Mathematische Zeichen

Zeichen	Sprechweise
$\approx$	ungefähr gleich, rund, etwa
$\triangleq$	entspricht
…	und so weiter
∞	unendlich
$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$\stackrel{\text{def}}{=}$	ist definitionsgemäß gleich
$<$	kleiner als
$\leq$	kleiner oder gleich
$>$	größer als
$\geq$	größer oder gleich
$+$	plus
$-$	minus
$\cdot$	mal, multipliziert mit
–, /, :	durch, geteilt durch, zu, pro
Σ	Summe
$\sim$	proportional
a^x	a hoch x, x-te Potenz von a
$\sqrt{\ }$	Quadratwurzel aus
$\sqrt[n]{\ }$	n-te Wurzel aus
$\lvert x \rvert$	Betrag von x
$\perp$	senkrecht zu
$\parallel$	ist parallel zu
$\uparrow\uparrow$	gleichsinnig parallel
$\downarrow\uparrow$	gegensinnig parallel
$\sphericalangle$	Winkel
$\triangle$	Dreieck
$\cong$	kongruent zu
Δx	Delta x (Differenz zweier Werte)
%	Prozent, vom Hundert
‰	Promille, vom Tausend
log	Logarithmus (allgemein)
lg	dekadischer Logarithmus
ln	natürlicher Logarithmus
e	Eulersche Zahl (e = 2,718281…)
sin	Sinus
cos	Kosinus
tan	Tangens
cot	Kotangens
(), [], {}	runde, eckige, geschweifte Klammer auf und zu
π	pi (Kreiszahl = 3,14159 …)
$\overline{AB}$	Strecke AB
$\overset{\frown}{AB}$	Bogen AB

Zeichen	Sprechweise
a', a''	a Strich, a zwei Strich
a_1, a_2	a eins, a zwei
$\Rightarrow$	Daraus folgt, Folgerung
$\Leftrightarrow$	äquivalent, Äquivalenzaussage
$\vec{x}$	Vektor
A	Koeffizientenmatrix A
$(a_n)_n$	Folge
a_n	*n*-tes Folgenglied
$\sum_{k=0}^{\infty} a_n$	Reihe
$M = \{\ldots\}$	Menge
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen inkl. 0
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen (r. Z.)
$\mathbb{R}^{\geq k}$	Menge der r. Z. größer gleich *k*
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
[a,b], (a,b)	abgeschlossenes/offenes Intervall
(a,b], [a,b)	halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall
f	Funktion
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
D	Definitionsbereich einer Funktion
W	Wertebereich einer Funktion
$f(D)$	Bildmenge einer Funktion
G	Graph einer Funktion
$z = x + iy$	Komplexe Zahl
i	imaginäre Einheit
$\mathrm{Re}(z)$	Realteil von *z*
$\mathrm{Im}(z)$	Imaginärteil von *z*
$r = \lvert z \rvert$	Betrag von *z*
$\varphi = \arg(z)$	Argument/Winkel von *z*
$f'(x_0)$	Ableitung von *f* an der Stelle x_0
T	Tangente von *f*
dy	Totales Differential von *f* bei x_0
$U_\varepsilon(x_0)$	ε-Umgebung von x_0
$\int f(x)\,dx$	Integral *f* von *x dx*
F	Stammfunktion von *f*
$F(x)\,\vert_a^b$	*F* an den Grenzen a bis b
$\int_a^b f(x)\,dx$	Integral von a bis b *f* von *x dx*
f^{-1}	Umkehrfunktion von *f*
$x := y$	*x* ist definitionsgemäß gleich *y*

Grundstock von Operatoren für das Fach Mathematik

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Grundstock von Operatoren für die Fächer Chemie und Physik

