Mathematik
Fach- und Berufsoberschule Bayern
Vorklasse

J. Dillinger, M. Schittenhelm

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co.KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten
Europa-Nr. 87621

Autoren:

Dillinger, Josef Hausen
Schittenhelm, Michael Hof

Lektorat:

Dillinger, Josef

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2020
Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern identsich sind.

ISBN: 978-3-8085-8762-1

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald unter Einsatz des Bildes © senoldo-Fotolia.com
Satz: Schriftsatz Frauke Moritz, Ahrensburg
Druck: Lensing Druck GmbH & Co. KG, 44149 Dortmund

Vorwort

Das Buch ist für den Unterricht im Fach Mathematik für FOS bzw. BOS Vorklasse erstellt. Es ist so konzipiert, dass sich die Schülerinnen und Schüler den Lernstoff anhand von verschiedenartigen Aufgaben während des Unterrichts eigenverantwortlich und selbstständig aneignen können. Methodisch wurde darauf geachtet, dass die Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben neben reinem mathematischem Faktenwissen weiterführende Fertigkeiten wie beispielsweise mathematisches Kommunizieren oder mathematisches Argumentieren erwerben, damit sie anschließend gemäß des kompetenzorientierten Konzepts des LehrplanPLUS in der Lage sind, berufliche Aufgabenstellungen zu lösen.

Leitgedanken – wissensbasierter Konstruktivismus

Das vorliegende Lernmittel deckt alle acht geforderten Lernbereiche des LehrplanPLUS ab. Bei der Darstellung der einzelnen Lerninhalte der Lernbereiche wurde folgende grundlegende Punkte besonders Wert gelegt: Neues Fakten- und Regelwissen wird gemäß des konstruktivistischen Lernansatzes stets an bereits vorhandenen mathematischen Wissen bzw. an Alltagswissen des Schülers angeknüpft, damit ein vernetztes Wissen entsteht. Damit jedoch Wissen vernetzt werden kann, müssen zunächst grundlegende mathematische Kenntnisse und Rechenfertigkeiten vorhanden und sicher abrufbar sein. Daher werden in diesem Buch unter anderen auch Rechenfertigkeiten und -verfahren eingeübt, damit diese beherrscht werden. Gemäß dieser Leitgedanken werden die Lerninhalte wie folgt darstellt:

Grundlegende Begriffe und Rechenverfahren

Es werden zunächst grundlegende Begriffe, die in dem jeweiligen Sachzusammenhang von Bedeutung sind, anschaulich dargestellt und anschließend mathematisch definiert. Im Anschluss werden Rechenverfahren, -Rechenregel oder Lösungsstrategien hergeleitet bzw. für Schüler/innen plausibel dargestellt, falls die Herleitung unter Beachtung des Adressatenbezugs nicht möglich ist. Diese Verfahren und Regeln werden anhand von Beispielaufgaben, die die Schüler/innen eigenständig bearbeiten können, eingeübt und vertieft.

Aufbau mathematischer Denkstrukturen

Bei der Einführung von neuen Rechenverfahren werden den Schülern/innen neben der Herleitung auch Hintergrundinformationen und fachliche Vertiefungen geboten, damit die Schüler/innen die Rechenverfahren nicht nur sicher anwenden können, sondern auch die zulegenden Zusammenhänge hinter den Formeln und Lösungsstrategien verstehen. Dadurch werden implizit mathematische Denkstrukturen aufgebaut.

Eigenständigkeit · Übungsaufgaben

Das vorliegende Buch bietet eine Vielzahl von kompetenzorientierten Übungsaufgaben mit ansteigenden Anforderungsstufen (schwierigste Stufe **rot**), sowie realitätsbezogene Aufgaben mit offener Fragestellung, die von den Schüler/innen während des Unterrichts bzw. als Hausaufgabe bearbeitet werden können. Aufgaben, die sich besonders gut für Partner- oder Gruppenarbeiten eignen, sind mit einem Icon gekennzeichnet. Am Ende eines jeden Lernbereichs kann der Schüler bzw. die Schülerin sein/ihr vorhandenes Wissen testen.

Winter 2019/20 Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre, Aussagelogik, Rechenregeln

1.1 Mengenlehre

Mithilfe der Mengenlehre können mathematisch komplexe Sachverhalte einfach, eindeutig und klar dargestellt werden. Die gesamte heutige Mathematik basiert auf der eindeutigen Sprache und den Grundgesetzen (Axiomen) der Mengenlehre. Sie ist daher von grundlegender Bedeutung für die moderne Mathematik.

Bevor wir uns in die Sprache bzw. in die Axiome der Mengenlehre vertiefen, muss zuerst geklärt werden, was in der Mathematik unter dem Begriff »Menge« verstanden wird.

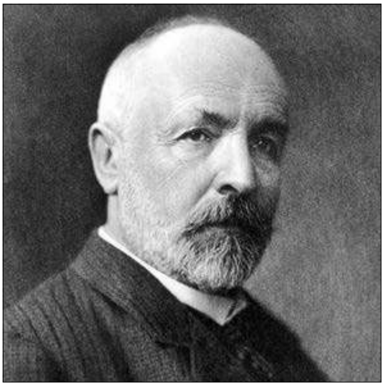


Bild 1: Georg Cantor (*1845 Sankt Petersburg, † 1918 Halle an der Saale), der als Begründer der sogenannten Mengenlehre gilt.

1.1.1 Der Begriff »Menge«

Wir betrachten zunächst den Freistaat Bayern mit seinen Regierungsbezirken **(Bild 2)**:

- Oberfranken
- Unterfranken
- Mittelfranken
- Oberpfalz
- Schwaben
- Oberbayern
- Niederbayern

Bild 2: Regierungsbezirke von Bayern

Es stellt sich die Frage, was Bayern und seine Regierungsbezirke mit Mathematik bzw. mit der Mengenlehre zu tun haben. Diese Frage ist leicht beantwortet, denn mathematisch betrachtet stellen die Regierungsbezirke von Bayern eine Menge dar. Eine Menge ist in der Mathematik definiert als die Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren, realen oder abstrakten Objekten zu einem Ganzen. Wohlunterscheidbar bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Objekte unterschiedlich sein müssen, was bei den betrachteten Regierungsbezirken der Fall ist. Die realen Objekte einer Menge bzw. die abstrakten Objekte, die nur in der gedanklichen Vorstellung existieren, werden auch als Elemente bezeichnet.

