 84$ d) $(+5) \cdot 0 = 0$
 e) $(0) \cdot (-16) = 0$ f) $(-3a) \cdot (8b) \cdot (+2c) = -48abc$
 g) $(+9x) \cdot (-4y) = -36xy$ h) $(+13 m) \cdot (+4 m) \cdot (+2 m) = 104 m^3$
- 2 a) $3(3a - 2b) = 9a - 6b$ b) $9(7u + 8v) = 63u + 72v$
 c) $(-5) \cdot (-4x - 7y) = +20x + 35y$ d) $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32) = 0$
 e) $(6c - 3d) \cdot (+2a) = 12ac - 6ad$ f) $-x(y - z) = -xy + xz$
 g) $4uv(9r - 5s) = 36uvr - 20uvs$ h) $-(4ab + 7xy) \cdot (-12) = 48ab + 84xy$
 h) $W = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot V_2 - p \cdot V_1$ j) $m_M = \varrho_M \cdot \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} \right) = \frac{\varrho_M \cdot m_1}{\varrho_1} + \frac{\varrho_M \cdot m_2}{\varrho_2}$
- 3 a) $(7s + 5r) \cdot (3l - 6k) = 21ls - 42ks + 15lr - 30kr$
 b) $5(3u - 4v) \cdot 8 \cdot (2w - 9x) = 40 \cdot (6uw - 27ux - 8vw + 36ux) = 240uw - 1080ux - 320vw + 1440vx$
 c) $(-4) \cdot (9w + 3x) \cdot (-3) \cdot (8y - 5z) = +12 \cdot (72wy - 45wz + 24xy - 15xz) = 864 wy - 540 wz + 288 xy - 180 xz$
 d) $11a(-3b + 2x) \cdot (4c - 5y) = 11a \cdot (-12bc + 15by + 8cx - 10xy) = -132abc + 165aby + 88acx - 110axy$

1

► 11
12
13

$$4 \quad 7(5-2x) \cdot (-4) \cdot (-3+6y) \quad \text{mit } x = 3 \text{ und } y = 4$$

$$7(5-6) \cdot (-4) \cdot (-3+24) = 7 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (21) = \mathbf{+588}$$

$$5 \quad \text{a) } 2ab + 2ac + 2ad = \mathbf{2a(b+c+d)}$$

$$\text{b) } \pi nr_1 + \pi nr_2 = \mathbf{\pi n(r_1 + r_2)}$$

$$\text{c) } -30rs + 20ls = \mathbf{10s(-3r+2l)}$$

$$\text{d) } \pi r_1^2 + \pi h^2 = \mathbf{\pi(r_1^2 + h^2)}$$

1.3.3 Dividieren

► 12

$$1 \quad \text{a) } 63 : (-7) = \mathbf{-9} \quad \text{b) } (-64) : (-4) = \mathbf{+16} \quad \text{c) } (-91) : 13 = \mathbf{-7}$$

$$\text{d) } \frac{105}{15} = \mathbf{7} \quad \text{e) } \frac{-96}{8} = \mathbf{-12} \quad \text{f) } \frac{-132}{-11} = \mathbf{+12}$$

$$2 \quad \text{a) } \frac{(-7) \cdot (18)}{12} = \mathbf{-10,5} \quad \text{b) } \frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)} = \mathbf{+22} \quad \text{c) } \frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)} = \mathbf{-4,5}$$

$$3 \quad \text{a) } (156 - 72) : 14 = 84 : 14 = \mathbf{6} \quad \text{b) } (391 - 144) : (121 - 102) = 247 : 19 = \mathbf{13}$$

$$4 \quad \text{a) } \frac{-12u \cdot 4}{3v} = \mathbf{-4u}$$

$$\text{b) } \frac{6a - 3b}{3} = \frac{3(2a - b)}{3} = \mathbf{2a - b}$$

$$\text{c) } \frac{81x \cdot 9}{-9x} = \mathbf{-9x}$$

$$\text{d) } \frac{-187rs + 153rs + 34rs}{-17s} = \frac{17(-11r + 9r + 2r)}{-17} = \mathbf{0}$$

$$\text{e) } \frac{21 \cdot (-9) \cdot 4x}{(-35) \cdot (-2)} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x}{7 \cdot 5 \cdot 2} = \mathbf{-\frac{54}{5}x}$$

$$\text{f) } \frac{-(x-5)}{(5-x)} = \frac{-(x-5)}{-(-5+x)} = \frac{-(x-5)}{-(x-5)} = \mathbf{1}$$

$$\text{g) } \frac{-(7x-y) \cdot (3+2b)}{-2b-3} = \frac{-(7x-y) \cdot (3+2b)}{-(3+2b)} = \mathbf{+7x - y}$$

$$5 \quad \text{a) } \frac{7a \cdot (-3)}{5b \cdot (-3)} = \frac{\mathbf{-21a}}{\mathbf{-15b}} \quad \text{b) } \frac{3x \cdot (-1)}{-8y \cdot (-1)} = \frac{\mathbf{-3x}}{\mathbf{+8y}}$$

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

► 13

$$1 \quad \text{a) } -4 \cdot (0,2 - 3,2) + (14,5 - 8,5) \cdot (-0,1) = -4 \cdot (-3) + 6 \cdot (-0,1) = 12 - 0,6 = \mathbf{11,4}$$

$$\text{b) } 12x \cdot (-3y) + (0,75x - 0,50x) \cdot (+80) = -36xy + 0,25x \cdot 80 = -36xy + 20x = \mathbf{4x(5 - 9y)}$$

$$2 \quad \text{a) } \frac{(-2,5) \cdot (86 - 82)}{(1,3 - 0,8) \cdot (42 - 38)} = \frac{-2,5 \cdot 4}{0,5 \cdot 4} = \mathbf{-5}$$

$$\text{b) } \frac{222}{37} - \frac{0,125 \cdot (-85 + 117)}{(0,4) \cdot (-8) \cdot (2,5)} = 6 - \frac{0,125 \cdot 32}{-8} = 6 + 0,5 = \mathbf{6,5}$$

$$\text{c) } 24,7 \cdot \frac{(1 - 0,392)}{(1 - 0,065)} = 24,7 \cdot 0,65027 \approx \mathbf{16,1}$$