Operator	Erläuterung
ableiten	auf der Grundlage von Erkenntnissen oder Daten sachgerechte Schlüsse ziehen
abschätzen	durch begründete Überlegungen Größenwerte angeben
analysieren	wichtige Bestandteile, Eigenschaften oder Zusammenhänge auf eine bestimmte Fragestellung hin herausarbeiten Chemie zusätzlich: einen Sachverhalt experimentell prüfen
aufstellen, formulieren	chemische Formeln, Gleichungen, Reaktionsgleichungen (Wort- oder Formelgleichungen) oder Reaktionsmechanismen entwickeln
Hypothesen aufstellen	eine Vermutung über einen unbekannten Sachverhalt formulieren, die fachlich fundiert begründet wird
angeben, nennen	Formeln, Regeln, Sachverhalte, Begriffe oder Daten ohne Erläuterung aufzählen bzw. wiedergeben
auswerten	Beobachtungen, Daten, Einzelergebnisse oder Informationen in einen Zusammenhang stellen und daraus Schlussfolgerungen ziehen
begründen	Gründe oder Argumente für eine Vorgehensweise oder einen Sachverhalt nachvollziehbar darstellen
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
beschreiben	Beobachtungen, Strukturen, Sachverhalte, Methoden, Verfahren oder Zusammenhänge strukturiert und unter Verwendung der Fachsprache formulieren
beurteilen	Das zu fällende Sachurteil ist mithilfe fachlicher Kriterien zu begründen.
bewerten	Das zu fällende Werturteil ist unter Berücksichtigung gesellschaftlicher Werte und Normen zu begründen.
darstellen	Strukturen, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und unter Verwendung der Fachsprache formulieren, auch mithilfe von Zeichnungen und Tabellen
diskutieren	Argumente zu einer Aussage oder These einander gegenüberstellen und abwägen
erklären	einen Sachverhalt nachvollziehbar und verständlich machen, indem man ihn auf Regeln und Gesetzmäßigkeiten zurückführt
erläutern	einen Sachverhalt veranschaulichend darstellen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
ermitteln	ein Ergebnis oder einen Zusammenhang rechnerisch, grafisch oder experimentell bestimmen
herleiten	mithilfe bekannter Gesetzmäßigkeiten einen Zusammenhang zwischen chemischen bzw. physikalischen Größen herstellen
interpretieren, deuten	naturwissenschaftliche Ergebnisse, Beschreibungen und Annahmen vor dem Hintergrund einer Fragestellung oder Hypothese in einen nachvollziehbaren Zusammenhang bringen
ordnen	Begriffe oder Gegenstände auf der Grundlage bestimmter Merkmale systematisch einteilen
planen	zu einem vorgegebenen Problem (auch experimentelle) Lösungswege entwickeln und dokumentieren
skizzieren	Sachverhalte, Prozesse, Strukturen oder Ergebnisse übersichtlich grafisch darstellen
untersuchen	Sachverhalte oder Phänomene mithilfe fachspezifischer Arbeitsweisen erschließen
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede kriteriengeleitet herausarbeiten
zeichnen	Objekte grafisch exakt darstellen

Josef Dillinger
Roland Gomeringer
Dennis Erhard Kriwald
Peter Sander

Formel- und Tabellenwerk bis zum Abitur

mit eingelegter IQB-Formelsammlung

Lektorat: Dennis Erhard Kriwald

Bildbearbeitung: Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2024

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt
Umschlaggestaltung: Zeichenbüro, Verlag Europa-Lehrmittel, Ostfildern, unter Verwendung des Fotos von © orbcat – stock.adobe.com
Druck: Himmer GmbH, 86167 Augsburg

Europa-Nr.: 83339 ISBN 978-3-7585-8333-9

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

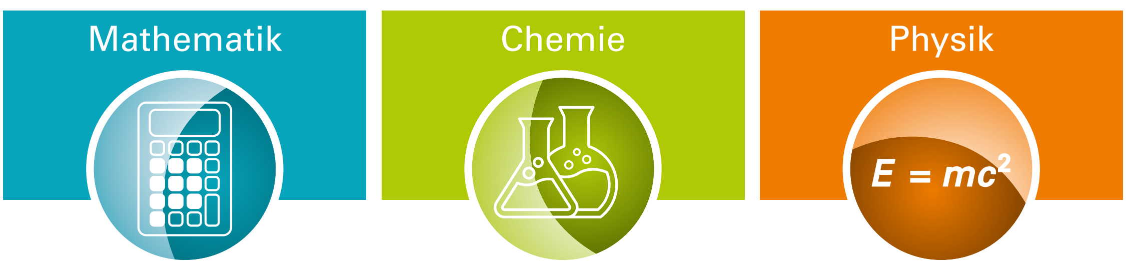
Vorwort

Das **Formel- und Tabellenwerk – mit eingelegter IQB-Formelsammlung** richtet sich an alle **Schülerinnen und Schüler,** die sich auf das **Abitur** oder vergleichbare Prüfungen vorbereiten.

Dort ist in Zukunft ausschließlich die Nutzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlung nach Vorgaben des IQB (Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen) zugelassen.

Das **vorliegende Buch** vom Verlag Europa-Lehrmittel ist auf die IQB-Formelsammlung **abgestimmt** und folgt dieser in Struktur und Aufbau. Formeln und Variablen sind in beiden Büchern identisch.

Alle wichtigen Werte und Formeln für die Fächer Mathematik, Physik und Chemie bis zum Abitur sind enthalten. Der **Mathematikteil ist umfangreich erweitert** worden. Die übersichtliche Gliederung der Themengebiete hilft beim schnellen Auffinden von Werten und Formeln.



Das Arbeiten mit dem Formel- und Tabellenwerk wird durch die IQB-Verweise erleichtert und trainiert gleichzeitig den Umgang mit der IQB-Formelsammlung.

⇨ **IQB-Seite 15**

Die allgemeinen **Bildungsziele** und fachlichen Schwerpunkte der **aktuellen Lehrpläne** sind umfassend berücksichtigt.

Die Autoren des Buches wünschen den Nutzern dieses Buches viel Erfolg und sind für Kritik, Verbesserungsvorschläge, Hinweise und Anregungen an lektorat@europa-lehrmittel.de dankbar.

Sommer 2024 Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik

2 Chemie

3 Physik

1 Mathematik

1.1 Grundlagen

► Zahlen, Konstanten, Einheiten, Größen

Römische Zahlen

	Grundzeichen				Hilfszeichen		
Symbol	I	X	C	M	V	L	D
Zahl	1	10	100	1000	5	50	500

Regeln für die Zahlenschreibweise

1. Die Symbole werden hintereinandergeschrieben. Dabei wird mit dem größten Zeichen begonnen und die Werte werden dann addiert.
2. Die Grundzeichen werden maximal dreimal, die Hilfszeichen nur einmal hintereinandergeschrieben.