Der Begriff Menge

Eine Menge ist die Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte einer Menge werden Elemente genannt.

1.1.2 Darstellungsformen von Mengen

Im vorherigen Absatz wurde erläutert, dass die Regierungsbezirke Oberfranken (Obf.), Unterfranken (Ufr.), Mittelfranken (Mfr.), Oberpfalz (Opf.), Schwaben (Schw.), Oberbayern (Obb.) und Niederbayern (Ndb.) eine Menge im mathematischen Sinne darstellen. Mengen lassen sich auf unterschiedliche Weisen darstellen.

■ Grafische Darstellung im Mengendiagramm (Venn-Diagramm)

Bei der grafischen Darstellung einer Menge werden alle Elemente von einer geschlossenen Kurve umgeben **(Bild 1)**. Diese anschauliche Darstellungsform wird Mengendiagramm oder Venn-Diagramm genannt.

Die Bezeichnung der Mengen erfolgt mit Großbuchstaben. Die Menge in **Bild 1** wird mit *B* bezeichnet.

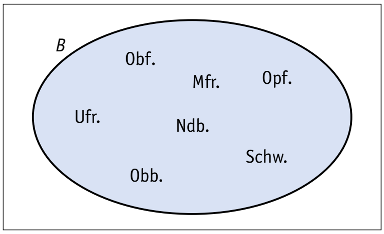


Bild 1: Mengendiagramm der Regierungsbezirke

> **Anmerkung** Ndb. (Niederbayern) ist offensichtlich ein Element der Menge *B*. Um diesen Sachverhalt kurz und prägnant auszudrücken, benutzt man das Symbol $\in$. Dieses bedeutet … ist Element von … Demnach drückt Ndb. $\in B$ aus, dass Ndb. Element von *B* ist.

■ Aufzählende Darstellungsform

Bei der aufzählenden Darstellungsform einer Menge werden alle Elemente der Menge zwischen zwei geschweiften Klammern geschrieben. Die einzelnen Elemente werden durch Strichpunkte getrennt. Die aufzählende Darstellungsform der Menge *B* aller Regierungsbezirke von Bayern lautet wie folgt:

$$B = \{\text{Obf.; Ufr.; Mfr.; Opf.; Schw.; Obb.; Ndb.}\}$$

> **Anmerkung** Die leere Menge, also die Menge, die kein Element enthält, wird üblicherweise durch zwei geschweifte Klammern angegeben.
>
> $A = \{\ \}$ leere Menge

■ Beschreibende Darstellungsform

Die aufzählende und die grafische Darstellungsform einer Menge haben den wesentlichen Nachteil, dass alle Elemente explizit genannt werden müssen. Das ist jedoch nicht immer möglich. Stellen wir uns beispielsweise vor, dass wir nicht die Menge der Regierungsbezirke von Bayern betrachten, sondern die Menge aller Einwohner Bayerns. Das würde bedeuten, dass wir bei der aufzählenden bzw. grafischen Form jeden Einwohner Bayerns namentlich nennen müssten, was bei 12.988.539 Einwohner* kaum möglich ist. In diesem Fall hilft die beschreibende Darstellungsform einer Menge. Bei dieser werden die Elemente über das gemeinsame Merkmal bzw. durch die kennzeichnende Eigenschaft alle Elemente beschrieben.

Die beschreibende Darstellungsform der Menge *B* aller Regierungsbezirke von Bayern lautet wie folgt:

$$B = \left\{ \underbrace{\text{Regierungsbezirke}}_{\text{Objekte}} \,\middle|\, \underbrace{\text{liegen in Bayern}}_{\text{Eigenschaft}} \right\}$$

Der senkrechte Strich | hat in der Mathematik die Bedeutung »mit der Eigenschaft.« Die oben genannte Menge *B* ist wie folgt zu lesen: »Die Menge *B* besteht aus Regierungsbezirken (Objekten), die die Eigenschaft haben, dass sie in Bayern liegen.« Durch die Menge *B* in beschreibender Form sind die sieben Regierungsbezirke Oberfranken (Obf.), Unterfranken (Ufr.), Mittelfranken (Mfr.), Oberpfalz (Opf.), Schwaben (Schw.), Oberbayern (Obb.) und Niederbayern (Ndb) eindeutig beschrieben, ohne dass sie explizit genannt wurden.

Erkenntnis: Die beschreibende Darstellungsform dient zur Darstellung von Mengen, die sehr viele Elemente enthalten.

* Stand 30.9.2017

Die Menge E aller Einwohner Bayerns lautet in beschreibend Form:

$E = \{\text{Menschen} \mid \text{wohnhaft in Bayern}\}$

Lesen würde man die Menge E wie folgt: »Die Menge E besteht aus Menschen, die die Eigenschaften haben, dass sie in Bayern wohnhaft sind.«

Beschreibende Darstellungsform einer Menge

Die beschreibende Form einer Menge A ist wie folgt aufgebaut:

$A = \{\text{Objekt} \mid \text{kennzeichnende Eigenschaft aller Objekte dieser Menge}\}$

Aufgaben

1. Geben Sie die Menge A aller Bundesländer (inkl. Stadtstaaten) in aufzählender Form an, deren Anfangsbuchstabe mit B beginnt.
2. Geben Sie die Menge B aller Städte in Bayern in grafischer Form an, in denen die jeweiligen Bezirksregierungen ihren Hauptsitz haben.
3. Geben Sie die Menge C aller europäischen Staaten an. Begründen Sie, weshalb für die Angabe dieser Menge die beschreibende Form vorteilhaft ist.
4. Nennen Sie zwei weitere Mengen, die ausschließlich durch die beschreibende Form angegeben werden können.

1.1.3 Zahlenmengen

Es ist allgemein bekannt, dass in der Mathematik selten Mengen von Regierungsbezirken oder Mengen von Einwohnern eines Bundeslandes behandelt werden, in der Regel betrachtet man Mengen aus Zahlen. Die sicherlich bekannteste Zahlenmenge sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Neben dieser Zahlenmenge werden im Folgenden noch die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die der rationalen $\mathbb{Q}$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ behandelt.

Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erhalten als Abkürzung einen Großbuchstaben mit Doppelstrich. Der Doppelstrich symbolisiert, dass es sich um fest definierte Zahlenmengen handelt.

Fest definierte Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen

1.1.3.1 Die Menge der natürlichen Zahlen

Unter den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ werden die Zahlen verstanden, die zum Abzählen von Gegenständen verwendet werden. Geht man beispielsweise über den Parkplatz eines Schwimmbads kann man die Autos zählen, die dort parken. Man beginnt logischerweise mit der Zahl 1, gefolgt von der Zahl 2 usw. Die Zahlen 1, 2, 3 usw. sind somit natürliche Zahlen. Unter Mathematikern gilt es als nicht geklärt, ob die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht. Laut deutscher Industrienorm (DIN) wird die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt. Daher wird in diesem Buch die Zahl 0 als natürliche Zahl betrachtet.

Menge der natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lautet: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$

■ Zahlenstrahl

Die natürlichen Zahlen können durch einen Zahlenstrahl dargestellt werden **(Bild 1)**. Zwei natürliche Zahlen haben einen Abstand von einer Längeneinheit.

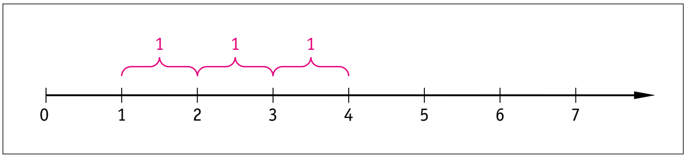


Bild 1: Zahlenstrahl

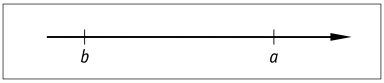
■ Vergleich zweier Zahlen mittels Zahlenstrahl

Für die Anordnung am Zahlenstrahl gilt: Je größer die Zahl ist, desto weiter rechts befindet sie sich. Betrachtet man zwei benachbarte Zahlen am Zahlenstrahl, so ist immer die rechte die größere Zahl. Um diese Beziehung »größer als« auszudrücken, wird das Symbol »>« benutzt. Beispielsweise ist die Zahl 5 > 4, da die Zahl 5 weiter rechts auf dem Zahlenstrahl zu finden ist. Die geöffnete Seite des »>«- Symbols zeigt stets auf die größere Zahl.

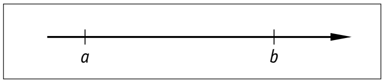
Analog ist von zwei Zahlen stets die kleiner, die sich weiter links am Zahlenstahl befindet. Man benutzt das Symbol »<«, um die Beziehung »kleiner als« auszudrücken. Bekanntlich ist 1 kleiner als 2, man schreibt daher 1 < 2. Die geschlossene Seite des Kleiner-Symbols zeigt stets zur kleineren Zahl. Man nennt die Symbole »>« und »<« Relationszeichen.

Bedeutung der Relationszeichen – Teil 1

a größer als b → $a > b$



a kleiner als b → $a < b$



Zwei Zahlen a und b sind gleich (Symbol =), wenn sie sich an der selben Stelle am Zahlenstrahl befinden. Das Relationszeichen »≤« vereint die Symbole < und =. Es bedeutet kleiner oder gleich. a ≤ b bedeutet demnach, dass die Zahl a kleiner als b oder gleich b ist. Das Relationszeichen »≥« vereint die Symbole > und =. Die Bedeutung dieses Symbols ist größer oder gleich. Dementsprechend bedeutet $a \geq b$, dass die Zahl a größer als b oder gleich b ist.

Bedeutung der Relationszeichen – Teil 2

a größer als oder gleich b → $a \geq b$

a kleiner als oder gleich b → $a \leq b$

■ Intervallschreibweise

Durch die Kombination von Relationszeichen können Bereiche des Zahlenstrahls beschrieben werden. Beispielsweise besagt der Ausdruck 3 < a < 7, dass sich die Zahl a im Bereich zwischen den Zahlen 3 und 7 befindet **(Bild 2)**.

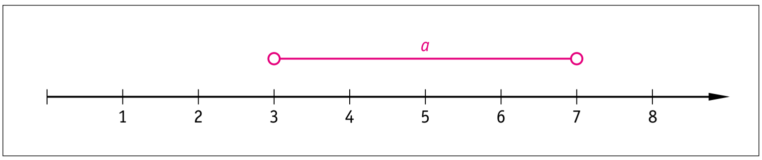


Bild 2: Beschriebener Bereich des Zahlenstrahls

Man bezeichnet die Menge aller Zahlen, die sich zwischen zwei gegebenen Zahlen auf dem Zahlenstrahl befinden, als Intervall. Bei der Angabe des Intervalls werden lediglich die beiden Zahlen angegeben, die den Bereich abgrenzen.

Diese beide Zahlen werden Intervallgrenzen genannt. Der in **Bild 2** auf der vorhergehenden Seite dargestellte Bereich wird durch das Intervall $]3;7[_{\mathbb{N}}$ beschrieben. Der Index $\mathbb{N}$ gibt an, dass die betrachtete Zahlenmenge aus natürlichen Zahlen besteht.

$$\{a \in \mathbb{N} \mid 3 < a < 7\} = \,]3;7[_{\mathbb{N}} = \{4;5;6\}$$

Intervall

Unter einem Intervall wird die Menge aller Zahlen verstanden, die sich auf dem Zahlenstrahl zwischen zwei Zahlen, den Intervallgrenzen, befinden. Für alle $b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

$$]b;c[_{\mathbb{N}} = \{b+1;\ldots;c-1\}$$

Je nachdem, ob die Intervallgrenzen zum Intervall gehören oder nicht, müssen vier Arten von Intervallen unterschieden werden:

1. Offenes Intervall

Beim offenen Intervall gehören die Intervallgrenzen nicht zum Intervall. Diese Art von Intervallen wird mit eckigen Klammern geschrieben, die von den Grenzen weg zeigen. Das Intervall $]2;8[_{\mathbb{N}}$ beschreibt daher alle natürlichen Zahlen zwischen ausgeschlossen 2 und ausgeschlossen 8, also 3,4,5,6 und 7.