- 3 a) $(23,8 - 21,3) \cdot \frac{2,14 + 0,86}{4,52 - 4 \cdot 0,38} = 2,5 \cdot \frac{3}{4,52 - 1,52} = \frac{7,5}{3} = 2,5$
- b) $\frac{18,06 - 17,56}{0,25} + \frac{27}{3,2 + 5,8} - \frac{(0,2 + 2,8) \cdot (5,4 - 3,4)}{2,4 \cdot 2,5} = \frac{0,5}{0,25} + \frac{27}{9} - \frac{3 \cdot 2}{6} = 2 + 3 - 1 = 4$
- 4 a) $2x - [5y - (3x - 4y) + 7x] - y$
 $= 2x - [5y - 3x + 4y + 7x] - y$
 $= 2x - 5y + 3x - 4y - 7x - y$
 $= 2x + 3x - 7x - 5y - 4y - y$
 $= -2x - 10y$
- b) $4,5a \cdot [(2b - c) - c] - 8a(c - b)$
 $= 4,5a \cdot [2b - c - c] - 8a(c - b)$
 $= 4,5a \cdot (2b - 2c) - 8a(c - b)$
 $= 4,5 \cdot 2a (b - c) + 8a(b - c)$
 $= 9a (b - c) + 8a (b - c)$
 $= 17a (b - c)$
- c) $[-0,2a - (1,7b - 1,9a)] : \left[\frac{5,5a}{10} - 0,85b + 0,3a \right]$
 $= [-0,2a + 1,9a - 1,7b] : [0,55a + 0,3a - 0,85b]$
 $= (1,7a - 1,7b) : (0,85a - 0,85b)$
 $= \frac{1,7(a - b)}{0,85(a - b)} = \frac{1,7}{0,85} = 2$
- 5 a) $2 \cdot [-2xy - (20a - 12xy)] + 5(2a - xy)$
 $= 2[-2xy - 20a + 12xy] + 5(2a - xy)$
 $= 2(-20a + 10xy) + 5(2a - xy)$
 $= -2 \cdot 10(2a - xy) + 5(2a - xy)$
 $= -15(2a - xy)$
- b) $0,3a \cdot \{5xy - (92x - 87y) - (84y - 82x)\}$
 $= 0,3a \cdot \{5xy - 92x + 87y - 84y + 82x\}$
 $= 0,3a \cdot \{5xy - 10x + 3y\}$
- c) $\{-9,5x + [(1,5x - 4y) \cdot (0,5 + 6,5)] + 29y\} \cdot \frac{1}{x + y}$
 $= \{-9,5x + [(1,5x - 4y) \cdot 7] + 29y\} \cdot \frac{1}{x + y}$
 $= \{-9,5x + 10,5x - 28y + 29y\} \cdot \frac{1}{x + y}$
 $= \{x + y\} \cdot \frac{1}{x + y} = \frac{x + y}{x + y} = 1$

1.5 Bruchrechnen

Fassen Sie zusammen

- 15 1 a) Hauptnenner bestimmen: $3 = 3$
 $4 = 2 \cdot 2$
 $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $\text{kgV} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$
- $$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{5}{24} = \frac{16}{24} + \frac{6}{24} + \frac{5}{24} = \frac{27}{24} = 1 \frac{3}{24} = 1 \frac{1}{8}$$

b) Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{array}{r} 25 = 5 \cdot 5 \\ 15 = 5 \cdot 3 \\ 3 = 3 \\ 5 = 5 \end{array}$$

$$\text{kgV} = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$$

$$\begin{aligned} \frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} &= \frac{14 \cdot 3}{25 \cdot 3} + \frac{23 \cdot 5}{15 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 25}{3 \cdot 25} + \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 15} = \frac{42}{75} + \frac{115}{75} - \frac{25}{75} + \frac{30}{75} = + \frac{162}{75} \\ &= 2 \frac{12}{75} = 2 \frac{4}{25} \end{aligned}$$

2 a) Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{array}{r} 4a = 2 \cdot 2 \cdot a \\ 12b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b \\ \text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 12ab \end{array}$$

$$\frac{7x}{4a} + \frac{5x}{12b} = \frac{7x \cdot 3b}{4a \cdot 3b} + \frac{5x \cdot a}{12b \cdot a} = \frac{21bx}{12ab} + \frac{5ax}{12ab} = \frac{21bx + 5ax}{12ab} = \frac{x(21b + 5a)}{12ab}$$

b) Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{array}{r} 3bc = 3 \cdot b \cdot c \\ 12c = 3 \cdot c \cdot 2 \cdot 2 \\ 18b = 3 \cdot b \cdot 2 \cdot 3 \\ \text{kgV} = 3 \cdot b \cdot c \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36bc \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b} &= \frac{5u \cdot 12}{3bc \cdot 12} + \frac{7u \cdot 3b}{12c \cdot 3b} - \frac{5u \cdot 2c}{18b \cdot 2c} \\ &= \frac{60u}{36bc} + \frac{21bu}{36bc} - \frac{10cu}{36bc} = \frac{60u + 21bu - 10cu}{36bc} = \frac{u(60 + 21b - 10c)}{36bc} \end{aligned}$$