   Beispiel: MCXVI = 1000 + 100 + 10 + 5 + 1 = **1116**
3. Steht ein Symbol mit einer kleineren Zahl vor einer größeren, wird der kleinere Wert vom größeren subtrahiert.

   Beispiele: IX = 10 – 1 = **9** IV = 5 – 1 = **4** MMXXIV = 1000 + 1000 + 10 + 10 + 5 – 1 = **2024**

Mathematische Konstanten

Konstante	Bezeichnung	Näherungswert	Definition oder Bedeutung
Kreiszahl	π	3,141593	Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser
Eulersche Zahl	e	2,718282	$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
Goldener Schnitt	Φ	1,61803	$\Phi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$ Der Goldene Schnitt ist ein bestimmtes Teilungsverhältnis einer Strecke.

Griechisches Alphabet

Α	α	Alpha	Ζ	ζ	Zeta	Λ	λ	Lambda	Π	π	Pi	Φ	φ	Phi
Β	β	Beta	Η	η	Eta	Μ	μ	Mü	Ρ	ρ	Rho	Χ	χ	Chi
Γ	γ	Gamma	Θ	ϑ	Theta	Ν	ν	Nü	Σ	σ	Sigma	Ψ	ψ	Psi
Δ	δ	Delta	Ι	ι	Jota	Ξ	ξ	Ksi	Τ	τ	Tau	Ω	ω	Omega
Ε	ε	Epsilon	Κ	κ	Kappa	Ο	ο	Omikron	Υ	υ	Ypsilon			

Basisgrößen, Einheiten

Größe	Formelzeichen	Einheit Name	Einheit Zeichen	Beziehung	Bemerkung Anwendungsbeispiele
Länge	ℓ	**Meter**	m	1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm 1 mm = 1000 µm 1 km = 1000 m	1 inch = 1 Zoll = 25,4 mm In der Luft- und Seefahrt gilt: 1 internationale Seemeile = 1852 m
Fläche	*A*, *S*	Quadratmeter Ar Hektar	m^2 a ha	1 m^2 = 10000 cm^2 = 1000000 mm^2 1 a = 100 m^2 1 ha = 100 a = 10000 m^2 100 ha = 1 km^2	Zeichen *S* nur für Querschnittsflächen Ar und Hektar nur für Flächen von Grundstücken
Volumen	*V*	Kubikmeter Liter	m^3 ℓ, L	1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000000 cm^3 1 ℓ = 1 L = 1 dm^3 = 10 dℓ = 0,001 m^3 1 mℓ = 1 cm^3	Meist für Flüssigkeiten und Gase
Ebener Winkel (Winkel)	α, β, γ …	Radiant Grad Bogenminute Bogensekunde	rad ° ′ ″	1 rad = 1 m/m = 57,2957…° = 180°/π 1° = $\frac{\pi}{180}$ rad = 60′ 1′ = 1°/60 = 60″ 1″ = 1′/60 = 1°/3600	1 rad ist der Winkel, der aus einem um den Scheitelpunkt geschlagenen Kreis mit 1 m Radius einen Bogen von 1 m Länge schneidet. Bei technischen Berechnungen statt α = 33° 17′ 27,6″ besser α = 33,291° verwenden.
Raumwinkel	Ω	Steradiant	sr	1 sr = 1 m^2/m^2	Der Raumwinkel von 1 sr umschließt auf der Oberfläche einer Kugel mit r = 1 m die Fläche 1 m^2.
Zeit, Zeitspanne, Dauer	*t*	**Sekunde** Minute Stunde Tag Jahr	s min h d a	 1 min = 60 s 1 h = 60 min = 3600 s 1 d = 24 h = 86400 s	3 h bedeutet eine Zeitspanne (3 Std.), 3^h bedeutet einen Zeitpunkt (3 Uhr). Werden Zeitpunkte in gemischter Form, z.B. $3^h24^m10^s$ geschrieben, so kann das Zeichen min auf m verkürzt werden.
Frequenz	*f*, ν	Hertz	Hz	1 Hz = 1/s	1 Hz ≙ 1 Schwingung in 1 Sekunde.
Drehzahl, Umdrehungsfrequenz	*n*	1 pro Sekunde 1 pro Minute	1/s 1/min	1/s = 60/min = 60 min^{-1} 1/min = 1 min^{-1} = $\frac{1}{60\ s}$	Die Anzahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit ergibt die Drehzahl, auch Drehfrequenz genannt.
Geschwindigkeit	*v*	Meter pro Sekunde Meter pro Minute Kilometer pro Stunde	m/s m/min km/h	1 m/s = 60 m/min = 3,6 km/h 1 m/min = $\frac{1\ m}{60\ s}$ 1 km/h = $\frac{1\ m}{3{,}6\ s}$	Geschwindigkeit bei der Seefahrt in Knoten (kn): 1 kn = 1,852 km/h mile per hour = 1 mile/h = 1 mph 1 mph = 1,60934 km/h
Winkelgeschwindigkeit	ω	1 pro Sekunde Radiant pro Sekunde	1/s rad/s	$\omega = 2\pi \cdot n$	Bei einer Drehzahl von n = 2/s beträgt die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 4\pi$/s.
Beschleunigung	*a*, *g*	Meter pro Sekunde hoch zwei	m/s^2	1 m/s^2 = $\frac{1\ m/s}{1\ s}$	Formelzeichen *g* nur für Fallbeschleunigung. $g \approx 9{,}81\ m/s^2$