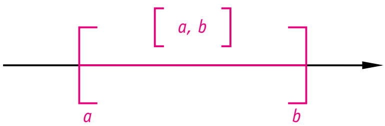
$$]2;8[_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 8\} = \{3;4;5;6;7\}$$

Offenes Intervall		$a < x < b$

2. Geschlossenes Intervall

Beim geschlossenen Intervall gehören die Intervallgrenzen zum Intervall. Geschlossene Intervalle erkennt man daran, dass beide eckige Klammern in der Intervallschreibweise zu den Grenzen zeigen. Das Intervall $[2;8]_{\mathbb{N}}$ beschreibt alle natürlichen Zahlen zwischen eingeschlossen 2 und eingeschlossen 8, also 2,3,4,5,6,7 und 8.

$$[2;8]_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le a \le 8\} = \{2;3;4;5;6;7;8\}$$

Geschlossenes Intervall		$a \le x \le b$

3. Linksseitig geschlossenes und rechtsseitig geöffnetes Intervall

Beim linksseitig geschlossenen und rechtsseitig geöffneten Intervall gehört die linke Intervallgrenze zum Intervall, während die rechte nicht dazu gehört. Da die linke Intervallgrenze zum Intervall gehört, zeigt die linke eckige Klammer zur Intervallgrenze hin. Die rechte Intervallgrenze gehört nicht zum Intervall, daher zeigt die rechte eckige Klammer weg von der Intervallgrenze. Das Intervall $[2;8[_{\mathbb{N}}$ beschreibt daher alle natürlichen Zahlen zwischen eingeschlossen 2 und ausgeschlossen 8, also 2,3,4,5,6 und 7.

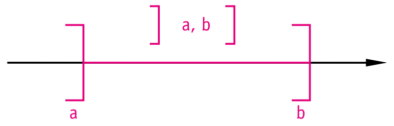
$$[2;8[_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x < 8\} = \{2;3;4;5;6;7\}$$

Linksseitig geschlossenes Intervall		$a \le x < b$

4. Linksseitig geöffnetes und rechtsseitig geschlossenes Intervall

Das Intervall $]2;8]_{\mathbb{N}}$ stellt ein linksseitig geöffnetes und rechtsseitig geschlossenes Intervall dar, da die linke Klammer von der Zahl 2 weg zeigt, während die eckige Klammer zur 8 gerichtet ist. Das genannte Intervall beschreibt alle natürlichen Zahlen zwischen ausgeschlossen 2 und eingeschlossen 8, also 3, 4, 5, 6, 7 und 8.

$$]2;8]_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 8\} = \{3;4;5;6;7;8\}$$

Rechtsseitig geschlossenes Intervall		$a < x \leq b$

Vertiefende Betrachtung – Abgeschlossenheit

In der Mathematik wird der Begriff Abgeschlossenheit verwendet, um folgenden Sachverhalt zu verdeutlichen: Werden zwei natürliche Zahlen addiert oder multipliziert, erhält man wieder eine natürliche Zahl. Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen ist daher abgeschlossen bezüglich der Addition und der Multiplikation. Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen ist jedoch nicht abgeschlossen bezüglich der Subtraktion und Division, da zwei natürliche Zahlen subtrahiert bzw. dividiert nicht zwingend eine natürliche Zahl ergeben. Beispielsweise ist das Ergebnis der Rechnung 4 – 8 keine natürliche Zahl.

Erkenntnis: Die Menge der natürlichen Zahlen ist abgeschlossen bezüglich der Addition und Multiplikation. Bezüglich der Subtraktion und Division ist diese Zahlenmenge nicht abgeschlossen.

Aufgaben

1. Geben Sie den folgenden Sachverhalt in abkürzender Schreibweise unter Verwendung der Relationszeichen wieder.
   a) Die Zahl *a* ist größer als die Zahl *b*.
   b) Die Zahl *a* ist größer oder gleich als die Zahl *b*.
   c) Die Zahl *a* ist kleiner als die Zahl *b*.
2. Geben Sie die Menge *I* in aufzählender Form an, die durch das folgende Intervall $I = [3;10]_{\mathbb{N}}$ beschrieben wird. Veranschaulichen Sie anschließend das Intervall I anhand des Zahlenstrahls.
3. Erklären Sie den Unterschied zwischen dem Intervall $I = [3;10]_{\mathbb{N}}$ aus Aufgabe 2 und dem Intervall $I = [3;10[_{\mathbb{N}}$
4. Eine Mitschülerin behauptet, dass ein Intervall nichts anderes als eine Menge sei. Geben Sie an, ob Sie dieser Aussage zustimmen oder widersprechen. Begründen Sie Ihre Angabe.

1.1.3.2 Die Menge der ganzen Zahlen

Wenn man nur die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachtet, dann ist die Subtraktion $2-6$ nicht ausführbar. Um das Ergebnis dieser Rechnung anzugeben, sind negative Zahlen notwendig. Diese sind in der Menge der natürlichen Zahlen nicht enthalten. Aus diesem Grund wird die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ um negative Zahlen erweitert **(Bild 1)**. Diese so erweiterte Menge nennt man die Menge der ganze Zahlen $\mathbb{Z}$.

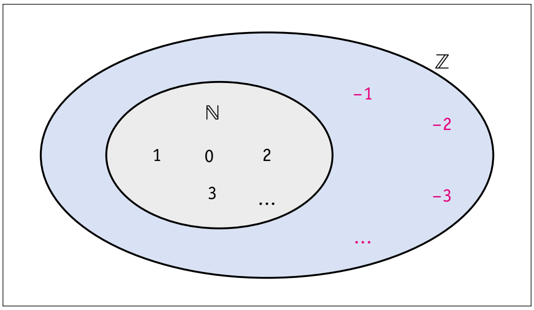
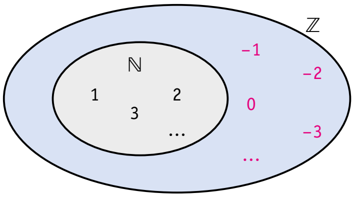


Bild 1: Erweiterung der natürlichen Zahlen

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ besteht aus allen natürlichen Zahlen, der Zahl 0 und den Gegenzahlen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.