Aufgaben zum Bruchrechnen

Fassen Sie zusammen

1 a) Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{array}{r} 49 = 7 \cdot 7 \\ 56 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ \text{kgV} = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 392 \end{array}$$

$$\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8} = \frac{8 \cdot 8}{49 \cdot 8} + \frac{6 \cdot 7}{56 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 49}{8 \cdot 49} = \frac{64}{392} + \frac{42}{392} - \frac{147}{392} = - \frac{41}{392}$$

b) Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{array}{r} 25 = 5 \cdot 5 \\ 10 = 5 \cdot 2 \\ 5 = 5 \\ \text{kgV} = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3 \frac{6}{25} - 18 \frac{7}{10} + 24 \frac{3}{5} &= 3 - 18 + 24 + \frac{6}{25} - \frac{7}{10} + \frac{3}{5} = 9 + \frac{6}{25} - \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \\ &= 9 + \frac{6 \cdot 2}{25 \cdot 2} - \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 10} = 9 + \frac{12}{50} - \frac{35}{50} + \frac{30}{50} = 9 + \frac{7}{50} = 9 \frac{7}{50} \end{aligned}$$

c) Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{array}{r} 2a + 3b = 2a + 3b \\ 3 = 3 \\ \text{kgV} = 3 \cdot (2a + 3b) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{8x + 4y}{4a + 6b} + \frac{9x}{9b + 6a} - \frac{5}{3} &= \frac{2(4x + 2y)}{2(2a + 3b)} + \frac{3 \cdot 3x}{3(3b + 2a)} - \frac{5}{3} = \frac{4x + 2y}{2a + 3b} + \frac{3x}{2a + 3b} - \frac{5}{3} \\ \frac{(4x + 2y) \cdot 3}{(2a + 3b) \cdot 3} + \frac{3x \cdot 3}{(2a + 3b) \cdot 3} - \frac{5 \cdot (2a + 3b)}{3 \cdot (2a + 3b)} &= \frac{12x + 6y + 9x - 10a - 15b}{3(2a + 3b)} \\ \frac{21x + 6y - 10a - 15b}{3(2a + 3b)} &= \frac{-10a - 15b + 21x + 6y}{3(2a + 3b)} \end{aligned}$$

Multiplizieren Sie

2 a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{3}}{\cancel{6} \cdot \cancel{14} \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22} = \frac{\cancel{11} \cdot \cancel{4}}{\cancel{8} \cdot \cancel{22} \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5}} = 2$

d) $1 \frac{5}{6} \cdot 3 \frac{6}{15} = \frac{11}{6} \cdot \frac{\cancel{51} \cdot \cancel{17}}{\cancel{15} \cdot 5} = \frac{187}{30} = 6 \frac{7}{30}$

e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a} = \frac{\cancel{9}ab \cdot \cancel{15}x \cdot 3 \cdot 3}{5y \cdot \cancel{12}a \cdot 4} = \frac{9bx}{4y}$

Dividieren Sie

3 a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 16} = \frac{49}{32} = 1 \frac{17}{32}$

c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15} = \frac{9 \cdot \cancel{15} \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot \cancel{12} \cdot 4} = \frac{9}{4} = 2 \frac{1}{4}$

d) $3xy : \frac{1}{2}z = \frac{3xy \cdot 2}{z} = \frac{6xy}{z}$

e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y} = \frac{\cancel{2}x \cdot \cancel{3}y}{\cancel{9}y \cdot \cancel{4}x \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v} = \frac{\cancel{26}ab \cdot \cancel{22}v \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{33}u \cdot \cancel{13}a \cdot 3} = \frac{4bv}{3u}$

Berechnen Sie bzw. fassen Sie soweit wie möglich zusammen

4 a) Hauptnenner bestimmen: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
 $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $\text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

$$14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8} \right) = 14 \cdot \left(\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} \right) = 14 \cdot \frac{14 + 15}{24} = \frac{14 \cdot 29 \cdot 7}{24 \cdot 12} = \frac{203}{12} = 16 \frac{11}{12}$$

b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22} = \frac{\cancel{42} \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{6}} + \frac{9}{22} = 49 + \frac{9}{22} = 49 \frac{9}{22}$

c) $\frac{8x+8y}{3r-3s} : \frac{4x+4y}{9r-9s} = \frac{\cancel{8}(x+y) \cdot \cancel{9}(r-s) \cdot 2 \cdot 3}{\cancel{3}(r-s) \cdot \cancel{4}(x+y)} = 6$

d) $15 = 3 \cdot 5$
 $10 = 5 \cdot 2$
 $\text{kgV} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

$$\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10} \right) \cdot 8 = \left(\frac{11 \cdot 2}{15 \cdot 2} - \frac{6 \cdot 3}{10 \cdot 3} \right) \cdot 8 = \left(\frac{22}{30} - \frac{18}{30} \right) \cdot 8 = \frac{4 \cdot 8 \cdot 2}{30 \cdot 15} = \frac{16}{15} = 1 \frac{1}{15}$$

e) $6n = 2 \cdot 3 \cdot n$
 $3m = 3 \cdot m$
 $\text{kgV} = 2 \cdot 3 \cdot n \cdot m = 6nm$

$$\frac{5a-3b}{6n} + \frac{5a-3b}{3m} = \frac{(5a-3b) \cdot m}{6n \cdot m} + \frac{(5a-3b) \cdot 2n}{3m \cdot 2n} = \frac{5am - 3bm + 10an - 6bn}{6nm}$$

f) $5 \frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10} \right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2} \right) \right] = 5 \frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5} \right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{10 \cdot 3}{2 \cdot 3} \right) \right]$
 $= 5 \frac{1}{2} - 1 \cdot \left[5 : \left(\frac{42}{6} - \frac{30}{6} \right) \right] = 5 \frac{1}{2} - \left[5 : \frac{12}{6} \right] = 5 \frac{1}{2} - [5 : 2] = 5 \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 5 \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{2} = 3$

g) $4 \frac{2}{3} \cdot 3 \frac{8}{5} = \frac{14}{3} \cdot \frac{23}{5} = \frac{14 \cdot 23}{3 \cdot 5} = \frac{322}{15} = 21 \frac{7}{15}$

h) $\left(12 : 2 \frac{2}{3} \right) : \frac{7}{9} = \left(12 : \frac{8}{3} \right) : \frac{7}{9} = \frac{12 \cdot 3}{8} : \frac{7}{9} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{81}{14} = 5 \frac{11}{14}$

$$\begin{aligned} \text{i) } & \left(\frac{u+v}{l+k} + \frac{3(u+v)}{2(l+k)} - \frac{5(u-v)}{3(k+l)} \right) \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{(u+v) \cdot 6}{(l+k) \cdot 6} + \frac{3(u+v) \cdot 3}{2(l+k) \cdot 3} - \frac{5(u-v) \cdot 2}{3(l+k) \cdot 2} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{6(u+v) + 9(u+v) - 10(u-v)}{6(l+k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15(u+v) - 10(u-v)}{6(l+k)} \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{15u + 15v - 10u + 10v}{6(l+k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5u + 25v}{6(l+k)} = \frac{5(u+5v)}{12(l+k)} \end{aligned}$$