Mathematik

Vorsätze bei Einheiten

Vorsatz Zeichen	Vorsatz Name	Zehnerpotenz	Mathematische Bezeichnung	Beispiele
E	Exa	10^{18}	Trillion	Speichergrößen in Exabyte (EB) in der Datenverarbeitung.
P	Peta	10^{15}	Billiarde	Speichergrößen in Petabyte (PB) in der Informatik.
T	Tera	10^{12}	Billion	$12\,000\,000\,000\,000$ N = $12 \cdot 10^{12}$ N = 12 TN (Tera-Newton)
G	Giga	10^{9}	Milliarde	$45\,000\,000\,000$ W = $45 \cdot 10^{9}$ W = 45 GW (Giga-Watt)
M	Mega	10^{6}	Million	$8\,500\,000$ V = $8{,}5 \cdot 10^{6}$ V = 8,5 MV (Mega-Volt)
k	Kilo	10^{3}	Tausend	$12\,600$ W = $12{,}6 \cdot 10^{3}$ W = 12,6 kW (Kilo-Watt)
h	Hekto	10^{2}	Hundert	500 ℓ = $5 \cdot 10^{2}$ ℓ = 5 hℓ (Hekto-Liter)
da	Deka	10^{1}	Zehn	32 m = $3{,}2 \cdot 10^{1}$ m = 3,2 dam (Deka-Meter)
–	–	10^{0}	Eins	1,5 m = $1{,}5 \cdot 10^{0}$ m
d	Dezi	10^{-1}	Zehntel	0,5 ℓ = $5 \cdot 10^{-1}$ ℓ = 5 dℓ (Dezi-Liter)
c	Zenti	10^{-2}	Hundertstel	0,25 m = $25 \cdot 10^{-2}$ m = 25 cm (Zenti-Meter)
m	Milli	10^{-3}	Tausendstel	0,375 A = $375 \cdot 10^{-3}$ A = 375 mA (Milli-Ampere)
µ	Mikro	10^{-6}	Millionstel	0,000052 m = $52 \cdot 10^{-6}$ m = 52 µm (Mikro-Meter)
n	Nano	10^{-9}	Milliardstel	0,000000075 m = $75 \cdot 10^{-9}$ m = 75 nm (Nano-Meter)
p	Piko	10^{-12}	Billionstel	0,000000000006 F = $6 \cdot 10^{-12}$ F = 6 pF (Pico-Farad)
f	Femto	10^{-15}	Billiardstel	Größe von Atomkernen in Femtometer (fm).
a	Atto	10^{-18}	Trillionstel	Abstände von Atomen in Attometer (am).

Basisgrößen und Basiseinheiten

Basisgröße	Länge	Masse	Zeit	Elektrische Stromstärke	Thermodynamische Temperatur	Stoffmenge	Lichtstärke
Basiseinheit	Meter	Kilogramm	Sekunde	Ampere	Kelvin	Mol	Candela
Einheitenzeichen	m	kg	s	A	K	mol	cd

Man unterscheidet Basisgröße und Basiseinheit. Sie sind im internationalen Einheitensystem festgelegt (SI = **S**ysteme **I**nternational).

Einheiten können in größere oder kleinere Einheiten oder in andere Maßsysteme umgerechnet werden.

Beispiele: $1\,\text{kg} = 1\,\text{kg} \cdot \frac{1000\,\text{g}}{1\,\text{kg}} = 1000\,\text{g}$; $1\,\text{g} = 1\,\text{g} \cdot \frac{1000\,\text{mg}}{1\,\text{g}} = 1000\,\text{mg}$

Beispiele: $1\,\text{m} = 1\,\text{m} \cdot \frac{10\,\text{dm}}{1\,\text{m}} = 10\,\text{dm}$; $1\,\text{dm} = 1\,\text{dm} \cdot \frac{10\,\text{cm}}{1\,\text{dm}} = 10\,\text{cm}$; $1\,\text{cm} = 1\,\text{cm} \cdot \frac{10\,\text{mm}}{1\,\text{cm}} = 10\,\text{mm}$

Beispiele: $1\,\ell = 1\,\ell \cdot \frac{10\,\text{d}\ell}{1\,\ell} = 10\,\text{d}\ell$; $1\,\text{d}\ell = 1\,\text{d}\ell \cdot \frac{10\,\text{c}\ell}{1\,\text{d}\ell} = 10\,\text{c}\ell$; $1\,\text{c}\ell = 1\,\text{c}\ell \cdot \frac{10\,\text{m}\ell}{1\,\text{c}\ell} = 10\,\text{m}\ell$

Zahlensysteme

Basis von Zahlensystemen

Zur Darstellung von Zahlen werden Ziffern oder Buchstaben verwendet. Die Zahlensysteme bestehen aus einer Basis B, die angibt, wie viele verschiedene Ziffern verwendet werden, und einem Satz von Regeln, um größere/kleinere Zahlen darzustellen, indem mehrere Ziffern kombiniert werden. Die erste Ziffer links neben dem Komma besitzt den Potenzwert B^0, anschließend B^1, B^2, B^3, …, B^n, die erste Ziffer rechts vom Komma besitzt der Wert B^{-1}, anschließend B^{-2}, B^{-3}, …, B^{-n}. Der Stellenwert einer Ziffer ist das Produkt von Ziffer und Potenzwert, den Wert der Zahl erhält man durch Addieren der einzelnen Stellenwerte.