■ Betrag einer Zahl

Der Betrag einer Zahl gibt ihren Abstand von der Zahl 0 auf dem Zahlenstrahl an. Da der Abstand immer größer oder gleich 0 Längeneinheiten ist, ist der Betrag einer Zahl stets 0 oder positiv. Die symbolhafte Schreibweise für den Betrag sind zwei senkrechte Striche (| |). Der Betrag der Zahl 5 und ihrer Gegenzahl −5 beträgt jeweils 5, da beide Zahlen 5 Längeneinheiten von der Zahl 0 auf dem Zahlenstrahl entfernt sind.

$|-5| = 5$ und $|5| = 5$

Betrag einer Zahl
Der Betrag einer Zahl a ($a \neq 0$) ist stets positiv. Anschaulich gibt der Betrag einer Zahl a den Abstand zur Zahl 0 auf dem Zahlenstrahl an.

Aufgaben

1. Nennen Sie drei Zahlen, die zur Menge der ganzen Zahlen, aber nicht zur Menge der natürlichen Zahlen gehören.
2. Geben Sie zu den Zahlen 2 und −4 jeweils die Gegenzahlen an.
3. Geben Sie die Menge I in aufzählender Form an, die durch das Intervall $\mathrm{I} = [-3; 2]_{\mathbb{Z}}$ beschrieben wird. Veranschaulichen Sie anschließend das Intervall I anhand des Zahlenstrahls.
4. Begründen Sie mithilfe des Zahlenstrahls, weshalb gilt: $|-4| = 4$

1.1.3.3 Die Menge der rationalen Zahlen

In der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ können alle Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen ausgeführt werden. Wenn man zwei ganze Zahlen addiert, subtrahiert oder multipliziert, erhält man als Ergebnis stets wiederum eine ganze Zahl. Die Division von ganzen Zahlen ist hingegen in $\mathbb{Z}$ nicht immer durchführbar. Dividiert man beispielsweise $-5:3$, so ist das Ergebnis keine ganze Zahl. Damit das Ergebnis dieser Rechnung angegeben werden kann, muss die Menge der ganzen Zahlen um sogenannte Bruchzahlen erweitert werden. Die Menge, die bei der Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ um die Bruchzahlen entsteht, nennt man die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ **(Bild 1)**.

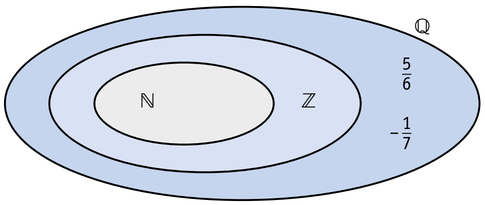


Bild 1: Erweiterung der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen

■ Beschreibung einer Bruchzahl

Unter einer Bruchzahl versteht man Zahlen der Form $a:b$ bzw. $\frac{a}{b}$, wobei a und b ganzen Zahlen sind, a kein Vielfaches von b ist und $b \neq 0$. Beispiele für Bruchzahlen sind $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{8}{7}$ usw. Keine Bruchzahl im engeren Sinne ist beispielsweise $-\frac{4}{2}$, da sich $-4:2$ zu einer ganzen Zahl -2 reduzieren lässt.

Die Zahl über dem Bruchstrich einer Bruchzahl wird Zähler oder Dividend genannt. Die Zahl unterhalb wird als Nenner oder Divisor bezeichnet.

Bruchzahlen

Zahlen der Form $a:b$ bzw. $\frac{a}{b}$ werden als Bruchzahlen bezeichnet, wobei a und b ganze Zahlen sind, a kein Vielfaches von b und $b \neq 0$ ist.

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}$$

Bruchzahlen befinden sich auf dem Zahlenstrahl stets zwischen zwei ganzen Zahlen. Zwei Bruchzahlen werden als gleichwertig erachtet, wenn sie sich an derselben Stelle auf dem Zahlenstrahl befinden. Beispielsweise sind die Bruchzahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ gleichwertig **(Bild 1)**.

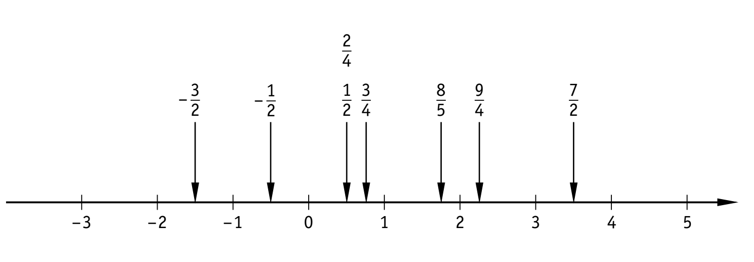


Bild 1: Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl

Anhand von **Bild 1** erkennt man, dass die Bruchzahlen sehr dicht auf dem Zahlenstrahl liegen. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass Stellen auf dem Zahlenstrahl existieren, die nicht durch ganze Zahlen oder Bruchzahlen beschrieben werden können. Diese Stellen werden im Kapitel »reelle Zahlen« betrachtet.

■ Besondere Bruchzahlen

Unter der unendlichen Menge von Bruchzahlen gibt es einige, die sich durch eine besondere Eigenschaft auszeichnen. Diese werden im Folgenden benannt.

a) Stammbrüche

Alle Bruchzahlen mit der Zahl 1 im Zähler heißen Stammbruch.

Beispiele für Stammbrüche: $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}$

b) Scheinbrüche

Als Scheinbrüche werden diejenigen Bruchzahlen bezeichnet, deren Zähler ein ganzzahliges Vielfaches des Nenners ist. Scheinbrüche können stets zu einer ganzen Zahl reduziert werden.