1.6 Rechnen mit Potenzen

Potenzrechnen

- ▶ 16 1 a) $2L \cdot 4L \cdot 8L = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot L^3 = 2^6 L^3$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2$
 c) $1,5 \text{ cm} \cdot 2,3 \text{ cm} \cdot 1,4 \text{ cm} = 4,83 \text{ cm}^3$
- 2 a) $21^{2,5} = 2020,9159$ b) $(-6,3)^3 = -250,047$
 c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 128$ d) $2,4^{3,5} = 21,416 049$
- 3 a) $5000000 = 5 \cdot 1\,000\,000 = 5 \cdot 10^6$ b) $0,0023 = 23 \cdot \frac{1}{10000} = 23 \cdot 10^{-4} = 2,3 \cdot 10^{-3}$
 c) $96485 = 9,6485 \cdot 10^4$ d) $0,000082 = 8,2 \cdot 10^{-5}$

Addieren und Subtrahieren von Potenzen

- ▶ 17 1 a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2 = 4r^3 - 2r^3 + 3r^3 + 12r^2 + 3r^2 = 5r^3 + 12r^2$
 b) $12m^2 + 7m^3 - 7m^2 + 5m^3 = 7m^3 + 5m^3 + 12m^2 - 7m^2 = 12m^3 + 5m^2$
 c) $6,2x^4 + 3,4y^2 + 7,5x^4 - 3,4y^2 = 6,2x^4 + 7,5x^4 + 3,4y^2 - 3,4y^2 = 13,7x^4$
 d) $2,8\pi r^2 h + \frac{5}{4}\pi r^3 - 1,75\pi r^3 + 2,2hr^2\pi$
 $= 2,8\pi r^2 h + 2,2\pi r^2 h + 1,25\pi r^3 - 1,75\pi r^3$
 $= (2,8 + 2,2)\pi r^2 h + (1,25 - 1,75)\pi r^3 = 5\pi r^2 h - 0,5\pi r^3 = \pi(5r^2 h - 0,5r^3)$
 e) $-14,3 \cdot 7^3 + 6,9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1,1 \cdot 11^4 + 8,7 \cdot 7^3$
 $= (-14,3 + 8,7) \cdot 7^3 + (6,9 + 1,1) \cdot 11^4 + 1715 \cdot \frac{1}{7^3}$
 $= -1920,8 + 117128 + 5 = 115212,2$

Multiplizieren von Potenzen

- 2 a) $x^5 \cdot x^{-3} \cdot x^2 = x^{5-3+2} = x^4$
 b) $0,4a^4 \cdot 0,5a^5 = 0,4 \cdot 0,5a^{4+5} = 0,2a^9$
 c) $2,5 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} = 2,5^2 \cdot 10^{5-2} = 6,25 \cdot 10^3 = 6250$
 d) $(r^3 - 2,5r^2) \cdot 2r^2 = r^3 \cdot 2r^2 - 2,5r^2 \cdot 2r^2 = 2r^{3+2} - 5r^{2+2} = 2r^5 - 5r^4$
 e) $d^{0,5x} \cdot d^{7x+3} = d^{0,5x+(7x+3)} = d^{0,5x+7x+3} = d^{7,5x+3}$
 f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n} = x^{a-n+a+n} = x^{2a}$
 g) $(r+s)^2 \cdot (r+s)^3 = (r+s)^{2+3} = (r+s)^5$
 h) $(x+y)^a \cdot (x+y)^b = (x+y)^{a+b}$

Dividieren von Potenzen

- 3 a) $\frac{10^3}{10^2} = 10^{3-2} = 10^1 = 10$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3} = 10^{3+2-1-3} = 10$

$$c) \frac{225^3}{15^3} = \left(\frac{225}{15}\right)^3 = 15^3 = \mathbf{3375}$$

$$e) \frac{2r^3}{3a^2} \cdot \frac{12a^2}{16r^3} = \frac{2 \cdot 12 \cdot r^3 \cdot a^2}{3 \cdot 16 \cdot r^3 \cdot a^2} = \mathbf{0,5}$$

$$d) \frac{780 x^5}{39 y^5} = \frac{780}{39} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \mathbf{20\left(\frac{x}{y}\right)^5}$$

$$f) \frac{n^3}{x^4} : \frac{n^3 \cdot x^4}{a} = \frac{n^3 \cdot a}{x^4 \cdot n^3 \cdot x^4} = \frac{a}{x^4 \cdot x^4} = \frac{a}{x^8}$$

1

▶ 17
19**Potenzieren von Potenzen**

$$4 \text{ a) } (5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = \mathbf{5^6}$$

$$b) (10^3)^{-2} = 10^{3 \cdot (-2)} = \mathbf{10^{-6}}$$

$$c) (4^2 \cdot axy^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot x^3 \cdot y^{2 \cdot 3} = \mathbf{4^6 a^3 x^3 y^6}$$

$$d) 5 \cdot (u^2 v^3)^5 = 5u^{2 \cdot 5} \cdot v^{3 \cdot 5} = \mathbf{5u^{10} v^{15}}$$

$$e) (1^7)^2 \cdot (3^0)^3 = 1^2 \cdot 1^3 = 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$$

$$f) (7^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 = 7^{2 \cdot 3} \cdot 7^{-3} = 7^{6-3} = 7^3 = \mathbf{343}$$