Stelle	4	3	2	1	–1	–2	–3	–4
Potenz	B^3	B^2	B^1	B^0	B^{-1}	B^{-2}	B^{-3}	B^{-4}

Gebräuchliche Systeme

Zahlensystem	**Basis**	**Ziffern**															
Dezimal	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
Dual	2	0	1														
Hexadezimal	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Das Dezimalsystem

Unser gebräuchliches Zahlensystem ist das Dezimalsystem mit der Basis 10.

Beispiel für die Zahl 2024

Ziffer	2		0		2		4	
Stelle	4		3		2		1	
Potenz	10^3		10^2		10^1		10^0	
Potenzwert	1000		100		10		1	
Stellenwert	$2 \cdot 1000$		$0 \cdot 100$		$2 \cdot 10$		$4 \cdot 1$	
Zahl	2000	+	0	+	20	+	4	**= 2024**

Das Dualsystem

Das Dualsystem (Zweiersystem) besitzt die Basis 2. Es gibt nur die Ziffern 0 und 1.
Umwandlung der Zahl 11001010_2 in das Dezimalsystem

Ziffer	1	1	0	0	1	0	1	0	
Stelle	8	7	6	5	4	3	2	1	
Potenz	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
Potenzwert	128	64	32	16	8	4	2	1	
Stellenwert	$1 \cdot 128$	$1 \cdot 64$	$0 \cdot 32$	$0 \cdot 16$	$1 \cdot 8$	$0 \cdot 4$	$1 \cdot 2$	$0 \cdot 1$	
Summe	128 +	64 +	0 +	0 +	8 +	0 +	2 +	0	**= 202**

$11001010_2 = 202_{10}$

Das Sedezimalsystem (Hexadezimalsystem)

Das Sedezimalsystem besitzt die Basis 16. Da die Ziffern 0 bis 9 nicht mehr ausreichen, werden zusätzlich die Buchstaben A, B, C, D, E und F verwendet.

Zuordnung der Dezimalzahl/Sedezimalzahlen

Dezimalzahl															
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Sedezimalzahl															

Umwandlung der Zahl $2A0BC_{16}$ in das Dezimalsystem

Ziffer	2	A	0	B	C	
Stelle	5	4	3	2	1	
Potenz	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0	
Potenzwert	65536	4096	256	16	1	
Stellenwert	$2 \cdot 65536$	$10 \cdot 4096$	$0 \cdot 256$	$11 \cdot 16$	$12 \cdot 1$	
Summe	131072 +	40960 +	0 +	176 +	12	**= 172220**

$2A0BC_{16} = 172220_{10}$

Umwandlung von Dezimalzahlen in ein anderes Zahlensystem

Die Umwandlung einer Dezimalzahl in ein anderes Zahlensystem kann mit dem „Resteverfahren" durchgeführt werden. Bei diesem Verfahren wird die Dezimalzahl immer wieder durch die Basis des gewünschten Zahlensystems dividiert und der Rest notiert, bis das Ergebnis der Division 0 ist. Der Rest in umgekehrter Reihenfolge ergibt die Zahl des Zahlensystems.

Umwandlung der Zahl 25 in das Dualsystem

Division	Dualsystem
25 : 2 = 12 Rest **1**	
12 : 2 = 6 Rest **0**	
6 : 2 = 3 Rest **0**	
3 : 2 = 1 Rest **1**	
1 : 2 = 0 Rest **1**	
	1 1 0 0 1

$25_{10} = 11001_2$

Umwandlung der Zahl 2538 in das Sedezimalsystem

Division	Sedezimalsystem
2538 : 16 = 158 Rest **10**	
158 : 16 = 9 Rest **14**	
9 : 16 = 0 Rest **9**	
	9 E A

$2538_{10} = 9EA_{16}$

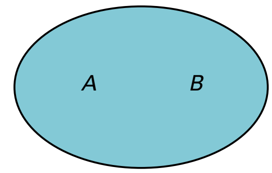
Mengenlehre und Logik

Mengen allgemein

Mengengleichheit

Eine Menge A ist gleich einer Menge B ($A = B$), wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist.

Es gilt: $A = A \qquad A = B \;\Rightarrow\; B = A$



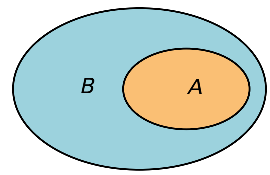
Teilmenge

Eine Menge A ist Teilmenge von B ($A \subseteq B$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Existiert mindestens ein Element in B, das nicht zu A gehört, so ist A echte Teilmenge von B ($A \subset B$).