Beispiele für Scheinbrüche: $\frac{6}{3}, \frac{25}{5}, \frac{-9}{3}$

Ist der Nenner der Bruchzahl 1, liegt stets ein Scheinbruch vor. Es gilt für jede beliebige Zahl a: $\frac{a}{1} = a$. Umgekehrt kann jede ganze Zahl stets als Scheinbruch dargestellt werden.

c) Unechter Bruch

Eine Bruchzahl, deren Zähler größer als der Nenner ist, wird als unechter Bruch bezeichnet.

Beispiele für unechte Brüche: $-\frac{12}{11}, \frac{8}{5}, \frac{3}{2}$

d) Kehrbruch

Den Kehrbruch oder Kehrwert einer Bruchzahl erhält man, indem man den Zähler und Nenners der Bruchzahl vertauscht. Eine Bruchzahl und ihr Kehrbruch ergeben miteinander multipliziert stets die Zahl 1.

Beispiel für einen Kehrbruch: Bruchzahl: $\frac{3}{2}$ Kehrbruch: $\frac{2}{3}$.

■ Regeln für Brüche

Bruchzahlen werden auch kurz Brüche genannt. Bei ihnen gibt es Besonderheiten und Regeln, die beachtet werden müssen. Diese werden im Folgenden genannt.

a) Der Nenner eines Bruchs darf niemals 0 sein. Warum dies so ist, wird am Ende dieses Abschnitts in der Rubrik »Vertiefende Betrachtung« gezeigt.

b) Wenn der Zähler eines Bruchs Null ist, dann ist der Wert des Bruches insgesamt Null. Es gilt für alle beliebigen Zahlen $a \neq 0$: $\frac{0}{a} = 0$.
Dies kann man sich durch folgende Überlegung verdeutlichen: Stellen Sie sich vor, dass Sie keinen Kuchen haben und diesen durch 10 Personen teilen möchten. Wie viel bekommt jeder? Nichts, also Null.

c) Bei der Ermittlung des Bruchwerts gilt folgende Vorzeichenregel ($a, b \in \mathbb{N}$):
$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$ $\quad$ $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$ $\quad$ $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\quad$ $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$

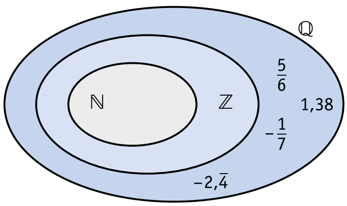
■ Mathematische Beschreibung der rationalen Zahlen

Sowohl jede endliche als auch jede unendliche, aber periodische Dezimalzahl lässt sich als Bruchzahl darstellen. Beispielsweise entspricht der endlichen Dezimalzahl 0,875 die Bruchzahl $\frac{7}{8}$. Die unendliche, periodische Dezimalzahl $0{,}\overline{27}$ ist gleich der Bruchzahl $\frac{3}{11}$. Im Kapitel »Rechnen mit rationalen Zahlen« wird erläutert, wie man rechnerisch die zu einer Dezimalzahl zugehörige Bruchzahl ermittelt.

Mit dem Wissen über den Zusammenhang von Bruchzahlen und Dezimalzahlen, können wir die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eindeutig in Worten beschreiben:

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Menge der rationalen Zahlen besteht aus allen ganzen Zahlen, den Bruchzahlen und den Dezimalenzahlen, die sich als Bruchzahl darstellen lassen.



In beschreibender Mengenschreibeweise lautet die Definition der Menge der rationalen Zahlen wie folgt:

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in beschreibender Mengenschreibweise

$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}^*$: Ganze Zahlen außer die Zahl 0.

Vertiefende Betrachtung – Keine Division durch Null

Es wird gezeigt, weshalb eine Division durch Null nicht definiert ist.

Nehmen wir an, dass eine Division durch Null möglich wäre, dann würde für $a \neq 0$ gelten $\frac{a}{0} = b$. Formen wir diesen Ausdruck um, entsteht die Aussage $a = b \cdot 0$. b · 0 ergibt insgesamt 0. Das bedeutet: $a = 0$. Laut Voraussetzung gilt jedoch $a \neq 0$. Aufgrund dieses Widerspruchs ist unsere Annahme, dass eine Division durch Null möglich wäre, falsch. Eine Division durch Null ist daher nicht zulässig.

Aufgaben

1. Geben Sie die Menge $I = [-1; 4]_{\mathbb{Q}}$ in beschreibender Mengenschreibweise an. Veranschaulichen Sie anschließend das Intervall I anhand des Zahlenstrahls.
2. Erklären Sie den Unterschied zwischen einem Schein- und einen Stammbruch.
3. Geben Sie drei Beispiele für unechte Brüche an.
4. Eine Mitschülerin stellt die Frage: »Zu welcher Zahlenmenge gehört jetzt die Zahl −7? Zur Menge der ganzen oder zur Menge der rationalen Zahlen?« Beantworten Sie diese Frage.

1.1.3.4 Die Menge der reellen Zahlen

Aus den vorherigen Kapiteln wissen wir, dass sich die Bruchzahlen zwischen den ganzen Zahlen auf dem Zahlenstrahl befinden **(Bild 1)**.

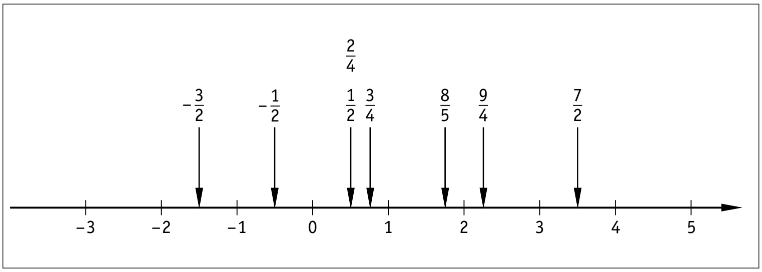


Bild 1: Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl

Es existieren auf dem Zahlenstrahl jedoch Stellen, die nicht durch Bruchzahlen beschrieben werden können. Diese Zahlen werden als irrationale Zahlen bezeichnet.