Potenzieren von Summen

$$5 \text{ a) } (3+7)^3 = 10^3 = \mathbf{1000}$$

$$b) (22-17)^5 = 5^5 = \mathbf{3125}$$

$$c) (23-14)^5 = 9^5 = \mathbf{59049}$$

$$d) (5+9)^4 = 14^4 = \mathbf{38416}$$

1.7 Rechnen mit Wurzeln

$$\blacktriangleright 19 \quad 1 \text{ a) } \sqrt{45796} = \mathbf{214} \quad b) \sqrt{0,0065324} = \mathbf{0,0808233} \quad c) \sqrt{1432,6225} = \mathbf{37,85}$$

$$d) \sqrt[3]{39,785} = \mathbf{3,414} \quad e) \sqrt[4]{42,424} = \mathbf{2,552} \quad f) \sqrt{\pi} = \mathbf{1,7724539}$$

$$2 \text{ a) } 2,8 \cdot \sqrt{3} + 1,9 \cdot \sqrt{5} - 2,1 \cdot \sqrt{5} - 1,6 \cdot \sqrt{3} \\ = 2,8 \cdot \sqrt{3} - 1,6 \cdot \sqrt{3} + 1,9 \cdot \sqrt{5} - 2,1 \cdot \sqrt{5} \\ = (2,8 - 1,6)\sqrt{3} + (1,9 - 2,1)\sqrt{5} \\ = 1,2 \cdot \sqrt{3} - 0,2 \cdot \sqrt{5} \\ = 2,078461 - 0,4472136 \\ = 1,6312474 \approx \mathbf{1,631}$$

$$b) \frac{1}{5}\sqrt[3]{216} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{125} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{64} = \frac{1}{5} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{6}{5} + \frac{10}{3} - 2 = \frac{18}{15} + \frac{50}{15} - \frac{30}{15} = \mathbf{\frac{38}{15}}$$

$$c) \sqrt{10} \cdot \sqrt{22,5} = \sqrt{10 \cdot 22,5} = \sqrt{225} = \mathbf{15}$$

$$d) (7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 13,9282 \cdot 5,6839 = 79,1669 \approx \mathbf{79,2}$$

$$e) \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$f) \frac{5}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$$

$$g) \frac{7x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = 7x \cdot \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = 7x \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = 7x \sqrt[3]{27} = 7x \cdot 3 = \mathbf{21x}$$

$$h) \sqrt[3]{27^4} = \sqrt[3]{(3^3)^4} = 3^{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}} = 3^4 = \mathbf{81}$$

$$i) 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 5^2 = \mathbf{25}$$

- 3 a) $\sqrt{1444 \cdot 729} = \sqrt{1444} \cdot \sqrt{729} = 38 \cdot 27 = \mathbf{1026}$
 b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{105^3} = \mathbf{105}$
 c) $\sqrt{64^2} = (\sqrt{64})^2 = 8^2 = \mathbf{64}$ oder $\sqrt{64^2} = 64^{\frac{2}{2}} = 64^1 = \mathbf{64}$
 d) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = 3 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{1}$
 e) $\sqrt[3]{\frac{2560}{5}} = \sqrt[3]{\frac{2560}{5}} = \sqrt[3]{512} = \mathbf{8}$
 f) $\sqrt[4]{81^6} = (\sqrt[4]{81})^6 = 3^6 = \mathbf{729}$ oder
 $\sqrt[4]{81^6} = 81^{\frac{6}{4}} = 81^{\frac{3}{2}} = 81^1 \cdot 81^{\frac{1}{2}} = 81 \cdot \sqrt{81} = 81 \cdot 9 = \mathbf{729}$
 g) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{49}}$
 h) $4,3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3,8 \cdot \sqrt[3]{343} = (4,3 - 3,8) \cdot \sqrt[3]{343} = 0,5 \cdot 7 = \mathbf{3,5}$
 i) $1\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \left(1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} - 3\right) \cdot \sqrt{3} = (4 - 3) \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \mathbf{\sqrt{3}}$
 j) $\sqrt{\left(\frac{3,9 \text{ m} - 2,7 \text{ m}}{3}\right)^2 + (0,3 \text{ m})^2} = \sqrt{\left(\frac{1,2 \text{ m}}{3}\right)^2 + 0,09 \text{ m}^2} = \sqrt{0,16 \text{ m}^2 + 0,09 \text{ m}^2}$
 $= \sqrt{0,25 \text{ m}^2} = \mathbf{0,5 \text{ m}}$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.2 Berechnen dekadischer Logarithmen

► 21 Bestimmen Sie den dekadischen Logarithmus

- a) $\lg 2320 = \mathbf{3,365488}$ b) $\lg 0,873 = \mathbf{-0,0589858}$ c) $\lg 11,3 = \mathbf{1,0530784}$
 d) $\lg 0,990 = \mathbf{-0,0043648}$ e) $\lg 0,01 = \mathbf{-2}$ f) $\lg 0,5352 = \mathbf{-0,2714839}$
 g) $\lg 120000 = \mathbf{5,0791812}$

Bestimmen Sie den Numerus

- a) $\lg x = 0,752 \Rightarrow x = 10^{0,752} = \mathbf{5,6493697}$
 b) $\lg x = 10,25 \Rightarrow x = 10^{10,25} = \mathbf{1,7783 \cdot 10^{10}}$

1.8.3 Berechnen natürlicher Logarithmen

Bestimmen Sie den natürlichen Logarithmus

- a) $\ln 20 = \mathbf{2,9957323}$ b) $\ln 1000 = \mathbf{6,9077553}$
 c) $\ln 0,001 = \mathbf{-6,9077553}$ d) $\ln 580 = \mathbf{6,3630281}$

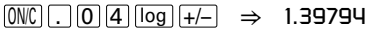
1.8.4 Logarithmengesetze

► 22 Bestätigen Sie die Logarithmengesetze

- a) $\lg (147 \cdot 717 \cdot 873) = \lg 92013327 = \mathbf{7,9638507}$ oder
 $\lg (147 \cdot 717 \cdot 873) = \lg 147 + \lg 717 + \lg 873 = 2,1673173 + 2,8555192 + 2,9410142$
 $= \mathbf{7,9638507}$