Es gilt: $A \subseteq A \qquad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \;\Rightarrow\; A = B$

mit $\wedge$ logisches UND

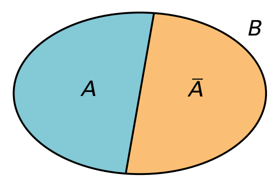


Komplementärmenge

Ist A Teilmenge von B, so ist die Komplementärmenge $\overline{A}$ von A bezüglich B diejenige Teilmenge von B, die alle Elemente enthält, die nicht zu A gehören.

Es gilt: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de-morgansche Gesetze)



Mengenverknüpfungen

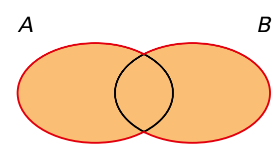
IQB-Seite 4

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ (A „vereinigt“ B) ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören.

Es gilt: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

mit $\vee$ logisches ODER

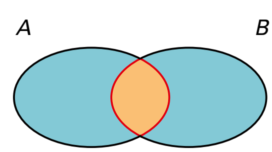


Schnittmenge

Die Schnittmenge $A \cap B$ (A „geschnitten“ B) ist die Menge aller Elemente, die zu A und gleichzeitig zu B gehören.

Es gilt: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

mit $\wedge$ logisches UND

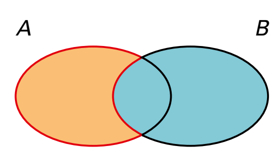


Differenzmenge

Die Differenzmenge $A \setminus B$ (A „ohne“ B) ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.

Es gilt: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

mit $\wedge$ logisches UND



Mathematik

Rechenregeln mit Mengen

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	(Idempotenzgesetze)
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(Kommutativgesetze)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(Assoziativgesetze)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(Distributivgesetze)
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	(Absorptionsgesetze)
$A \cup \varnothing = A$ $A \setminus \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$	(Rechnen mit der leeren Menge)
$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$	(Rechnen mit Differenzmengen)

Zahlenmengen

IQB-Seite 4

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$; $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$;
$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{I}$: irrationale Zahlen (nichtperiodische Dezimalbrüche wie z. B. $\sqrt{2}$)

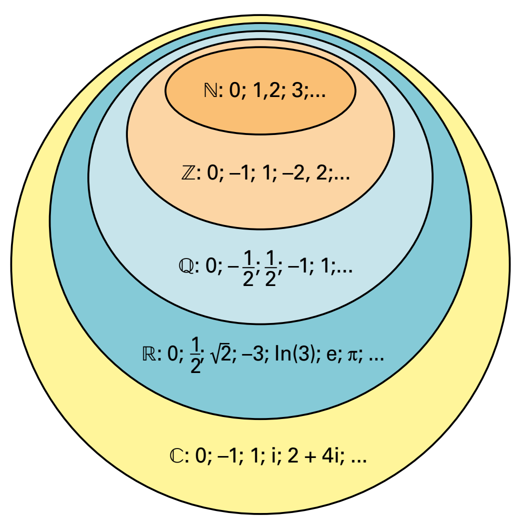
Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$

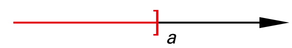
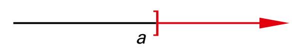
Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

<u>Anmerkung:</u> Die komplexen Zahlen können wegen der imaginären Anteile nicht mehr am Zahlenstrahl dargestellt werden. Ihre Darstellung erfolgt in der komplexen Zahlenebene, die eine reelle Achse und eine imaginäre Achse besitzt.



Intervalle

IQB-Seite 4

Bezeichnung	Schreibweise	Darstellung
Abgeschlossenes Intervall von a bis b	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Offenes Intervall von a bis b	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Rechtsoffenes Intervall von a bis b	$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Linksoffenes Intervall von a bis b	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Linksoffenes Intervall von $-\infty$ bis a	$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Offenes Intervall von a bis $+\infty$	$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	

Aussagenlogik

Es seien p, q, r Variable für Aussagen, die (nur) die Werte *wahr* (W) und *falsch* (F) annehmen können.

Verknüpfung von Aussagen

Verknüpfung	Symbol	Bedeutung
Negation	$\neg p$	nicht p
Konjunktion	$p \wedge q$	p und q; sowohl p als auch q
Disjunktion	$p \vee q$	p oder q; (einschließendes ODER)
Alternative	$p \dot{\vee} q$	entweder p oder q; (ausschließendes ODER)
Impliktion	$p \Rightarrow q$	wenn p, dann (so) q
Äquivalenz	$p \Leftrightarrow q$	p äquivalent zu q; p genau dann, wenn q

Zusammenhänge

$p \Rightarrow q = \neg p \vee q$ $\quad$ $p \Leftrightarrow q = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ $\quad$ $p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$p \dot{\vee} q = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ $\quad$ $p \dot{\vee} q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Wahrheitswertetafeln

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
W	W	F	F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	W	W	W	F
F	F	W	W	F	F	F	W	W

Tautologien

Eine Aussagenverbindung heißt **Tautologie,** wenn jede Einsetzung eine wahre Aussage liefert.

$p \vee \neg p$ (Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten)

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (Gesetz von der doppelten Verneinung)

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (Kettenschluss)

$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (Abtrennungsregel)

$p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$ (indirekter Schluss)

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Kontraposition)

Mathematik

Operationen mit Zahlen

Primzahlen

Eine Primzahl ist definiert als eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist und als Teiler nur 1 und sich selbst hat.