■ Irrationale Zahlen

Eine irrationale Zahl lässt sich nicht als Bruchzahl darstellen. Das bedeutet, dass eine irrationale Zahl eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl ist. Die bekannteste dieser Zahlen ist die Kreiszahl π (Pi), die wir in Lernbereich 6 dieses Buches kennenlernen werden. In **Bild 2** sind die ersten ihrer Ziffern dargestellt. Man erkennt, dass π offensichtlich eine Dezimalzahl ist, die unendlich und nicht periodisch ist. Neben der Zahl π gibt es noch weitere irrationale Zahlen, auf die wir im Kapitel Rechnen mit reellen Zahlen eingehen werden.

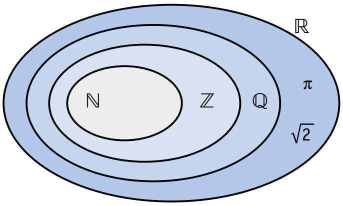
3.14159265358979323846264338327950288419716939
9375105820974944592307816406286208998628034825
3421170679821480865132823066470938446095505822
3172535940812848111745028410270193852110555964
4622948954930381964428810975665933446128475648
2337867831652712019091456485669234603486104543
2664821339360726024914127372458700660631558817
4881520920962829254091715364367892590360011330
5305488204665213841469519415116094330572703657
595919530921861173819326117931051185480744623
7996274956735188575272489122793818301194912 ...

Bild 2: Die Zahl π

Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen ergeben zusammen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Mithilfe der reellen Zahlen kann jede Stelle des Zahlenstrahls beschrieben werden, d. h. durch die reellen Zahlen wird der Zahlenstrahl vollständig beschrieben.

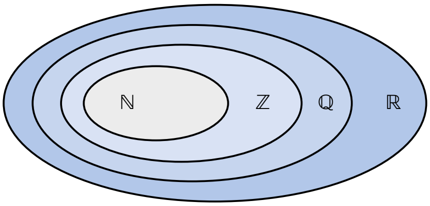
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die Menge der reellen Zahlen umfassen die rationalen Zahlen die und irrationalen Zahlen.



Aufgaben

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl.
2. Ordnen Sie die Zahlen -1, $\frac{7}{3}$, 4, $-\frac{18}{5}$, π und $1{,}\overline{63}$ im folgenden Diagramm passend an.



1.1.3.5 Einschränkung und Erweiterungen der Zahlenmengen

Mithilfe von Zusatzsymbolen können die fest definierten Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erweitert und eingeschränkt werden. Die Zahlenmenge $\mathbb{Z}_0^+$ beschreibt alle positiven ganzen Zahlen und die Zahl 0. Der Index Null bei $\mathbb{Z}_0^+$ gibt somit an, dass die Zahl 0 zur betrachteten Zahlenmenge gehört. Durch ein hochgestelltes Pluszeichen wird festgelegt, dass ausschließlich die positiven Zahlen der Zahlenmenge betrachtet werden.

Aufgaben

1. Erklären Sie den Unterschied zwischen den Zahlenmengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^-$.
2. Ein Mitschüler behauptet, es gelte: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. Geben Sie an, ob Sie dieser Aussage zu stimmen oder ihr widersprechen. Begründen Sie Ihre Angabe.
3. Begründen Sie, weshalb die Zahlenmenge $\mathbb{R}_0$ weder eine Erweiterung noch eine Einschränkung der Zahlenmenge $\mathbb{R}$ ist.

1.1.4 Vergleich zweier Mengen

In diesem Kapitel werden zwei Mengen miteinander verglichen. Insbesondere wird untersucht, unter welcher Voraussetzung zwei Mengen gleich, gleichmächtig oder elementarfremd sind.

- **Gleichheit zweier Mengen**

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Man schreibt: $M_1 = M_2$.

$M_1 = \{1;2;3\}$
$M_2 = \{1;2;3\}$ $\quad M_1 = M_2$

- **Elementarfremde (disjunkte) Mengen**

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind genau dann elementarfremd (disjunkt), wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben.

$M_1 = \{1;2;3\}$
$M_2 = \{4;5;6\}$ $\quad M_1$ und M_2 sind disjunkt.

- **Gleichmächtige Mengen**

Unter der Mächtigkeit einer Menge wird die Anzahl der Elemente einer Menge verstanden. Mithilfe von Betragsstrichen wird symbolisiert, dass die Mächtigkeit der Menge und nicht die Menge an sich betrachtet wird.

$A = \{1;2;3;4;5\} \rightarrow |A| = 5$
$B = \{-1;0;1\} \rightarrow |B| = 3$

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind genau dann gleichmächtig, wenn sie über die gleiche Anzahl an Elementen verfügen.

$M_1 = \{1;2;3\}$
$M_2 = \{4;5;6\}$ $\quad \rightarrow |M_1| = |M_2|$

- **Teilmenge**

Sind alle Elemente der Menge M_1 ebenfalls in der Menge M_2 vorhanden **(Bild 1)**, dann nennt man M_1 eine Teilmenge von M_2. Man schreibt symbolhaft: $M_1 \subset M_2$.

$M_1 = \{4;5;6\}$
$M_2 = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ $\quad \rightarrow M_1 \subset M_2$

Eine Mengen M_1 ist genau dann eine Teilmenge einer Menge M_2, wenn alle Elemente der Menge M_1 auch in der Menge M_2 enthalten sind.

$M_1 \subset M_2$

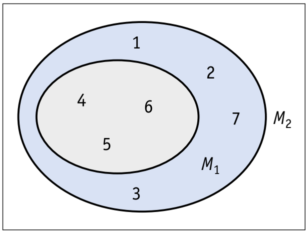
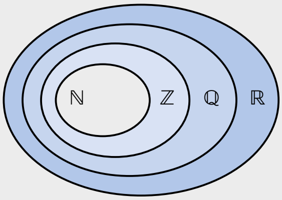


Bild 1: M1 ist Teilmenge von M2

Anmerkung Bei den Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Aufgaben

1. Begründen Sie folgende Aussage: Zwei gleiche Mengen sind auch gleichmächtig.
2. Widerlegen Sie folgende Aussage mit einem Gegenbeispiel: $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}_0^-$ sind disjunkt.