- b) $\lg \frac{4,38 \cdot 2,19}{871 \cdot 2,52} = \lg (4,370\ 182\ 1 \cdot 10^{-3}) = -2,359\ 500\ 5$ oder
 $\lg \frac{4,38 \cdot 2,19}{871 \cdot 2,52} = \lg 4,38 + \lg 2,19 - \lg 871 - \lg 2,52$
 $= 0,641\ 474\ 1 + 0,340\ 444\ 1 - 2,940\ 018\ 2 - 0,041\ 400\ 5 = -2,359\ 500\ 5$
- c) $\lg (0,97^7 \cdot 2,82^{3,5}) = \lg (0,807\ 982\ 8 \cdot 37,659\ 268) = \lg 30,428\ 042 = 1,483\ 274$ oder
 $\lg (0,97^7 \cdot 2,82^{3,5}) = \lg 0,97^7 + \lg 2,82^{3,5} = 7 \cdot \lg 0,97 + 3,5 \cdot \lg 2,82$
 $= 7 \cdot (-0,013\ 228\ 3) + 3,5 \cdot 0,450\ 249\ 1 = -0,092\ 598\ 1 + 1,575\ 871\ 9 = 1,483\ 273\ 8$
- d) $\ln \sqrt[5]{65,931} = \ln 2,311 = 0,838$ oder
 $\ln \sqrt[5]{65,931} = \ln 65,931^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \ln 65,931 = \frac{1}{5} \cdot 4,189 = 0,838$

1.8.5 Logarithmieren bei der pH-Wert-Berechnung

- a) $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 0,040$ mol/L
 $\Rightarrow \text{pH} = -\lg c(\text{H}_3\text{O}^+) = -\lg 0,040 = +1,397\ 94 \approx 1,4$

- b) $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 8,5 \cdot 10^{-12}$ mol/L
 $\Rightarrow \text{pH} = -\lg (8,5 \cdot 10^{-12}) = -(-11,070\ 581) \approx 11$
- c) $c(\text{H}_3\text{O}^+) = 6,83 \cdot 10^{-5}$ mol/L
 $\Rightarrow \text{pH} = -\lg (6,83 \cdot 10^{-5}) = -(-4,165\ 579\ 3) \approx 4,17$
- d) $\text{pH} = 2,67$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-2,67} \text{ mol/L} = 0,002\ 138 \text{ mol/L} \approx 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$
- e) $\text{pH} = 7,51$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-7,51} \text{ mol/L} \approx 3,09 \cdot 10^{-8} \text{ mol/L}$
- f) $\text{pH} = 3,7$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-3,7} \text{ mol/L} = 0,000\ 1995 \text{ mol/L} \approx 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L}$
- g) $\text{pH} = 10,2$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-10,2} \text{ mol/L} = 6,309\ 5734 \cdot 10^{-11} \text{ mol/L} \approx 6,31 \cdot 10^{-11} \text{ mol/L}$
- h) $\text{pH} = 0,94$
 $\Rightarrow c(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/L} = 10^{-0,94} \text{ mol/L} = 0,114\ 8154 \text{ mol/L} \approx 0,11 \text{ mol/L}$

1.9 Lösen von Gleichungen

1.9.1 Lineare Bestimmungsgleichungen

- 23 1 $8,5x + 4,75 = 9$
 $8,5x = 9 - 4,75$
 $x = \frac{4,25}{8,5}$
 $x = \frac{1}{2}$
- 2 $\frac{3x}{7} = 12$
 $3x = 12 \cdot 7$
 $x = \frac{12 \cdot 7}{3}$
 $x = 28$
- 3 $\frac{7}{x} = \frac{112}{8}$
 $\frac{x}{7} = \frac{8}{112}$
 $x = \frac{8 \cdot 7}{112}$
 $x = 0,5$
- 4 $\frac{23-x}{12} = 2$
 $23-x = 2 \cdot 12$
 $-x = 24 - 23$
 $-x = 1$
 $x = -1$
- 5 $\frac{x-2}{3} = \frac{x}{5}$
 $5(x-2) = 3x$
 $5x - 10 = 3x$
 $2x = 10$
 $x = 5$
- 6 $\frac{15x}{6} + 2,2 = -7,8$
 $\frac{15x}{6} = -7,8 - 2,2$
 $15x = -10 \cdot 6$
 $x = -\frac{60}{15}$
 $x = -4$

1

► 24

$$7 \quad 1,75x = \frac{5}{9}$$

$$x = \frac{5}{9 \cdot 1,75}$$

$$x = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 7} = \frac{20}{63}$$

$$8 \quad 21x + 184 = 57x - 32$$

$$21x - 57x = -32 - 184$$

$$-36x = -216$$

$$x = \frac{216}{36}$$

$$x = 6$$

$$9 \quad 7x - [8x + (5x - 30)] = 12$$

$$7x - [8x + 5x - 30] = 12$$

$$7x - 8x - 5x + 30 = 12$$

$$-6x = 12 - 30$$

$$x = \frac{18}{6}$$

$$x = 3$$

1.9.2 Quadratische Bestimmungsgleichungen

► 24 1 $4x^2 - 69 = 31$

$$4x^2 = 100$$

$$x^2 = 25$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

$$x_1 = +5$$

$$x_2 = -5$$

Probe: $x_1 = +5$

$$\Rightarrow 4 \cdot 5^2 - 69 = 31$$

$$100 = 100 \quad \checkmark$$

$x_2 = -5$

$$\Rightarrow 4 \cdot (-5)^2 - 69 = 31$$

$$100 = 100 \quad \checkmark$$

2 $2x^2 - 16x = 0$

$$x \cdot (2x - 16) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$2x^2 - 16 = 0$$

$$2x^2 = 16$$

$$x_2 = 8$$

Probe: $x_1 = 0$

$$\Rightarrow 2 \cdot 0 - 16 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$x_2 = 8$

$$\Rightarrow 2 \cdot 8^2 - 16 \cdot 8 = 0$$

$$128 - 128 = 0 \quad \checkmark$$

3 $x^2 - 8x - 20 = 0$

$$x_{1/2} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2 - (-20)}$$

$$= 4 \pm \sqrt{16 + 20}$$

$$= 4 \pm \sqrt{36}$$

$$= 4 \pm 6$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = -2$$

Probe: $x_1 = 10$

$$\Rightarrow 10^2 - 8 \cdot 10 - 20 = 0$$

$$100 - 80 - 20 = 0 \quad \checkmark$$

$x_2 = -2$

$$\Rightarrow (-2)^2 - 8(-2) - 20 = 0$$

$$4 + 16 - 20 = 0 \quad \checkmark$$

4 $4x^2 - 10 = 6x$

$$4x^2 - 6x - 10 = 0 \quad | :4$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(-\frac{3}{2 \cdot 2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)}$$