Dieser Sachverhalt schließt die Zahl 1 aus, da 1 nur einen Teiler hat.

Definition: Eine natürliche Zahl p ist eine Primzahl, wenn ihre einzigen positiven Teiler 1 und p sind.
Die ersten Primzahlen lauten: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...

Eine Zahl, die größer als 1 ist und keine Primzahl ist, lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen. Dieses Produkt heißt Primfaktorzerlegung der Zahl. Bei der Primfaktorzerlegung beginnt man immer mit dem Teiler der kleinsten Primzahl.

Primfaktorzerlegung der Zahl 56

$56 : 2 = 28$	$56 = 2 \cdot 28$
$28 : 2 = 14$	$28 = 2 \cdot 14$
$14 : 2 = 7$	$14 = 2 \cdot 7$
$7 : 7 = 1$	$7 = 7 \cdot 1$
1	

$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

Oder z. B.: $27 = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

Teiler und Vielfache

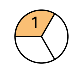
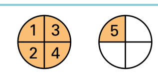
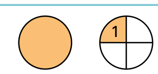
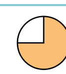
Teiler und Vielfache sind grundlegende Konzepte der Mathematik, insbesondere der Zahlentheorie.

Teiler $a, b, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	**Vielfache**
a heißt Teiler von b, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, sodass $a \cdot n = b$ gilt.	b heiß Vielfaches von a, wenn a ein Teiler von b ist.
Der größte gemeinsame Teiler (ggT) zweier oder mehrerer Zahlen ist die größte Zahl, durch die alle gegebenen Zahlen ohne Rest teilbar sind. Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen a und b wird mit ggT(a;b) bezeichnet.	Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier oder mehrerer Zahlen ist die kleinste Zahl, die ein Vielfaches aller gegebenen Zahlen ist. Betrachtet man zwei Zahlen a und b, dann muss sowohl a als auch b Teiler dieser Zahl sein. Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen a und b wird mit kgV(a;b) bezeichnet.
Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12. Die Teiler von 18 sind 1, 2, 3, 6, 9, 18. Der größte gemeinsame Teiler von 12 und 18 ist 6, da 6 die größte Zahl ist, durch die sowohl 12 als auch 18 ohne Rest teilbar sind. Schreibweise: ggT(12;18) = 6	Vielfache von 12: 12, 24,36, 48, 60, 72, 84, ... Vielfache von 18: 18, 36, 54, 72, 90, ... Das kleinste gemeinsame Vielfache ist die kleinste Zahl von 12 und 18, die sowohl ein Vielfaches von 12 als auch von 18 ist. In diesem Fall ist es 36. Schreibweise: kgV(12;18) = 36 Oder: $\text{kgV}(a;b) = \frac{a \cdot b}{\text{ggT}(a{:}b)}$ $\text{kgV}(12;18) = \frac{12 \cdot 18}{6} = 36$

Rechnen mit Brüchen

Der Bruchterm $\frac{a}{b}$ ist ein Zahlenverhältnis und besteht aus dem Zähler a und dem Nenner b, mit $b \neq 0$. Der Nenner b ist die Bezugsgröße und gibt die Gesamtheit der Teile an. Der Zähler a bezeichnet die Anzahl der Teile.

Arten von Brüchen

Art	Beispiel	Kennzeichen	Wert	Bild
Echter Bruch	$\frac{1}{3}$	Zähler < Nenner	< 1	
Unechter Bruch	$\frac{5}{4}$	Zähler > Nenner	> 1	
Gemischte Zahl	$1\frac{1}{4}$	Ganze Zahl und ein echter Bruch	> 1	
Dezimalbruch	0,75	Dezimalkomma	< 1	

Addition oder Subtraktion von Brüchen

Beim Addieren oder Subtrahieren von Brüchen müssen die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden (kgV).	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$ $b, d \neq 0$

Multiplikation von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man ihre Zähler multipliziert und ihre Nenner multipliziert.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $b, d \neq 0$

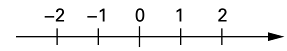
Division von Brüchen

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert.	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $b, c, d \neq 0$

Weitere Regeln beim Rechnen mit Brüchen

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Erweitern Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert.	$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{6}{24}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $b,c \neq 0$
Kürzen Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (bzw. denselben Buchstaben) dividiert.	$\frac{6}{24} = \frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4}$	$\frac{a \cdot \cancel{b}}{\cancel{b} \cdot c} = \frac{a}{c}$ $b,c \neq 0$
Summen oder Differenzen Summen oder Differenzen sind vor dem Kürzen oder Erweitern zu berechnen.	$\frac{18-24}{260+20} = \frac{-6}{280} = \frac{-3}{140} = -\frac{3}{140}$	$\frac{c-b}{c+b}$ kann nicht gekürzt werden.
Umwandlung eines Bruches in einen Dezimalbruch Ein Bruch wird in einen Dezimalbruch umgewandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.	$\frac{3}{8} = 3:8 = 0{,}375$	–
Umwandlung eines Dezimalbruches in einen Bruch Ein endlicher Dezimalbruch wird in einen Bruch verwandelt, indem man in den Zähler alle Ziffern nach dem Komma schreibt. Der Nenner erhält eine 1 mit so vielen Nullen, wie der Zähler Stellen hat.	$0{,}48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$	–