1.1.5 Grundmenge und Ergänzungsmenge

Die sogenannte Grundmenge ist eine besonders bedeutsame Menge in der Mengenlehre. Sie beinhaltet alle Zahlen, die für eine gewisse mathematische Überlegung prinzipiell zur Verfügung stehen. Die Grundmenge für die jeweilige mathematische Überlegung ist meist vorgegeben oder lässt sich aus dem Kontext der Aufgabenstellung erschließen. Wir werden die Grundmenge bei grafischen Darstellungen stets durch ein Rechteck kennzeichnen.

Eng verbunden mit dem Begriff der Grundmenge ist die Ergänzungsmenge, oder auch Komplementärmenge genannt.

Um zu erläutern, was die Ergänzungsmenge (Komplementärmenge) ist, betrachten wir die Grundmenge $G = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ und die Menge $A = \{2; 4; 6; 8\}$. Die Menge A ist eine Teilmenge der Grundmenge **(Bild 1)**. In der Ergänzungsmenge $\overline{A}$ der Menge A sind alle Elemente der Grundmenge G enthalten, die nicht in der Menge A enthalten sind.

$\overline{A}$ lautet demnach $\overline{A} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Die Teilmenge A und ihre Ergänzungsmenge $\overline{A}$ ergeben zusammen stets die Grundmenge G.

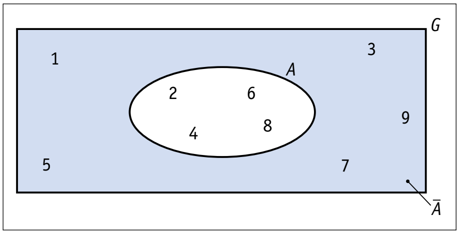


Bild 1: Ergänzungsmenge

Ergänzungsmenge

Es sei A eine Teilmenge der Grundmenge G. Alle Elemente der Grundmenge, die nicht in der Teilmenge A enthalten sind, bilden die Ergänzungsmenge $\overline{A}$ der Menge A bezüglich der Grundmenge G.

$$\overline{A} = \{x \in G \mid x \notin A\}$$

Aufgaben

1. Gegeben ist die Grundmenge $G = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ und die Teilmenge $A = \{-1; 0; 1\}$.
   a) Geben Sie die Ergänzungsmenge $\overline{A}$ der Menge A bezüglich der Grundmenge G an.
   b) Stellen Sie die Mengen G, A und $\overline{A}$ in einem gemeinsamen Mengendiagramm dar.
   c) Geben Sie die Mächtigkeit der Mengen G, A und $\overline{A}$ an.
2. Begründen Sie folgende Aussage: Eine beliebige Menge M und ihre Ergänzungsmenge $\overline{M}$ sind stets disjunkt.

1.1.6 Schnittmenge zweier Mengen

In **Bild 2** sind die Mengen A und B grafisch in einem Mengendiagramm dargestellt. Für die Grundmenge G dieser Überlegung gilt: $G = \mathbb{R}$.

Man erkennt, dass die Zahlen 4 und 5 sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind. Diese beiden Zahlen bilden die sogenannte Schnittmenge der Mengen A und B. Im Mengendiagramm werden sie in den Überlappungsbereich der Diagramme eingetragen. Symbolhaft schreibt man $A \cap B = \{4; 5\}$, wobei das Kurzzeichen $\cap$ die Abkürzung für Schnittmenge ist.

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ und $B = \{4; 5; 6; 7\}$

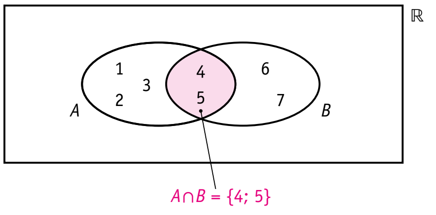


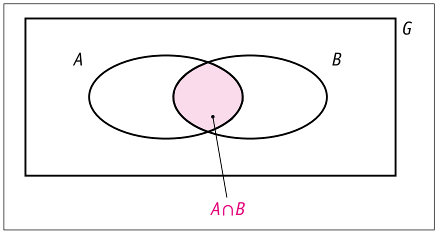
Bild 2: Schnittmenge der Mengen A und B

Anmerkung Mengendiagramme, mit deren Hilfe Zusammenhänge zwischen zwei betrachtet Mengen veranschaulicht werden, nennt man Venn-Diagramme.

Schnittmenge

Die Schnittmenge der Mengen A und B enthält alle Elemente, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind.

$$A \cap B = \{x \in G \,|\, x \in A \quad \text{und} \quad x \in B\}$$



Aufgaben

Gegeben sind die Mengen $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ und die Menge $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen ($G = \mathbb{R}$).

a) Geben Sie die Schnittmenge $A \cap B$ in aufzählender Mengenschreibweise an.

b) Stellen Sie die Mengen A und B in einem gemeinsamen Mengendiagramm dar und kennzeichnen Sie die Schnittmenge.

c) Geben Sie eine Menge C an, für die gilt $C \subset \mathbb{N}$, $A \cap C = \{5; 7\}$ und $|C| = 4$.

1.1.7 Vereinigungsmenge zweier Mengen

In **Bild 1** sind die Mengen A und B grafisch in einem Mengendiagramm dargestellt. Die Grundmenge G dieser Überlegung ist $G = \mathbb{R}$.

In der sogenannten Vereinigungsmenge der Mengen A und B sind alle Elemente enthalten, die in der Menge A oder in der Menge B oder in beiden enthalten sind. Demnach lautet die Vereinigungsmenge der Mengen A und B $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Das Symbol $\cup$ ist die Abkürzung für Vereinigungsmenge.

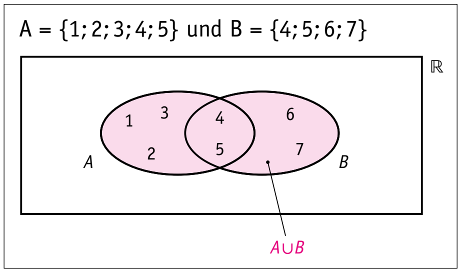


Bild 1: Vereinigungsmenge der Mengen A und B

Vereiningungsmenge

Die Vereinigungsmenge der Mengen A und B enthält alle Elemente, die in der Menge A oder in der Menge B enthalten sind.

$$A \cup B = \{x \in G \,|\, x \in A \quad \text{oder} \quad x \in B\}$$