$$= +\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{40}{16}}$$

$$= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$= \frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}$$

$$x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = -\frac{4}{4} = -1$$

Probe: $x_1 = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10 = 6 \cdot \frac{5}{2}$$

$$4 \cdot \frac{25}{4} - 10 = \frac{30}{2}$$

$$25 - 10 = 15 \quad \checkmark$$

$x_2 = -1$

$$\Rightarrow 4 \cdot (-1)^2 - 10 = 6 \cdot (-1)$$

$$4 \cdot 1 - 10 = -6$$

$$4 - 10 = -6 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & 3x^2 - 15x = -18 \\ & 3x^2 - 15x + 18 = 0 \quad | :3 \\ & x^2 - 5x + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_1 &= \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad & -40x - 100 = -5x^2 \\ 5x^2 - 40x - 100 &= 0 \quad | :5 \\ x^2 - 8x - 20 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2 - (-20)} \\ &= +4 \pm \sqrt{16 + 20} \\ &= +4 \pm \sqrt{36} \\ &= +4 \pm 6 \\ x_1 &= +4 + 6 = 10 \\ x_2 &= +4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad & 0,3 = -x - 0,6x^2 \\ 0,6x^2 + x + 0,3 &= 0 \\ \frac{3}{5}x^2 + x + \frac{3}{10} &= 0 \quad | \cdot \frac{5}{3} \\ x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{5}{3 \cdot 2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3 \cdot 2}\right)^2 - \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{18}{36}} \\ &= -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{7}{36}} \\ &= -\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{7} \\ &= -\frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{7}) \\ x_1 &= -\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) \\ x_2 &= -\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &= 3 \\ &\Rightarrow 3 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 = -18 \\ &27 - 45 = -18 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \\ &\Rightarrow 3 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 = -18 \\ &12 - 30 = -18 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &= 10 \\ &\Rightarrow -40 \cdot 10 - 100 = -5 \cdot 10^2 \\ &-400 - 100 = -5 \cdot 100 \\ &-500 = -500 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -2 \\ &\Rightarrow -40 \cdot (-2) - 100 = -5 \cdot (-2)^2 \\ &+80 - 100 = -5 \cdot 4 \\ &-20 = -20 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x_1 &= -\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) \\ &\Rightarrow 0,3 = +\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) - 0,6 \left[-\frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) - \frac{0,6}{36}(5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} + 7) \\ &= \frac{1}{6}(5 - \sqrt{7}) - \frac{1}{60}(32 - 10 \cdot \sqrt{7}) \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{7} - \frac{32}{60} + \frac{1}{6}\sqrt{7} \\ &= \frac{50}{60} - \frac{32}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) \\ &\Rightarrow 0,3 = +\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) - 0,6 \left[-\frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) - \frac{0,6}{36}(25 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} + 7) \\ &= \frac{1}{6}(5 + \sqrt{7}) - \frac{1}{60}(32 + 10 \cdot \sqrt{7}) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{7} - \frac{32}{60} - \frac{1}{6}\sqrt{7} \\ &= \frac{50}{60} - \frac{32}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad & -3x^2 = 39x + 18,75 \\
 & -3x^2 - 39x - 18,75 = 0 \quad | : (-3) \\
 & x^2 + 13x + 6,25 = 0 \\
 & x_{1/2} = -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 6,25} \\
 & = -6,5 \pm \sqrt{42,25 - 6,25} \\
 & = -6,5 \pm \sqrt{36} \\
 & = -6,5 \pm 6 \\
 & x_1 = -6,5 + 6 = -0,5 \\
 & x_2 = -6,5 - 6 = -12,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } x_1 &= -0,5 \\
 \Rightarrow & -3 \cdot (-0,5)^2 = 39 \cdot (-0,5) + 18,75 \\
 & -3 \cdot 0,25 = -19,5 + 18,75 \\
 & -0,75 = -0,75 \quad \checkmark \\
 x_2 &= -12,5 \\
 \Rightarrow & -3 \cdot (-12,5)^2 = 39 \cdot (-12,5) + 18,75 \\
 & -3 \cdot 156,25 = -487,5 + 18,75 \\
 & -468,75 = -468,75 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & x^2 - 4x + 2,25 = x \\
 & x^2 - 4x - x + 2,25 = 0 \\
 & x^2 - 5x + 2,25 = 0 \\
 & x_{1/2} = -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2,25} \\
 & = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} \\
 & = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4}} \\
 & = \frac{5}{2} \pm \frac{4}{2} \\
 x_1 &= \frac{5}{2} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2} \\
 x_2 &= \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } x_1 &= \frac{9}{2} \\
 \Rightarrow & \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{9}{2} + 2,25 = \frac{9}{2} \\
 & \frac{81}{4} - \frac{36}{2} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \\
 & \frac{18}{4} = \frac{18}{4} \quad \checkmark \\
 x_2 &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow & \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 2,25 = \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{4} - 2 + 2,25 = \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{4} + 0,25 = \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad & (3-x) \cdot (1-x) = x-1 \\
 & 3-3x-x+x^2 = x-1 \\
 & x^2-5x+4 = 0 \\
 & x_{1/2} = -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\
 & = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
 & = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
 & = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
 x_1 &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\
 x_2 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } x_1 &= 4 \\
 \Rightarrow & (3-4) \cdot (1-4) = 4-1 \\
 & (-1) \cdot (-3) = 3 \\
 & 3 = 3 \quad \checkmark \\
 x_2 &= 1 \\
 \Rightarrow & (3-1) \cdot (1-1) = 1-1 \\
 & 2 \cdot 0 = 0 \\
 & 0 = 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad & 2 \cdot (2-x) \cdot (1-x) = x^2 \\
 & 2 \cdot (2-2x-x+x^2) = x^2 \\
 & 4-6x+2x^2 = x^2 \\
 & x^2-6x+4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{1/2} &= -\left(-\frac{6}{2}\right) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4} \\
 &= 3 \pm \sqrt{9-4} \\
 &= 3 \pm \sqrt{5} \\
 \mathbf{x_1} &= \mathbf{3 + \sqrt{5}} \\
 \mathbf{x_2} &= \mathbf{3 - \sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Probe: } x_1 = 3 + \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 2 \cdot [2 - (3 + \sqrt{5})] \cdot [1 - (3 + \sqrt{5})] = (3 + \sqrt{5})^2 \\
 &2 \cdot [2 - 3 - \sqrt{5}] \cdot [1 - 3 - \sqrt{5}] = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 5 \\
 &2 \cdot (-1 - \sqrt{5}) \cdot (-2 - \sqrt{5}) = 14 + 6\sqrt{5} \\
 &2 \cdot (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5}) = 14 + 6\sqrt{5} \\
 &2 \cdot (7 + 3\sqrt{5}) = 14 + 6\sqrt{5} \\
 &14 + 6\sqrt{5} = 14 + 6\sqrt{5} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 2 \cdot [2 - (3 - \sqrt{5})] \cdot [1 - (3 - \sqrt{5})] = (3 - \sqrt{5})^2 \\
 &2 \cdot [2 - 3 + \sqrt{5}] \cdot [1 - 3 + \sqrt{5}] = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 5 \\
 &2 \cdot (-1 + \sqrt{5}) \cdot (-2 + \sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5} \\
 &2 \cdot (2 - \sqrt{5} - 2\sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5} \\
 &2 \cdot (7 - 3\sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5} \\
 &14 - 6\sqrt{5} = 14 - 6\sqrt{5} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$12 \quad 10^{-5} \cdot (12-x)^2 = x \quad | : 10^{-5}$$