Rechnen mit Zahlen

Betrag einer Zahl	
Der Betrag einer Zahl ist immer eine positive Zahl und entspricht dem Abstand dieser Zahl auf dem Zahlenstrahl vom Nullpunkt aus.	
$\lvert a \rvert = \begin{cases} a, \text{ wenn } a \geq 0 \\ -a, \text{ wenn } a < 0 \end{cases}$	$\lvert 2 \rvert = \lvert -2 \rvert = 2$
Für alle a, b gelten folgende Regeln: $\lvert a \rvert \geq 0$ $\quad$ $\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$ $\quad$ $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ (Dreiecksgleichung)	

Klammerausdrücke	
Pluszeichen vor der Klammer Klammern, vor denen ein Pluszeichen steht, können weggelassen werden. Die Vorzeichen der Glieder bleiben unverändert.	$a + (b - c) = a + b - c$
Minuszeichen vor der Klammer Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht, können nur aufgelöst (weggelassen) werden, wenn alle Glieder in der Klammer entgegengesetzte Vorzeichen erhalten.	$a - (b - c) = a - b + c$

Umkehroperation	
Addition und Subtraktion sind Umkehroperationen voneinander. So wird z. B. die Zahl a subtrahiert, indem man die Zahl $-a$ addiert.	$2a = a + 1 \mid -a$ $2a + (-a) = a + 1 + (-a)$ $a = 1$
Multiplikation und Division sind Umkehroperationen voneinander. So wird z. B. durch die Zahl $a \neq 0$ dividiert, indem man mit dem Kehrbruch $\frac{1}{a}$ multipliziert.	$b \cdot a = a \mid \cdot \frac{1}{a}$ $b \cdot a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a}$ $b = 1$

Rechengesetze	
Kommutativgesetz der Addition	$a + b = b + a$
Kommutativgesetz der Multiplikation	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz der Addition	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
Assoziativgesetz der Multiplikation	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
Distributivgesetz	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

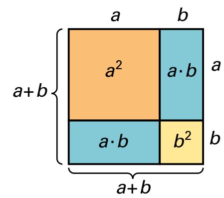
Runden von Zahlen
Wird die **wegfallende Dezimalstelle** betrachtet, wird bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4 **abgerundet,** d. h. die voranstehende Ziffer ändert sich nicht. Bei den Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 wird **aufgerundet.** Die voranstehende Ziffer erhöht sich.

Binomische Formeln
IQB-Seite 3

Erste Binomische Formel

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

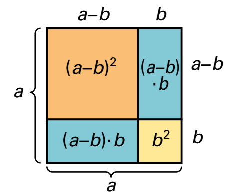
Betrachtet man ein Quadrat mit den Seitenlängen $(a + b)$, so wird die 1. Binomische Formel anschaulich.



Zweite Binomische Formel

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

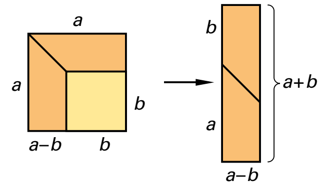
Betrachtet man ein Quadrat mit den Seitenlängen a, von denen man die Länge b subtrahiert, so wird die 2. Binomische Formel anschaulich.



Dritte Binomische Formel

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

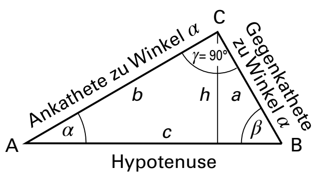
Betrachtet man die Trapezflächen (orange) und das Quadrat (gelb), so wird die 3. Binomische Formel anschaulich.

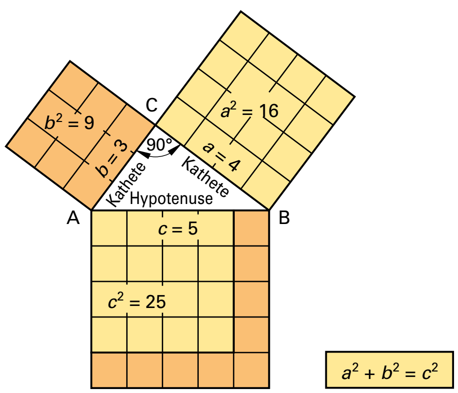


Sätze im rechtwinkligen Dreieck
IQB-Seite 4

Pythagoras

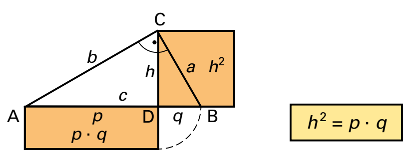
Der Satz des Pythagoras besagt, dass die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten im rechtwinkligen Dreieck gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse ist.





Höhensatz des Euklid

Im rechtwinkligen Dreieck besteht zwischen der Höhe h und den Hypotenusenabschnitten p und q ein Zusammenhang.



Kathetensatz des Euklid

Im rechtwinkligen Dreieck besteht zwischen den Katheten, den Hypotenusenabschnitten und der Hypotenuse ein Zusammenhang.