$$\begin{aligned}
 &(12-x)^2 = \frac{x}{10^{-5}} \\
 &(12-x)^2 = 10^5 \cdot x \\
 &12^2 - 2 \cdot 12 \cdot x + x^2 = 10^5 \cdot x \\
 &x^2 - 24x - 10^5x + 144 = 0 \\
 &x^2 - (24 + 10^5)x + 144 = 0 \\
 &x^2 - 100024x + 144 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{1/2} &= -\left(-\frac{100024}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{100024}{2}\right)^2 - 144} \\
 &= 50012 \pm \sqrt{(-50012)^2 - 144} \\
 &= 50012 \pm \sqrt{2501200144 - 144} \\
 &\approx 50012 \pm 50011,99856 \\
 \mathbf{x_1} &\approx 50012 + 50011,99856 = \mathbf{100023,99856} \\
 \mathbf{x_2} &\approx 50012 - 50011,99856 = \mathbf{0,00114}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$x_1 \approx 100023,99856$$

$$\Rightarrow 10^{-5} \cdot (12,0 - 100023,99856)^2 \approx 100023,99856$$

$$10^{-5} \cdot (-100011,99856)^2 \approx 100023,99856$$

$$100023,9984 \approx 100024 \quad \checkmark$$

$$x_2 \approx 0,00114$$

$$\Rightarrow 10^{-5} \cdot (12,0 - 0,00114)^2 \approx 0,00114$$

$$10^{-5} \cdot 11,99886^2 \approx 0,00114$$

$$0,00144 \approx 0,00114 \quad \checkmark$$

1.9.3 Wurzelgleichungen

$$\blacktriangleright 25 \quad 1 \quad \sqrt{2x+5} = 7$$

$$\sqrt{2x+5} = 7 - 5 = 2 \quad |^2$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

$$2 \quad \sqrt{4x+12} = 4 \quad |^2$$

$$4x+12 = 16$$

$$4x = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & 5 + \sqrt{5x-1} = x \\
 & \sqrt{5x-1} = x-5 \quad |^2 \\
 & 5x-1 = (x-5)^2 \\
 & \quad = x^2 - 10x + 25 \\
 & x^2 - 10x - 5x + 25 + 1 = 0 \\
 & x^2 - 15x + 26 = 0 \\
 & x_{1/2} = -\left(-\frac{15}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 26} \\
 & = 7,5 \pm \sqrt{56,25 - 26} \\
 & = 7,5 \pm \sqrt{30,25} \\
 & = 7,5 \pm 5,5 \\
 & x_1 = 7,5 + 5,5 = 13 \\
 & x_2 = 7,5 - 5,5 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } x_1 &= 13 \\
 &\Rightarrow 5 + \sqrt{5 \cdot 13 - 1} = 13 \\
 & \quad 5 + \sqrt{65 - 1} = 13 \\
 & \quad 5 + 8 = 13 \quad \checkmark \\
 x_2 &= 2 \\
 &\Rightarrow 5 + \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 2 \\
 & \quad 5 + \sqrt{9} = 2 \\
 & \quad 5 + 3 \neq 2 \quad \cancel{\checkmark}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \sqrt{10-x} = \sqrt{6+x} \quad |^2 \\
 & 10-x = 6+x \\
 & -x-x = 6-10 \\
 & +2x = +4 \\
 & x = \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \sqrt{3x-2} = \sqrt{8x} \quad |^2 \\
 & 3x-2 = 8x \\
 & 3x-8x = 2 \\
 & -5x = 2 \\
 & x = -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

1.9.4 Exponentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \frac{4}{3} = 10^{2x-3} \quad | \lg \\
 & \lg \frac{4}{3} = \lg (10^{2x-3}) \\
 & \lg \frac{4}{3} = (2x-3) \cdot \lg 10 \quad \text{mit } \lg 10 = 1 \\
 & 2x-3 = \lg \frac{4}{3} \\
 & 2x = \lg \frac{4}{3} + 3 \\
 & \quad \lg \frac{4}{3} + 3 \\
 & x = \frac{\quad}{2} \approx 1,562
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & k = A \cdot e^{\frac{E_a}{R \cdot x}} \\
 & e^{\frac{E_a}{R \cdot x}} = \frac{k}{A} \quad | \ln \\
 & \frac{E_a}{R \cdot x} = \ln \left(\frac{k}{A} \right) \\
 & E_a = R \cdot x \cdot \ln \left(\frac{k}{A} \right); \quad x = \frac{E_a}{R \cdot \ln \left(\frac{k}{A} \right)}
 \end{aligned}$$